UNIVERSIDADE DE LUANDA
UNIVERSIDADE DE LISBOA

ELEMENTOS DA TEORIA DA MEDIDA COM RELEVO PARA A TEORIA DA PROBABILIDADE

PARTE A

FASCÍCULOS 1.º e 2.º

por
Pedro B. T. Braumann
Professor das Universidades de Lisboa e de Luanda

NOVA LISBOA
1969

ELEMENTOS DA TEORIA DA MEDIDA COM RELEVO PARA A TEORIA DA PROBABILIDADE

PARTE A

FASCÍCULOS 1.º (páginas 1-164) e 2.º (páginas 165-342)

por

Pedro B. T. Braumann

Professor das Universidades de Lisboa e de Luanda

NOVA LISBOA

1969

NOTA EXPLICATIVA

Este volume corresponde aos fascículos primeiro e segundo da parte A dum tratado intitulado «Elementos da Teoria da Medida com relevo para a Teoria da Probabilidade». As partes deste tratado já concluídas foram redigidas quando o autor era bolseiro, primeiro da Comissão Coordenadora da Investigação para a OTAN e depois do Instituto para a Alta Cultura, e foram publicadas a expensas do Curso de Matemáticas Superiores Professor Mira Fernandes, Estudos de Matemática, Estatística e Econometria, que pôs um certo número de exemplares das folhas soltas impressas à disposição do autor, com a faculdade de este lhes dar o destino achado por conveniente.

Actualmente, tendo-se deslocado o autor, em comissão de serviço, da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa para a Universidade de Luanda e a sua Delegação de Nova Lisboa, acedeu o Ex.^mo^ Senhor Professor Ivo Ferreira Soares, Magnífico Reitor da Universidade de Luanda, muito gentilmente a encarregar os próprios serviços universitários a apresentar as folhas pertencentes ao autor em vários volumes, a começar pelo volume presente. Como havia necessidade de escolher o local da publicação, o Ex.^mo^ Senhor Professor Manuel Gomes

Guerreiro, Dig.mo Delegado em Nova Lisboa do Magnífico Reitor da Universidade de Luanda, resolveu prontamente o problema atribuindo a tarefa à competente secção especializada da Tipografia do Jornal Planalto de Nova Lisboa, da parte da qual o autor encontrou a melhor compreensão.

O autor não faz mais senão cumprir com um dever elementar exprimindo aqui a sua gratidão profunda a todas as pessoas e entidades que contribuiram para a saída deste volume.

Claro que foi preciso acrescentar a presente nota explicativa, um índice geral e um índice remissivo, a fim de elucidar o leitor e facilitar-lhe as consultas. Quanto à bibliografia utilizada, pareceu-nos preferível colocá-la, conjuntamente, no fim do último fascículo desta parte A do nosso tratado, ainda por publicar.

O autor termina esta nota ousando exprimir a esperança de que o estudioso possa colher deste trabalho conhecimentos satisfatórios em relação a um assunto bastante útil, muito interessante e, por vezes, um tanto esquecido.

Nova Lisboa, 4 de Agosto de 1969

Pedro Bruno Teodoro Braumann

ÍNDICE GERAL

Pág.

ELEMENTOS DA TEORIA DA MEDIDA COM RELEVO PARA A TEORIA DA PROBABILIDADE

PARTE A

§ 1) Preâmbulo

Na primeira parte ou parte A deste tratado, designada abreviadamente por A para efeitos de referência e intitulada «*Elementos da teoria da medida com relevo para a teoria da probabilidade*», são examinados assuntos diversos, uns imprescindíveis para a compreensão das duas partes especializadas que constituem o resto do trabalho e outros dispensáveis para tal fim, mas oportunos no quadro dum curso geral sobre medida e sobre probabilidade. O leitor não deixará de notar que as soluções para as múltiplas questões postas emanam dum número comparativamente escasso de ideias fundamentais exploradas ora num sentido ora noutro. É aliás nesta estruturação simples que se esteiam o grande mérito e—porque não afirmá-lo—a boa eficiência da teoria moderna da medida e da probabilidade.

Umas três décadas atrás o ramo da Ciência reservado às probabilidades—o «Cálculo das Probabilidades» como então se dizia—empregava processos empíricos por vezes bastante engenhosos que resolviam satisfatòriamente certos problemas sugeridos pela prática, que se mostravam hesitantes, senão incoerentes, perante outros problemas mais delicados (muitas vezes decorrentes dos primeiros) e que falhavam nìtidamente quando a conjuntura impunha a ampliação do quadro inicialmente traçado. Evidentemente, já tinha sido ultrapassado o estado primitivo no qual o curioso da matéria se limitava a procurar surpreender, por via matemática, as manifestações do ente um tanto misterioso cuja existência aceitava sem discussão e a que achava bem chamar «probabilidade». Mesmo assim havia necessidade premente duma doutrina rigorosa delineada no estilo das teorias matemáticas mais evoluidas que, tomando para base princípios abstractos simples, fosse capaz de alcançar, por métodos autónomos, conclusões suficientemente gerais para merecerem interesse especulativo e suficientemente maleáveis para se prestarem a aplicações proveitosas.

Desde que *Kolmogorov* publicou em 1933 o opúsculo «Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung», apareceram várias formas de suprir a deficiência apontada no texto precedente entre as quais citamos, como merecedoras de registo, as expostas em obras como «Mass und Integral und Ihre Algebraisierung» de C. CARATHÉODORY, «Strukturtheorie der Wahrscheinlichkeitsfelder und-räume» de D. A. KAPPOS, as publicações de A. RÉNYI e outras.

A via seguida neste trabalho consiste em mergulhar a teoria da probabilidade na teoria mais geral da medida em relação à qual aquela representa um caso particular interessante em si e importante para efeitos de aplicação. Parece-nos que assim facilitamos as coisas ao principiante que deseja partir de noções acessíveis à sua intuição para chegar a um ponto razoàvelmente avançado sem dispêndio de esforço exagerado. Doutro lado, se é verdade que há acréscimo de generalidade decorrente do caminho aqui escolhido, tal acréscimo não resulta de maneira nenhuma em superfluidade, isso devido aos três motivos principais seguintes: Abrem-se as perspectivas exactas sobre conceitos que doutro modo ficariam obscurecidos por falta de enquadramento adequado; certos temas de probabilidades puras só podem ser deslindados com o auxilio de medidas que não são probabilidades; muitos dos resultados obtidos convêm simultâneamente à teoria da probabilidade e a outras teorias matemáticas na aparência bem diferentes.

O leitor não precisa de conhecimentos prévios extensos para poder acompanhar este tratado. Com efeito, basta-lhe saber o trivial que é costume ensinar em cursos de Matemáticas Gerais e de Cálculo Diferencial e Integral (talvez acrescido dum poucochinho da teoria do integral de Riemann-Stieltjes). Aliás, dar-se-ão referências apropriadas nos casos em que possa haver dúvida quanto à preparação do leitor. Em todo o resto, o trabalho presente é independente de consultas a outras obras, o que não significa de modo nenhum que ele dispensa tais obras. Pois, embora desenvolvamos certos assuntos até a um grau superior ao usual, não oferecemos nenhuma enciclopédia pelo que comprimimos alguns estudos importantes e omitimos outros como o do teorema de Radon-Nikodym e o das cadeias de Markov, para citar apenas dois exemplos da situação referida em último lugar.

Posto isso, cumpre-nos prestar um esclarecimento. Por motivos vários, que não vale a pena enumerar aqui, tornou-se necessário redigir esta parte A do tratado já depois de impressas as outras duas, a parte B intitulada «*Constantes assintóticas e a lei fraca dos grandes números*» e a parte C intitulada «*Limites de somas de variáveis casuais independentes*», partes estas que continuam um trabalho mais antigo (datado de 1958) a que se chamou «*Introdução ao estudo dos limites de somas de variáveis casuais independentes*» e que consiste numa versão bastante encurtada da parte A moderna, incidindo a condensação mais pronunciada sobre o primeiro capítulo e aí sobre o segundo parágrafo. Assim, como as referências retrospectivas das partes B e C devessem concordar simultâneamente com a «*Introdução etc.*» e com a parte A moderna, esta foi dotada de duas numerações quer para os seus teoremas quer para as suas fórmulas, duma numeração corrente aplicada aos casos em que não há receio de complicação com a «*Introdução etc.*» e doutra numeração com elementos precedidos do símbolo N aplicada aos casos em que poderia surgir uma complicação do tipo referido. Por exemplo, as fórmulas do primeiro capítulo aparecem numeradas sucessivamente de N 1) a N 14'), de 1) a 1'), de N 15) a N 15') e de 2) até ao fim, enquanto os teoremos do mesmo capítulo vêm marcados consecutivamente de N I a N XII, de I a I, de N XIII a N XXXVII' e de II até ao fim. Aliás, o índice desta obra resolverá prontamente qualquer dificuldade relativa a consultas da matéria atrasada nas raras ocasiões em que deixa de ser ordenada a numeração global resultante da sobreposição das duas numerações empregadas.

* * *

Terminamos este preâmbulo dando uma ideia sumária do conteúdo da parte A.

O seu primeiro capítulo é de longe o mais extenso e intitula-se «*Noções várias relativas a espaços de medida e de probabilidade*». O primeiro dos cinco parágrafos do capítulo ou seja o segundo parágrafo da parte A denomina-se «*Os conceitos de medida e de probabilidade*» e amplia o parágrafo correspondente do trabalho «*Introdução etc.*» em proporção tão elevada que se tornou aconselhável repartir a matéria por seis alíneas assinaladas pelas seis primeiras letras do alfabeto latino minúsculo.

Na alínea *a)* do parágrafo referido estudam-se as operações mais correntes sobre conjuntos contidos quer no mesmo espaço quer em espaços diferentes, a saber a subtracção, a complementação, a união, a adição e a intersecção no primeiro caso e a restrição, a multiplicação, a projecção, a marginação e o corte no outro caso. A propósito desse estudo recorre-se muitas vezes às chamadas (funções) indicatrizes.

A alínea *b)* começa por tratar de classes de conjuntos, em especial de corpos e de corpo$-\sigma$, para continuar com o exame das operações principais sobre corpos$-\sigma$ definidos no mesmo espaço ou em espaços diferentes entre as quais se contam a completação, a intersecção, a geração, a decomposição, a restrição, o corte, a projecção, a marginação e a multiplicação. Também se considera o caso particular tão importante dos corpos de Borel a uma ou a mais dimensões.

Deu-se às duas alíneas até agora consideradas um desenvolvimento um pouco maior do que o usual porque se teve em vista a preparação eficiente da alínea *c)*, esta básica para o capítulo inteiro, a qual comporta muitas coisas bem conhecidas ao lado dalgumas eventualmente novas. No princípio desta alínea apresentam-se primeiro os conceitos de função aferidora, de conteúdo, de conteúdo—σ, de quase-medida, de medida e de espaço de medida e estudam-se a seguir as propriedades mais ou menos imediatas relacionadas com esses conceitos. Na continuação passam-se em revista as operações correntes sobre espaços de medida, a saber a completação, a restrição, a marginação, a construção por extensão (maximal) e, por fim, a multiplicação (maximal).

Dum modo geral a alínea *d)* tem por objectivo aplicar as conclusões tiradas na alínea *c)* ao caso particular dos espaços de Borel com um número finito $N \geqq 1$ de dimensões, muito embora se tornem oportunas frequentemente considerações suplementares que não deixam de ter o seu interesse próprio. Começamos por estudar as relações entre medidas e determinadas funções de intervalo (um pouco mais gerais do que as habitualmente empregadas). Depois ocupamo-nos das funções medidoras e quase-medidoras associadas a N números dados (infinitos ou *finitos*) as quais permitem tratar medidas de Lebesgue-Stieltjes arbitrárias por processos decalcados dos que tratam qualquer probabilidade à custa da função de distribuição correspondente. Em seguida procedemos a uma análise muito mais minuciosa do que a costumeira não só dos pontos de continuidade e de descontinuidade duma função medidora, como também das convergências fraca e completa de certas sucessões de funções quase-medidoras. Por fim, examinamos as chamadas densidades de medida e os momentos das medidas elementares e das medidas com densidade. A este propósito aparece-nos, pela primeira vez, a noção de corte feito numa medida.

A alínea *e)* traz o essencial sobre espaços de probabilidade acompanhado da terminologia própria reservada a esses espaços de medida especiais. Procedemos sempre por particularização de resultados alcançados nas duas alíneas anteriores salvo no estudo do conceito de independência (o qual é privativo dos espaços de probabilidade). No meio disso tudo damos relevo à tradicional hipótese dos casos igualmente prováveis e não nos esquecemos da combinatória que frequentemente acompanha essa hipótese. Também não deixamos de lado os teoremas clássicos os quais passam a adquirir significados mais precisos decorrentes do seu novo enquadramento e entre os quais destacamos o teorema das probabilidades totais, o das probabilidades compostas e o de Bayes-Laplace. Quando apresentamos a noção de independência, distinguimos entre acontecimentos tirados do mesmo espaço e acontecimentos tirados de espaços diferentes.

Na alínea *f)* passamos em revista as mais importantes das funções probabilidade, também chamadas leis de probabilidade, definidas em espaços de Borel com um número finito de dimensões. São, entre outras, a lei elementar uniforme a qualquer número de dimensões, a hipergeométrica, a dos acontecimentos repetidos, a multinomial, a de Bernoulli--Poisson, a binomial ou de Bernoulli, a geométrica, a de Pascal, a de Poisson, a de Neyman, a contínua uniforme a qualquer número de dimensões, a de Laplace, a de Cauchy, a normal ou de Gauss unidimensional, a gama, a qui-quadrado, a beta, a normal ou de Gauss multidimensional, a de Student e a de Fisher-Snedecor.

O terceiro parágrafo contém o trivial sobre funções mensuráveis sem esquecer o caso particular das variáveis casuais. O estudo é de transição e destina-se a acrescentar ao precedente o reforço necessário para a exposição subsequente.

No quarto parágrafo desenvolvemos uma teoria dos integrais de funções mensuráveis com respeito a medidas arbitrárias a qual sai incompleta em si, mas amplamente suficiente para os fins em vista. Os principais assuntos tratados são a generalização das propriedades elementares dos integrais clássicos, os teoremas de Fatou, Lebesgue e Fubini com os seus acompanhamentos e a dedução das desigualdades mais correntes relativas a integrais.

No quinto parágrafo começamos por relacionar uma medida arbitrária com a nova medida que uma função mensurável (em relação à primeira medida) induz no espaço de Borel correspondente aos seus valores. A este propósito encontramos facilidades para analisarmos como certas transformações duma função mensurável se refletem no comportamento das funções medidoras por ela induzidas. Quanto aos integrais de funções mensuráveis, estes convertem-se muitas vezes em integrais de Lebesgue-Stieltjes e até de Riemann-Stieltjes, aproximando-nos assim da teoria do integral clássica. Finalmente, dada uma função mensurável contínua, os teoremas de Helly-Bray referem condições suficientes interessantes para que a convergência fraca ou completa de certa sucessão de funções quase-medidoras implique a convergência ordinária da sucessão de integrais correspondente.

O sexto parágrafo, último do primeiro capítulo, é dedicado a um tema privativo das medidas finitas significativas, portanto pràticamente das probabilidades. Trata-se das primeiras propriedades das funções características, da descrição interna destas funções e das suas relações com as funções medidoras especiais que são de distribuição. Em certa altura a continuação da exposição fica relegada para o capítulo seguinte, isso devido à necessidade de respeitar a paragrafação do trabalho «*Introdução etc.*».

O segundo capítulo, com apenas dois parágrafos, aperfeiçoa o estudo dalgumas questões encetadas no primeiro capítulo e prepara o caminho para a análise dos assuntos especializados que ocupam o resto deste trabalho.

No sétimo parágrafo introduzimos primeiro o conceito de qualquer número de variáveis casuais independentes e examinamos a seguir o comportamento dos momentos e das funções características de tais variáveis supostas em número finito.

No oitavo parágrafo completamos a matéria do sexto considerando novas propriedades das funções características, em especial as relativas à sua integrabilidade e à sua derivabilidade e as relativas à convergência de sucessões de tais funções. Depois o parágrafo termina com uma selecção de exemplos de funções características importantes.

O terceiro capítulo, o último da parte A, comporta três parágrafos. Ele é dedicado ao conceito de lei infinitamente divisível, abreviadamente lei i. d., no qual se esteia a teoria dos limites de somas de variáveis casuais independentes a desenvolver na parte final do tratado.

No nono parágrafo dá-se a definição e estudam-se as primeiras propriedades das leis i. d.. Juntam-se exemplos notáveis de tais leis e assinala-se o papel fundamental que a lei de Poisson desempenha em relação à classe de todas as leis i. d. possíveis.

No décimo parágrafo procedemos, por via heurística, a generalizações consecutivas das leis i. d. de estrutura mais simples (isto é, das sobreposições duma lei de Poisson com outra de Gauss independente da primeira) até chegarmos a duas expressões equivalentes do logaritmo da função característica duma lei i. d. que depois se revelará como universal. O caminho a percorrer far-nos-á alcançar sucessivamente a representação de De Finetti, válida para certas leis i. d., a representação de Kolmogorov, válida para outras leis i. d., e a representação de Lévy e a de Lévy e Khintchine, estas duas válidas para qualquer lei i. d..

No parágrafo final da parte A juntamos às duas representações gerais do parágrafo precedente mais uma, a de Lévy modificada, e fundamentamos devidamente o conjunto dessas três representações. Acrescentamos a representação de Kolmogorov, típica das leis i. d. com variância, e terminamos dando exemplos de representações de leis i. d. importantes.

CAPÍTULO I

NOÇÕES VÁRIAS RELATIVAS A ESPAÇOS DE MEDIDA E DE PROBABILIDADE

§ 2) Os conceitos de medida e de probabilidade

a) Estudo de certas operações sobre conjuntos

1. Generalidades sobre conjuntos extraídos do mesmo espaço. Quando se procede à elaboração duma teoria matemática, quer haja intenção de aplicá-la ulteriormente a problemas da prática quer não haja tal intenção, é forçoso partir de noções primárias oportunas que se consideram como óbvias na situação relativa incidente e que, por isso, não se sujeitam a nenhuma tentativa de dissecação.

No caso presente é o nosso propósito construir uma teoria da medida e, em particular, da probabilidade que esteja conforme com os requisitos expostos na introdução. Para este efeito serve-nos de esteio a noção primária de *conjunto não-vazio,* quer dizer, de conjunto com elementos. Quando aqui se fixa tal conjunto, é com o desejo de organizá-lo para os fins em vista; assinala-se, usualmente, o efeito futuro dessa organização chamando *espaço* ao conjunto fixado.

Seja Ω um espaço. Aos elementos de Ω atribuimos também a denominação de *pontos,* mesmo que não sejam pontos na acepção usual da palavra. Quando ω é o ponto genérico de Ω, pode recorrer-se à escrita muito sugestiva $\Omega(\omega)$.

* * *

Dado o espaço $\Omega(\omega)$, podemos extrair dele conjuntos de pontos ω, o próprio Ω ou, caso Ω tenha mais dum ponto, outros conjuntos. Por motivos vários, torna-se aconselhável acrescentar a convenção seguinte: Existe em Ω um e um só conjunto desprovido de pontos ω, conjunto esse que recebe o nome de *conjunto vazio* e que se representa pelo símbolo O. Sendo assim, um conjunto de pontos ω diz-se *não-vazio* se for distinto de O.

Seja A um conjunto de pontos extraído de Ω. O conjunto A diz-se *elementar* quando o número dos seus pontos for igual a um e diz-se *não-elementar* nos demais casos. Escreve-se $\omega \in A$ para indicar que o ponto ω *pertence a* A ou, como também se diz, *está situado em* A e escreve-se $\omega \notin A$ para negar a afirmação correspondente à expressão $\omega \in A$. Portanto, dado qualquer ω, tem-se sempre $\omega \in \Omega$ e $\omega \notin O$.

Indicamos pelo símbolo $\{\omega, \omega', \omega'', \ldots\}$ o conjunto formado pelos pontos $\omega, \omega', \omega'', \ldots$, todos de Ω. Nesta conformidade, a relação $\omega \in \{\omega\}$ traduz muito simplesmente que o ponto ω pertence ao conjunto elementar constituído pelo único ponto ω. —Mais, usamos o símbolo $\{\omega$ sujeito a certa relação$\}$ para referir o conjunto dos pontos de Ω que satisfazem à relação escrita. Por exemplo, se o espaço Ω for o dos números racionais, o símbolo $\{0 < \omega \leqq 2\}$ indica o conjunto dos números racionais positivos que não excedem 2.

* * *

Consideremos dois conjuntos A e B extraídos do espaço $\Omega(\omega)$. Quando todo o ponto ω de A for também um ponto de B, escreve-se $A \subset B$ e lê-se *A está contido em B* ou *A é subconjunto de B*; também se escreve $B \supset A$ e se lê *B contém A* ou *B é sobreconjunto de A*. Os símbolos $\subset$ e $\supset$ dizem-se *símbolos de inclusão* e as relações $A \subset B$ e $B \supset A$ dizem-se *relações de inclusão*.

Seja qual for A, faz-se a convenção $A \supset O$ ou, equivalentemente, $O \subset A$. Logo sai $A \subset \Omega$ ou $\Omega \supset A$, também seja qual for A. Um subconjunto (sobreconjunto) de A diz-se *impróprio* se coincidir com A ou com O (com Ω) e diz-se *próprio* nos demais casos.

Juntemos aos dois conjuntos A e B outro C, também extraído do espaço Ω. Então, tornam-se óbvias as propriedades seguintes das relações de inclusão:

N 1) *a)* $A \subset A$ e $A \supset A$ *(propriedade reflexiva);*
b) Não só $A \subset B$ e $B \subset C$ implica $A \subset C$, como também $A \supset B$ e $B \supset C$ implica $A \supset C$ *(propriedade transitiva).*

Escreve-se $A = B$ e diz-se que A e B são *iguais* quando (e só quando), seja qual fôr o ponto ω, ou ocorrem as duas relações $\omega \in A$ e $\omega \in B$ ou não ocorre nenhuma delas. Escreve-se $A \neq B$ e diz-se que A e B são *diferentes* para negar a afirmação correspondente à relação $A = B$.

Ponhamos $A \subset B$ e $A \supset B$ para indicar que A é simultâneamente subconjunto e sobreconjunto de B. Então, a definição de igualdade entre conjuntos conduz imediatamente à proposição seguinte:

N I) «Dois conjuntos A e B, extraídos do mesmo espaço, saem iguais quando e só quando se verifica a relação $A \subset B$ e $A \supset B$.»

Reconhece-se fàcilmente, ou por via directa ou combinando a proposição N I com a fórmula N 1), que a relação de igualdade entre conjuntos goza das propriedades seguintes:

N 2) *a)* $A = A$ *(propriedade reflexiva);*
b) $A = B$ implica $B = A$ *(propriedade simétrica);*
c) $A = B$ e $B = C$ implicam $A = C$ *(propriedade transitiva).*

Observação. É perfeitamente possível que, dados A e B, não se verifique nenhuma das relações de inclusão $A \subset B$ e $A \supset B$. Exemplo: Ω é o espaço dos números naturais, A é o conjunto dos números naturais pares e B é ou o conjunto dos números naturais ímpares ou o dos números naturais menores que 20.

* * *

Seja $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ uma colecção finita ou numerável de conjuntos extraídos do mesmo espaço. Caso se tenha $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$, escreve-se $A_n \uparrow$ e diz-se que a colecção é *ascendente* ou *não-descrescente;* caso se tenha $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$

$\cdots \supset A_n \supset \cdots$, escreve-se $A_n \downarrow$ e diz-se que a colecção é *descendente* ou *não-crescente*. Em qualquer dos dois casos mencionados a colecção fica com a designação de *monótona* ou de *monotónica*.

2. As operações de subtracção e de complementação. O nosso próximo objectivo é estudar alguns casos notáveis em que, partindo de vários conjuntos extraídos de certo espaço, se efectuam operações sobre eles que dão por resultado um conjunto determinado contido no mesmo espaço.

Comecemos por definir a operação de *subtracção* dos dois conjuntos A e B, ambos de pontos ω dum espaço Ω: É a operação que conduz ao conjunto de todos os pontos ω tais que se verifica simultâneamente $\omega \in A$ e $\omega \notin B$, conjunto esse que vamos representar por $A-B$ e a que vamos chamar *diferença* entre (o *diminuendo*) A e (o *diminuidor*) B.

Logo se reconhece que a operação de subtracção aqui definida goza das propriedades seguintes:

N 3) *a)* $A-B \subset A$; *b)* $A \subset B$ implica $A-B=O$ donde, em particular, $A-\Omega=O-B=O$; *c)* A não contém nenhum ponto de B implica $A-B=A$ donde, em particular, $A-O=A$ *(propriedade modular)*.

Se C for outro conjunto de pontos ω, podemos formar a diferença $(A-B)-C$ entre (o diminuendo) $A-B$ e (o diminuidor) C. Vale então a propriedade

N 4) $(A-B)-C=(A-C)-B,$

pois não só $\omega \in (A-B)-C$ implica primeiro $\omega \in A-B$ e $\omega \notin C$, depois $\omega \in A$, $\omega \notin B$ e $\omega \notin C$, em seguida $\omega \in A-C$ e $\omega \notin B$ e, por fim, $\omega \in (A-C)-B$, como também pode mostrar-se semelhantemente que $\omega \in (A-C)-B$ implica $\omega \in (A-B)-C$, de modo que a proposição N I prova a igualdade escrita.

É óbvio que a dupla diferença $(A-B)-C$ pode servir de diminuendo para uma nova subtracção e assim sucessivamente.

*
* *

Um caso particular importante da subtracção de dois conjuntos extraídos de Ω é o caso em que o diminuendo é Ω e o diminuidor é um conjunto qualquer A. Chamamos à diferença $\Omega - A$ *complemento* de A e representamo-la, em geral, por A^-. À operação que transforma A em A^- dá-se o nome de *complementação* de A.

Para qualquer ponto ω de Ω a relação $\omega \notin A$ é equivalente à relação $\omega \in A^-$, facto este que permite evitar o uso do símbolo $\notin$. Mais, a operação da complementação goza da propriedade seguinte:

N 5) $(A^-)^- = A$ *(propriedade involutiva).*

3. As operações de união e de adição. Passamos a definir a operação de *união* dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, formando uma colecção finita ou numerável e todos extraídos do espaço $\Omega(\omega)$: É a operação que conduz ao conjunto de todos os pontos ω que gozam da propriedade de pertencerem a *algum* dos conjuntos dados. Representamos o resultado desta operação por $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$ ou, abreviadamente, por $\bigcup_n A_n$ e chamamos-lhe *união* dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, os quais passam a ser *conjuntos unidos* ou *parcelas*, constituindo-se A_1 em primeira parcela, A_2 em segunda parcela, etc.

Vale a proposição seguinte:

N II) «A união dum número finito ou duma infinidade numerável de conjuntos extraídos do mesmo espaço não se altera, quer se permutem as suas parcelas de qualquer modo quer se associem tantas vezes quantas se deseje parcelas (em número finito ou infinito) que formem bloco na união correspondente.»

Demonstração de N II: A parte de N II que diz respeito à comutatividade das parcelas é uma consequência imediata da definição da operação de união.

Para provar a parte de N II que diz respeito à associatividade das parcelas, basta deduzir a igualdade entre conjuntos

$$\text{N 6)} \quad \cdots \cup A_\alpha \cup \cdots \cup A_\beta \cup \cdots \cup A_\gamma \cup \cdots = \cdots \cup A_\alpha \cup \cdots$$
$$\cdots \cup (\cdots \cup A_\beta \cup \cdots) \cup \cdots \cup A_\gamma \cup \cdots,$$

com índices α, β e γ arbitrários e com um primeiro membro de parcelas dispostas por ordem arbitrária. Ora bem, se o ponto ω pertencer ao primeiro membro de N 6), então ω está situado numa das suas parcelas, suponhamos em A_n; portanto, ω está situado na parcela A_n ou na parcela $\cdots \cup A_\beta \cup \cdots$ do segundo membro, conforme A_n for exterior ou interior ao bloco constituído à volta de A_β; de qualquer modo ω pertence ao segundo membro de N 6). Semelhantemente se prova que um ponto ω situado no segundo membro de N 6) pertence também ao primeiro membro. Por causa da proposição N I, fica então completada a nossa demonstração.

Para uniões com duas ou três parcelas, suponhamos A, B e C, a definição da operação de união e a proposição N II dão as propriedades seguintes:

N 7) *a)* $A, B \subset A \cup B$; *b)* $A \supset B$ implica $A \cup B = A$ donde, em particular, $\Omega \cup B = \Omega$ e $A \cup O = A$ *(propriedade modular)*; *c)* $A \cup B = B \cup A$ *(propriedade comutativa)*; *d)* $A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *(propriedade associativa)*.

Completamos a definição de união dum número finito de conjuntos de pontos ω considerando todo o conjunto A extraído de Ω como a união de parcela única A e considerando ainda o conjunto O como uma *união vazia*, isto é, como uma união de zero parcelas.

* * *

Dois conjuntos sem pontos ω comuns dizem-se *disjuntos*. Quando os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ considerados no princípio desta secção forem disjuntos dois a dois, então a operação de união efectuada sobre eles, o seu conjunto união e os conjuntos unidos denominam-se também (operação de) *adição*, (conjunto) *soma* e *conjuntos somados*, respectivamente. Pode usar-se a notação $A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots$ ou, abreviadamente, $\sum\limits_n A_n$ para assinalar que se trata do caso particular da união das parcelas $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ que corresponde à soma dessas parcelas.

Uma consequência imediata da proposição N II é o corolário seguinte:

N II') «A soma dum número finito ou duma infinidade numerável de conjuntos extraídos do mesmo espaço não se altera, quer se permutem as suas parcelas de qualquer modo quer se associem tantas vezes quantas se deseje parcelas (em número finito ou infinito) que formem bloco na soma correspondente.»

Supondo agora que os conjuntos A, B e C da fórmula N 7) são disjuntos dois a dois e atendendo ao facto que o conjunto O é o único conjunto contido em e disjunto de A, obtemos as propriedades seguintes da operação de adição aqui definida:

N 7') *a)* $A, B \subset A+B$; *b)* $A+O=A$ *(propriedade modular)*; *c)* $A+B=B+A$ *(propriedade comutativa)*; *d)* $A+B+C=(A+B)+C=A+(B+C)$ *(propriedade associativa)*.

Finalmente, imitando o procedimento adoptado no caso geral da operação de união, consideramos todo o conjunto A extraído de Ω como a soma de parcela única A e consideramos ainda o conjunto O como uma *soma vazia*, isto é, como uma soma de zero parcelas.

* * *

Dada uma família *não necessàriamente numerável* T de índices t, pode acontecer que a cada $t \in T$, isto é, a cada t de T corresponda um conjunto A_t extraído do espaço $\Omega(\omega)$. Nesta conformidade, representamos por $\bigcup_{t \in T} A_t$ e, no caso de conjuntos A_t disjuntos dois a dois, também por $\sum_{t \in T} A_t$ o conjunto de todos os pontos ω que gozam da propriedade de pertencerem a algum dos A_t considerados e chamamos a esse conjunto *união* e, no caso particular citado, também *soma* das parcelas A_t. A demonstração de N II continua a ser válida para esta generalização da definição anterior de união e, no caso particular citado, de adição de conjuntos de pontos ω.

* * *

Alguns autores desenvolvem a teoria presente recorrendo, por vezes, à operação de *subtracção simétrica* de dois conjuntos A e B de pontos ω, entendendo por tal a operação que conduz ao conjunto de todos os pontos ω que gozam da propriedade de pertencerem a algum dos conjuntos A e B sem pertencerem simultâneamente aos dois. O conjunto resultante da operação definida denomina-se *diferença simétrica* de A e B.

É óbvio que a subtracção simétrica de A e B goza da propriedade comutativa; é mesmo esta a razão da designação atribuída a este tipo de subtracção. Deixamos ao cuidado do leitor verificar que a diferença simétrica de A e B se identifica com o conjunto $(A-B)+(B-A)$ ou seja com a soma das diferenças entre A e B e entre B e A.

4. A operação de intersecção. Passamos a definir a operação de *intersecção* dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, formando uma colecção finita ou numerável e todos extraídos do espaço $\Omega(\omega)$: É a operação que conduz ao conjunto de todos os pontos ω que gozam da propriedade de pertencerem simultâneamente a *cada um* dos conjuntos dados. Representamos o resultado desta operação por $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots$ ou, abreviadamente, por $\bigcap_n A_n$ e chamamos-lhe *intersecção* dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, os quais passam a ser *conjuntos secantes,* constituindo-se A_1 em primeiro conjunto secante, A_2 em segundo conjunto secante, etc.

Uma consequência imediata da definição dada é a proposição seguinte:

N III) «Dois conjuntos A e B, extraídos do mesmo espaço, saem disjuntos quando e só quando se verifica a relação $A \cap B = O$.»

Vamos enunciar agora uma proposição semelhante a N II, a saber:

N IV) «A intersecção dum número finito ou duma infinidade numerável de conjuntos extraídos do mesmo espaço não se altera, quer se permutem os seus conjuntos secantes de qualquer modo quer se associem tantas vezes quantas se deseje conjuntos secantes (em número finito ou infinito) que formem bloco na intersecção correspondente.»

Demonstração de N IV: A parte de N IV que diz respeito à comutatividade dos conjuntos secantes é uma consequência imediata da definição da operação de intersecção.

Para provar a parte de N IV que diz respeito à associatividade dos conjuntos secantes, basta deduzir a igualdade

N 8) $$\cdots \cap A_\alpha \cap \cdots \cap A_\beta \cap \cdots \cap A_\gamma \cap \cdots = \cdots \cap A_\alpha \cap \cdots \cdots \cap (\cdots \cap A_\beta \cap \cdots) \cap \cdots \cap A_\gamma \cap \cdots,$$

com índices α, β e γ arbitrários e com um primeiro membro em que os conjuntos secantes estão dispostos por ordem arbitrária. Ora bem, se o ponto ω pertencer ao segundo membro de N 8), então ω está situado simultâneamente em cada um dos conjuntos secantes $\cdots, A_\alpha, \cdots, \cdots \cap A_\beta \cap \cdots, \cdots, A_\gamma, \cdots$; doutro lado, $\omega \in \cdots \cap A_\beta \cap \cdots$ implica que ω está situado simultâneamente em cada um dos conjuntos secantes A_n do bloco constituído à volta de A_β; logo ω pertence simultâneamente a cada um dos conjuntos $\ldots, A_\alpha, \ldots, A_\beta, \ldots, A_\gamma, \ldots$ e, portanto, está situado no primeiro membro de N 8). Semelhantemente se prova que um ponto ω situado no primeiro membro de N 8) pertence também ao segundo membro. Por causa da proposição N I, fica então completada a nossa demonstração.

Para intersecções com dois ou três conjuntos secantes, suponhamos A, B e C, a definição da operação de intersecção e a proposição N IV dão as propriedades seguintes:

N 9) *a)* $A, B \supset A \cap B$; *b)* $A \subset B$ implica $A \cap B = A$ donde, em particular, $O \cap B = O$ e $A \cap \Omega = A$ *(propriedade modular)*; *c)* $A \cap B = B \cap A$ *(propriedade comuta-*

tiva); d) $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ *(propriedade associativa).*

Completamos a definição de intersecção dum número finito de conjuntos de pontos ω considerando todo o conjunto A extraído de Ω como a intersecção cujo único conjunto secante é o próprio A e considerando ainda o conjunto Ω como uma *intersecção vazia*, isto é, como uma intersecção de zero conjuntos secantes.

* * *

Suponhamos que é dada a família *não necessàriamente numerável* T de índices t e que a cada $t \in T$ corresponde um conjunto A_t extraído do espaço $\Omega(\omega)$. Neste caso representamos por $\bigcap_{t \in T} A_t$ o conjunto de todos os pontos ω que gozam da propriedade de pertencerem simultâneamente a cada um dos A_t considerados e chamamos a esse conjunto *intersecção* dos conjuntos (secantes) A_t. A demonstração de N IV continua a ser válida para esta generalização da definição anterior de intersecção de conjuntos de pontos ω.

5. Operações combinadas sobre conjuntos extraídos do mesmo espaço. Quando se está em presença duma colecção finita ou duma infinidade numerável de conjuntos extraídos do espaço $\Omega(\omega)$, pode haver interesse em fazer incidir sobre eles alguma combinação finita ou numerável das operações atrás definidas. Em tal caso o uso de parêntesis, colchetes, chavetas, etc. constitui o meio apropriado para indicar a ordem pela qual devem efectuar-se as diversas operações. Exemplifiquemos: Se A, B, C e D forem quatro conjuntos de pontos ω e se A e B forem disjuntos, então $[D \cap (B-C)^-] \cup \{C-[D^- \cap (A+B)]\}$ significa a união que tem por primeira parcela a intersecção de D com o complemento da diferença entre B e C e que tem por segunda parcela a diferença entre C e a intersecção do complemento de D com a soma de A e B.

De vez em quando, duas marchas de operações diferentes, executadas sobre os mesmos conjuntos, conduzem a resultados finais coincidentes, dando assim lugar a uma igualdade entre dois conjuntos que se apresentam sob formas bem diversas. Tal igualdade pode sempre demonstrar-se utilizando a proposição N I, isto é, provando que cada um dos dois conjuntos igualados está contido no outro. As fórmulas seguintes exibem algumas igualdades importantes do tipo aqui referido; em todas elas as letras maiúsculas com ou sem índices designam conjuntos de pontos ω.

Para começar, consideremos os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, formando uma colecção finita ou numerável, e vejamos duas igualdades que lhes dizem respeito, as quais são conhecidas pelo nome de *relações de* MORGAN e permitem, com recurso aos complementos dos conjuntos envolvidos, transformar intersecções em uniões e vice-versa.

N 10) *a)* $(\bigcup_n A_n)^- = \bigcap_n A_n^-$; *b)* $(\bigcap_n A_n)^- = \bigcup_n A_n^-$.

A relação N 10 *a)* verifica-se como segue: Se $\omega \in (\bigcup_n A_n)^-$, então $\omega \notin A_n$ para cada n e, portanto, $\omega \in \bigcap_n A_n^-$; se $\omega \in \bigcap_n A_n^-$, então $\omega \notin A_n$ para qualquer n e, portanto, $\omega \in (\bigcup_n A_n)^-$. A relação N 10 *b)* pode obter-se a partir de N 10 *a)*, substituindo primeiro A_n por A_n^-, atendendo depois a N 5) e tirando em seguida o complemento a cada um dos membros.

Se tivermos os conjuntos que figuram em N 10) e se atribuirmos ao índice p o mesmo campo de variação que ao índice n, então vale a igualdade que vamos escrever e que permite transformar a intersecção numa combinação de uniões e de subtracções.

N 11) $\bigcap_p A_p = (\bigcup_n A_n) - \{\bigcup_p [(\bigcup_n A_n) - A_p]\}$.

A relação N 11) é verdadeira porque: Se $\omega \in \bigcap_p A_p$, sai o par de relações $\omega \in \bigcup_n A_n$ e $\omega \notin (\bigcup_n A_n) - A_p$ para qualquer p, o qual implica $\omega \in (\bigcup_n A_n) - \{\bigcup_p [(\bigcup_n A_n) - A_p]\}$; se ω pertencer ao segundo membro de N 11), sai o par de relações mencionado e, portanto, $\omega \in A_p$ para cada p.

A igualdade dupla seguinte mostra que, dados dois conjuntos de pontos ω, é possível substituir a sua subtracção por complementações acompanhadas ou por uma intersecção ou por uma união.

N 12) $A-B=A\cap B^{-}=(A^{-}\cup B)^{-}$.

A primeira parte de N 12) deve-se ao facto que o par de relações $\omega \in A$ e $\omega \notin B$ é equivalente ao par de relações $\omega \in A$ e $\omega \in B^{-}$; a segunda parte de N 12) resulta da primeira por aplicação de N 10 *a)* aos dois conjuntos A^{-} e B.

Passamos para duas igualdades que traduzem, a primeira uma propriedade que em geral permite simplificar o diminuidor duma subtracção e a outra a chamada *propriedade distributiva da intersecção com respeito à subtracção.*

N 13) *a)* $A-B=A-(A\cap B)$; *b)* $(A-B)\cap C=(A\cap C)-(B\cap C)$.

Deixamos ao cuidado do leitor a verificação de N 13) pela via até agora usada. Aliás, as duas igualdades serão deduzidas por um processo novo na secção seguinte.

Se considerarmos os conjuntos A_{n,p_n}, onde o índice natural n corre de 1 até um número $N\geqq 1$ (incluído) e onde, dado n, o índice natural p_n corre ou de 1 até um número $P_n\geqq 1$ (incluído) ou de 1 até $+\infty$, então podemos estabelecer a igualdade

N 14) $\bigcap\limits_{1\leqq n\leqq N}(\bigcup\limits_{p_n} A_{n,p_n})=\bigcup\limits_{p_1,p_2,\ldots,p_N}(A_{1,p_1}\cap A_{2,p_2}\cap\ldots\cap A_{N,p_N})$,

a qual refere a *propriedade distributiva da intersecção com respeito à união* e toma a forma duma relação bem conhecida se interpretarmos os símbolos A_{n,p_n} como grandezas numéricas e se substituirmos os símbolos da intersecção e da união pelos símbolos da multiplicação e da adição, respectivamente. Logo se vê que todo o ponto ω situado no primeiro membro de N 14) pertence simultâneamente a certos conjuntos A_{1,p_1}, $A_{2,p_2},\ldots,A_{N,p_N}$ e, consequentemente, pertence à união que figura no segundo membro de N 14). O leitor completa fàcilmente a dedução da fórmula N 14) mostrando que todo o ponto ω situado no segundo membro dela pertence também ao primeiro membro.

Suponhamos agora que cada n tirado de $1 \leqq n \leqq N$ torna disjuntos dois a dois os conjuntos A_{n,p_n} correspondentes. Então, fixadas de qualquer modo duas parcelas do segundo membro de N 14), elas não podem deixar de ser disjuntas, isso porque um dos conjuntos secantes da primeira sai disjunto do conjunto secante homólogo da outra. Logo a igualdade N 14) passa a assumir o aspecto particular

$$\text{N } 14') \quad \bigcap_{1 \leqq n \leqq N} (\sum_{p_n} A_{n,p_n}) = \sum_{p_1, p_2, \ldots, p_N} (A_{1,p_1} \cap A_{2,p_2} \cap \ldots \cap A_{N,p_N}).$$

* * *

Na continuação do nosso estudo vai deparar-se-nos mais duma vez a necessidade de, partindo duma colecção finita ou numerável de conjuntos de pontos ω, converter a sua união na soma doutros conjuntos de pontos ω, relacionados com os primeiros e formando também uma colecção finita ou numerável, ainda que a construção dos novos conjuntos faça incidir sobre os conjuntos dados um número finito ou uma infinidade numerável de operações de intersecção e de subtracção.

Nesta ordem de ideias apresentamos a fórmula

$$1) \quad A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots = A_1 + (A_1^- \cap A_2) + (A_1^- \cap A_2^- \cap A_3) + \cdots$$
$$\cdots + (A_1^- \cap \cdots \cap A_{n-1}^- \cap A_n) + \cdots,$$

a qual se justifica como segue: O uso do sinal $+$ no segundo membro é correcto porque, escolhido qualquer par de números naturais p e $q > p$, a parcela número p sai subconjunto de A_p e a parcela número q sai subconjunto de A_p^-, evidentemente disjunto de A_p; se o ponto ω pertencer ao segundo membro, está situado numa e *numa só* das suas parcelas, suponhamos na n-ésima, o que implica que $\omega \in A_n$ e, portanto, que ω pertence ao primeiro membro; se o ponto ω estiver situado no primeiro membro, existe um índice n tal que $\omega \in A_n$ e $\omega \in A_p^-$ para os índices $p < n$ que houver, facto este que implica que ω pertence à n-ésima parcela do segundo membro.

Observação. Há variantes da fórmula 1) que se obtêm, permutando as parcelas do primeiro membro e fazendo as alterações correspondentes no segundo membro (ver N II).

Recordando agora que $A_n \uparrow$ significa que a colecção dos conjuntos A_n é ascendente, podemos estabelecer um caso particular da fórmula 1), a saber

1') Se $A_n \uparrow$, então $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots = A_1 + (A_2 - A_1) + (A_3 - A_2) + \cdots + (A_n - A_{n-1}) + \cdots$.

Chega-se a 1') tendo em conta que $A_n \uparrow$ implica $A_n^- \downarrow$ e que nestas condições a parcela genérica do segundo membro de 1) dá, por causa de N IV, de N 9 *b)* e de N 12), a relação

$$A_1^- \cap \cdots \cap A_{n-1}^- \cap A_n = A_n \cap (A_1^- \cap \cdots \cap A_{n-1}^-) = A_n \cap A_{n-1}^- = A_n - A_{n-1}.$$

Vamos agora estabelecer outra fórmula concebida na mesma ordem de ideias que nos levou a 1). Com este fim, partimos do facto óbvio que todo o conjunto A verifica a relação $\Omega = A + A^-$. Logo, por causa de N 9), temos a igualdade

N 15) $\Omega = (A_1 + A_1^-) \cap (A_2 + A_2^-) \cap \cdots \cap (A_N + A_N^-)$,

cujo segundo membro pode ser desenvolvido, de acordo com N 14'), numa soma de 2^N intersecções (cada uma das quais fica com N conjuntos secantes). Ora bem, a união $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_N$ é, por causa de N 10 *a)*, igual ao complemento da intersecção $A_1^- \cap A_2^- \cap \cdots \cap A_N^-$ e este complemento é, por sua vez, igual ao desenvolvimento do segundo membro de N 15) privado da intersecção referida. Logo sai a fórmula

N 15') $\bigcup\limits_{1 \leqq n \leqq N} A_n = \sum\limits_{1 \leqq p \leqq 2^N - 1} A_p^0$,

onde os A_p^0 são os conjuntos diferentes (ou vazios) que podem obter-se, substituindo em $\bigcap\limits_{1 \leqq n \leqq N} B_n$ cada símbolo B_n ou por A_n ou por A_n^- e suprimindo $\bigcap\limits_{1 \leqq n \leqq N} A_n^-$ das intersecções assim formadas.

A fórmula N 15') diz respeito a uniões com um número finito N de parcelas. Para tais uniões, a hipótese $N > 1$ implica que o segundo membro de 1) tem um número menor de parcelas do que o segundo membro de N 15') e implica mais que as parcelas da soma de 1), à excepção da última, apresentam conjuntos secantes em número inferior a N ou seja inferior ao número de conjuntos secantes de qualquer parcela da soma de N 15'). Todavia, a fórmula N 15') proporciona certas vantagens sobre 1), porque a constituição do segundo membro de N 15') é insensível à ordem pela qual se dispõem os conjuntos unidos A_n e também porque, escolhido qualquer índice n entre 1 e N (extremos incluídos), as parcelas do segundo membro de N 15') em que figura o conjunto secante A_n dão uma soma igual a

$$(A_1+A_1^-)\cap\cdots\cap(A_{n-1}+A_{n-1}^-)\cap A_n\cap(A_{n+1}+A_{n+1}^-)\cap\cdots$$
$$\cdots\cap(A_N+A_N^-)=A_n,$$

enquanto a única parcela do segundo membro de 1) em que figura o conjunto secante A_n sai em geral distinta de A_n e só coincide com A_n se $n=1$ ou se $n>1$ e $A_1,\ldots,A_{n-1}$ forem disjuntos de A_n.

Observação. Se os conjuntos $A_1, A_2,\ldots,A_n,\ldots$ constituirem uma infinidade numerável e se, escolhido qualquer n entre 1 (incluído) e $+\infty$, fizermos corresponder a A_n o algarismo 1 e a A_n^- o algarismo 0, então os A'_p diferentes (ou vazios) que podem obter-se, substituindo em $\bigcap\limits_{1\leqq n<\infty} B_n$ cada símbolo B_n ou por A_n ou por A_n^- e suprimindo $\bigcap\limits_{1\leqq n<\infty} A_n^-$ das intersecções assim formadas, esses A'_p ficam em correspondência biunívoca com os números x do intervalo $0<x\leqq 1$ representados no sistema de numeração dual (e contados duas vezes ou uma conforme terminarem ou deixarem de terminar com uma sucessão de algarismos iguais). Como o conjunto dos números x referidos tem a potência do contínuo, concluímos que não está no âmbito das considerações presentes tentar estender a fórmula N 15') a uniões com uma infinidade numerável de parcelas.

6. **Indicatrizes.** Suponhamos que é dado o espaço $\Omega(\omega)$. Chama-se *função indicatriz* ou, abreviadamente, *indicatriz* a toda a função (numérica) I de argumento ω que goza da propriedade seguinte: Escolhido *qualquer* ponto $\omega \in \Omega$, corresponde um valor definido de $I(\omega)$, valor este que é igual ou a 0 ou a 1.(*)

O conceito de (função) indicatriz implica imediatamente a proposição seguinte:

N V) «Se I for uma (função) indicatriz definida num certo espaço, então qualquer número $\alpha > 0$ faz coincidir a função I^α com I.»

Fixada uma indicatriz I de argumento ω, ela determina o conjunto A dos pontos ω em que I toma o valor 1, conjunto esse que designamos por $A_I(\omega)$ ou, abreviadamente, por A_I. Inversamente, fixado um conjunto A de pontos ω, ele determina a indicatriz I de argumento ω cujo valor é 1 ou 0 conforme $\omega \in A$ ou $\omega \in A^-$, indicatriz essa que designamos por $I_A(\omega)$ ou, abreviadamente, por I_A.

É de notar que as correspondências estabelecidas são tais que a indicatriz I_A determina o conjunto A donde se partiu e que o conjunto A_I determina a indicatriz I donde se partiu. Por outras palavras, instituiu-se uma correspondência biunívoca, elemento por elemento, entre os conjuntos A que podem extrair-se de Ω e as indicatrizes I que podem definir-se em Ω.

Façamos agora a *convenção de escrita* seguinte: Quando se omite o argumento duma relação entre indicatrizes dependentes de ω, tal significa que a relação é válida para qualquer $\omega \in \Omega$. Nesta conformidade sai o par de relações

2) *a)* $A \subset B$ quando e só quando $I_A \leqq I_B$;
b) $A = B$ quando e só quando $I_A = I_B$.

Verificação de 2).—2 *a).* Se e só se $\omega \in A$ implica $\omega \in B$, então $I_A(\omega) = 1$ implica $I_B(\omega) = 1$.—2 *b*). Resulta directamente da

(*) Mencionamos, de passagem, que não nos convém seguir a prática dos autores que empregam o termo de função característica com o significado de (função) indicatriz, isso porque mais adiante vai aparecer-nos o mesmo termo com um significado totalmente diverso.

correspondência biunívoca entre conjuntos e indicatrizes e resulta também por intermédio de *a)*, já que N I afirma a equivalência entre a relação $A=B$ e o par de relações $A \subset B$ e $B \subset A$.

Segue uma fórmula com sete (ou oito) alíneas de que as duas primeiras caracterizam as indicatrizes dos conjuntos O e Ω e de que as cinco (ou seis) últimas descrevem como as indicatrizes definidas no espaço Ω acompanham as operações sobre os conjuntos que lhes correspondem.

3) *a)* $I_O=0$; *b)* $I_\Omega=1$; *c)* $I_{A^-}=1-I_A$; *d)* $I_{\bigcap_n A_n}=\prod_n I_{A_n}$;(*)
e) $I_{A-B}=I_A.(1-I_B)$; *f)* $I_{\sum_n A_n}=\sum_n I_{A_n}$;(**) *g)* $I_{\bigcup_n A_n}=$
$=I_{A_1}+(1-I_{A_1})\cdot I_{A_2}+(1-I_{A_1})\cdot(1-I_{A_2})\cdot I_{A_3}+\cdots+$
$+(1-I_{A_1})\cdots(1-I_{A_{n-1}})\cdot I_{A_n}+\cdots$;(***) *g')* se $A_n \uparrow$, então
$I_{\bigcup_n A_n}=I_{A_1}+(1-I_{A_1})\cdot I_{A_2}+(1-I_{A_2})\cdot I_{A_3}+\cdots+(1-I_{A_{n-1}})\cdot$
$.I_{A_n}+\cdots$.

Verificação de 3).—3 *a)*. Não há ponto $\omega \in O$.—3 *b)*. Não há ponto $\omega \in \Omega^-$. — 3 *c)*. Se $I_{A^-}(\omega)=1$, sai $\omega \in A^-$ e, portanto, $1-I_A(\omega)=1-0$; se $I_{A^-}(\omega)=0$, sai $\omega \in A$ e, portanto, $1-I_A(\omega)=0$. —3 *d)*. Se $I_{\bigcap_n A_n}(\omega)=1$, sai $\omega \in A_n$ para qualquer n e, portanto, $\prod_n I_{A_n}(\omega)=1$; se $I_{\bigcap_n A_n}(\omega)=0$, sai $\omega \in A_n^-$ para algum n e, portanto, $\prod_n I_{A_n}(\omega)=0$.—3 *e)*. Resulta de N 12), de 3 *d)* e de 3 *c)*.—3 *f)*. Se $I_{\sum_n A_n}(\omega)=0$, sai $\omega \in A_n^-$ para qualquer n e, portanto, $\sum_n I_{A_n}(\omega)=0$; se $I_{\sum_n A_n}(\omega)=1$, sai $\omega \in A_n^-$ para todos os valores de n à excepção dum e, portanto, $\sum_n I_{A_n}(\omega)=1$.—3 *g)*. Resulta de 1), 3 *f)*, 3 *d)* e 3 *c)*.—3 *g')*. Resulta de 1'), 3 *f)* e 3 *e)*.

(*) A expressão do segundo membro de 3 *d)* significa o produto ao longo do índice natural n das indicatrizes dos conjuntos A_n. Talvez valha a pena notar que este produto se identifica com $\inf_n I_{A_n}$ ou seja com o ínfimo ao longo do índice n das indicatrizes mencionadas.

(**) Em 3 *f)*, o primeiro somatório é de conjuntos e o outro é de funções.

(***) Talvez valha a pena notar que o segundo membro de 3 *g)* se identifica com $\sup_n I_{A_n}$ ou seja com o supremo ao longo do índice n das indicatrizes dos conjuntos A_n.

Vejamos alguns exemplos em que se aplicam indicatrizes.

Exemplo 1. A proposição N III e as relações 2 *b)*, 3 *d)* e 3 *a)* provam a proposição seguinte:

Dois conjuntos A e B são disjuntos quando e só quando se verifica a relação $I_A \cdot I_B = 0$.

Exemplo 2. De 3 *e)* e de 3 *d)* resulta que as indicatrizes do primeiro e do segundo membro de N 13 *a)* são, respectivamente, $I_A \cdot (1-I_B)$ e $I_A \cdot (1-I_A \cdot I_B)$. Deste facto, de N V e de 2 *b)* inferimos a igualdade N 13 *a)*.

Exemplo 3. As indicatrizes do primeiro e do segundo membro de N 13 *b)*, respectivamente, $I_A \cdot (1-I_B) \cdot I_C$ e $I_A \cdot I_C \cdot$ $\cdot (1-I_B \cdot I_C)$ saem iguais, isso por causa de N V. Portanto, a igualdade N 13 *b)* é correcta.

Exemplo 4. A indicatriz da diferença simétrica $(A-B)+$ $+(B-A)$ (ver fim da secção 3) é, por causa de 3 *f)*, de 3 *e)* e de N V, igual a $I_A \cdot (1-I_B) + I_B \cdot (1-I_A) = (I_A - I_B)^2 = |I_A - I_B|$.

7. Operações que relacionam conjuntos extraídos de espaços diferentes: Caso da operação de restrição. Não é raro haver necessidade de trabalhar simultâneamente com conjuntos extraídos de espaços diferentes e haver necessidade também de relacionar tais conjuntos dum modo apropriado à ocasião, quer dizer, por meio de operações convenientes. Nesta secção vamos apresentar um caso particular importante da situação referida.

Tomemos o espaço $\Omega(\omega)$ e seja Ω' um conjunto fixo e não-vazio extraído de Ω. Quando se tratam questões que incidem ùnicamente sobre pontos $\omega \in \Omega'$, então o espaço Ω pode afigurar-se excessivamente amplo como ambiente de estudo e pode ser preferível instituir Ω' em novo espaço ou, como também se diz, considerar Ω' como *subespaço* de Ω. Emprega-se o símbolo $\Omega|\Omega'$ para assinalar que Ω' é subespaço de Ω; no caso particular $\Omega' = \Omega$ sai evidentemente $\Omega|\Omega = \Omega$.

Se A for um conjunto qualquer de pontos ω, a parte de A situada em Ω' pode considerar-se como conjunto extraído quer do espaço Ω quer do subespaço $\Omega|\Omega'$. Na primeira eventualidade sai o conjunto-intersecção $A \cap \Omega'$ e na outra eventualidade sai um conjunto que se representa por $A|\Omega'$ e a que se chama conjunto *A dado* Ω' ou conjunto *A na hipótese (de se verificar)* Ω' ou conjunto *A sob a condição (de se verificar)* Ω' ou ainda *restrição* do conjunto A a Ω'. É óbvio que $A|\Omega = A$ e que pode fazer-se $A = \Omega$.

Escolhida qualquer função indicatriz definida em Ω, a passagem de Ω para $\Omega|\Omega'$ priva o seu domínio dos pontos $\omega \in \Omega'^-$ e conserva os seus valores nos pontos $\omega \in \Omega'$. Logo a indicatriz do conjunto $A|\Omega'$ identifica-se com a indicatriz de A para os pontos $\omega \in \Omega'$ e *não existe* para os pontos $\omega \in \Omega'^-$. Doutro lado, a relação 3 *d)* mostra que a indicatriz do conjunto $A \cap \Omega'$ se identifica com a indicatriz de A para os pontos $\omega \in \Omega'$ e *se anula* para os pontos $\omega \in \Omega'^-$. Vê-se assim que as indicatrizes podem facilitar a distinção formal entre os conceitos de intersecção do conjunto A com Ω' e de restrição do conjunto A a Ω'.

Chamamos *restrição* de A a Ω' à operação que transforma o conjunto A em $A|\Omega'$. Seguem algumas propriedades desta operação que vêm expressas por meio de fórmulas, nas quais as letras maiúsculas significam sempre conjuntos de pontos ω. Para começar, estabelecemos o terno de relações

4) *a)* $A|\Omega' = B|\Omega'$ quando e só quando $A \cap \Omega' = B \cap \Omega'$;
b) se $B \supset \Omega'$, então $(A \cap B)|\Omega' = A|\Omega'$;
c) se $\Omega' \supset \Omega''$, então $(A|\Omega')|\Omega'' = A|\Omega''$.

Verificação de 4).—4 *a)*. Resulta da própria definição da operação de restrição a Ω'.—4 *b)*. Primeiro N 9 *d)*, N 9 *c)* e N 9 *b)* dão $(A \cap B) \cap \Omega' = A \cap \Omega'$ e depois 4 *a)* prova a relação escrita.—4 *c)*. Mostra-se, por exemplo, com o auxílio de indicatrizes.

Seguem três relações, das quais a primeira refere a *propriedade distributiva da operação de restrição com respeito à operação de união,* a segunda refere a *propriedade distributiva da operação de restrição com respeito à subtracção* e a terceira refere a *permutabilidade das operações de restrição e de complementação.*

5) *a)* $\bigcup_n (A_n|\Omega') = (\bigcup_n A_n)|\Omega'$;(*) *b)* $(A|\Omega') - (B|\Omega') = (A-B)|\Omega'$;
c) $(A|\Omega')^- = A^-|\Omega'$.

Verificação de 5).—5 *a)*. Qualquer das relações $\omega \in \bigcup_n (A_n|\Omega')$ e $\omega \in (\bigcup_n A_n)|\Omega'$ é equivalente ao par de relações $\omega \in \Omega'$ e $\omega \in A_n$ para um certo n.—5 *b)*. Qualquer das relações $\omega \in (A|\Omega') - (B|\Omega')$ e $\omega \in (A-B)|\Omega'$ é equivalente ao terno de relações $\omega \in \Omega'$, $\omega \in A$ e $\omega \notin B$.—5 *c)*. Obtém-se de 5 *b)* substituindo A por Ω e B por A.

Exemplo 5. O leitor prove a *propriedade distributiva da operação de restrição com respeito à operação de intersecção,* expressa pela relação $\bigcap_n (A_n|\Omega') = (\bigcap_n A_n)|\Omega'$.

Exemplo 6. Se os conjuntos A_n forem disjuntos dois a dois, a relação 5 *a)* toma a forma particular $\sum_n (A_n|\Omega') = (\sum_n A_n)|\Omega'$. O caso $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\Omega' = \{1, 2\}$, $A_1 = \{1, 3\}$ e $A_2 = \{2, 3\}$ mostra que as restrições $A_n|\Omega'$ podem sair disjuntas duas a duas, mesmo que haja dois conjuntos A_n com pontos comuns.

8. A operação de multiplicação. Tomemos uma colecção finita ou numerável de espaços $\Omega_1(\omega_1), \Omega_2(\omega_2), \ldots, \Omega_n(\omega_n), \ldots$ e representemos por $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots) = \omega$ todo o *agrupamento ordenado* de pontos tais que o primeiro pertence a Ω_1, o segundo pertence a Ω_2, etc., o n—ésimo pertence a Ω_n, etc. Escolhido qualquer desses agrupamentos ω, consideramo-lo como ponto do espaço Ω formado pelos agrupamentos possíveis e consideramos ainda os pontos agrupados como *coordenadas* do ponto ω, sendo ω_1 a *primeira coordenada,* ω_2 a *segunda coordenada,* etc., ω_n *a* n*—ésima coordenada,* etc.

(*) Aqui o índice natural n tanto pode correr de 1 até um número N incluído, como pode correr de 1 até $+\infty$.

Dados os conjuntos $A_1 \subset \Omega_1, A_2 \subset \Omega_2, \ldots, A_n \subset \Omega_n, \ldots$, faça-se corresponder no espaço Ω o conjunto A dos pontos ω tais que $\omega_1 \in A_1, \omega_2 \in A_2, \ldots, \omega_n \in A_n, \ldots$. Nesta conformidade: Usa-se a igualdade simbólica

$$A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times \cdots \text{ ou, abreviadamente, } A = \prod_n A_n;$$

chama-se ao conjunto A *produto* dos conjuntos dados e a estes *factores*, sendo A_1 o *primeiro factor*, A_2 o *segundo factor*, etc., A_n o *n—ésimo factor*, etc.; denomina-se *multiplicação* dos conjuntos-factores a operação que transforma estes no conjunto-produto.

Um caso particular importante da multiplicação que acabamos de definir apresenta-se quando $A_n = \Omega_n$ para cada n, facto este que implica $A = \Omega$. Neste caso a igualdade simbólica $\Omega = \prod\limits_n \Omega_n$ ou, em escrita mais explícita, $\Omega(\omega) = \prod\limits_n \Omega_n(\omega_n)$ lê-se como segue: Ω ou $\Omega(\omega)$ é o *espaço-produto* de *espaços-factores* Ω_n ou $\Omega_n(\omega_n)$.

Observação. Alguns autores preferem os termos de *multiplicação cartesiana* e de *produto cartesiano* aos termos de multiplicação e de produto empregados no texto.

Aceitamos como óbvio que o produto A sai igual ao conjunto vazio $O \subset \Omega$ quando e só quando existe (pelo menos) um n tal que o factor A_n se identifica com o conjunto vazio $O_n \subset \Omega_n$. Assim e com a convenção $0 \cdot \infty = \infty \cdot 0 = 0$, podemos afirmar que o número de pontos do conjunto-produto resulta sempre igual ao produto dos números de pontos dos conjuntos-factores, circunstância esta que torna plausível a nomenclatura usada.

Uma consequência imediata das nossas definições e de NI é a proposição seguinte:

N VI) «Dados dois conjuntos-produto *não-vazios* A e A', ambos definidos no mesmo espaço-produto, tem-se a relação de inclusão $A \subset A'$ quando e só quando cada factor de A for subconjunto do factor homólogo de A'. Em particular, tem-se a relação $A=A'$ quando e só quando cada factor de A for igual ao factor homólogo de A'.»

Designemos por $I_{A_n}(\omega_n)$ $(n=1,2,\ldots)$ a indicatriz do conjunto $A_n \subset \Omega_n$ e designemos por $I_A(\omega)$ ou, mais explìcitamente, por $I_A(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots)$ a indicatriz do conjunto A igual ao produto dos A_n. Então, os argumentos $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$ satisfazem à identidade

$$I_{\prod\limits_n A_n}(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots) \equiv \prod_n I_{A_n}(\omega_n),\text{(*)}$$

a qual pode tomar, por omissão dos $\omega\omega$, a forma da igualdade entre funções

$$6) \quad I_{\prod\limits_n A_n} = \prod_n I_{A_n},\text{(*)}$$

esta bastante semelhante à relação 3 *d)*. Justifica-se 6) como segue: Se o segundo membro valer 1, sai $\omega_n \in A_n$ para cada n e o primeiro membro toma o valor 1; se o segundo membro valer 0, sai $\omega_n \in A_n^-$ para algum n e o primeiro membro toma o valor 0.

* * *

Passamos ao estudo das propriedades mais importantes da multiplicação dum número finito ou duma infinidade numerável de conjuntos.

Para começar, vamos ver, através dum exemplo, que a multiplicação referida *não goza em geral da propriedade comutativa*. Com efeito, seja $\Omega_1 = \{1,2\}$, $A_1 = \{1\}$, $\Omega_2 = \{1,2\}$ e $A_2 = \{2\}$; então, $A_1 \times A_2 = \{(1,2)\} \neq \{(2,1)\} = A_2 \times A_1$; mas, $\Omega_1 \times \Omega_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\} = \Omega_2 \times \Omega_1$, um caso excepcional de comutatividade.

A multiplicação referida fica, porém, gozando da *propriedade associativa* debaixo da convenção natural, embora não seja forçada, de que qualquer ponto $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots)$ do

(*) Aqui o primeiro produto é de conjuntos e o outro produto é de números ou funções.

espaço-produto não se altera se associarmos, as vezes que quisermos, coordenadas consecutivas do ponto no agrupamento ordenado correspondente. Neste trabalho *admitiremos sempre a associatividade da multiplicação de conjuntos.*

Consideremos apenas dois espaços-factores, Ω_1 e Ω_2, e suponhamos que Ω_1 contém os conjuntos A_1 e A'_1 e que Ω_2 contém os conjuntos A_2 e A'_2. Nesta conformidade, aparecem *duas modalidades da propriedade distributiva da multiplicação com respeito à subtracção,* as quais vêm registadas na fórmula seguinte (cuja primeira parte evidencia uma certa analogia com N 13 *b)*.

7) *a)* $(A_1 - A'_1)\times A_2 = (A_1\times A_2) - (A'_1\times A_2)$;
b) $A_1\times(A_2 - A'_2) = (A_1\times A_2) - (A_1\times A'_2)$.

Verificação de 7).—7 *a)*. Qualquer das relações $(\omega_1, \omega_2)\in \in (A_1 - A'_1)\times A_2$ e $(\omega_1, \omega_2)\in(A_1\times A_2)-(A'_1\times A_2)$ é equivalente às relações simultâneas $\omega_1\in A_1, \omega_1\notin A'_1$ e $\omega_2\in A_2$.—7 *b)*. Semelhante a 7 *a)*.

Consideremos agora um número finito qualquer N de espaços-factores $\Omega_n(n=1, 2, \ldots, N)$ e admitamos que, escolhido um n, o espaço Ω_n contém os conjuntos A_{n,p_n}, onde o índice natural p_n corre ou de 1 até um número P_n incluido ou de 1 até $+\infty$. Nesta conformidade, vale a igualdade

$$8)\quad \prod_{1\leqq n\leqq N}\left(\bigcup_{p_n} A_{n,p_n}\right) = \bigcup_{p_1, p_2, \ldots, p_N}(A_{1,p_1}\times A_{2,p_2}\times\cdots\times A_{N,p_N}),$$

a qual refere a *propriedade distributiva da multiplicação com respeito à união* e apresenta uma semelhança formal acentuada com N 14). Para verificar a igualdade 8), tome-se em conta que um ponto $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots)$ pertence a qualquer dos seus membros quando e só quando valem simultâneamente as relações $\omega_1\in A_{1,p_1}$ para algum p_1, $\omega_2\in A_{2,p_2}$ para algum p_2, etc., $\omega_N\in A_{N,p_N}$ para algum p_N.

Caso cada n tirado de $1\leqq n\leqq N$ torne disjuntos dois a dois os conjuntos A_{n,p_n} correspondentes, os produtos $A_{1,p_1}\times \times A_{2,p_2}\times\cdots\times A_{N,p_N}$ saem também disjuntos dois a dois e a igualdade 8) toma o aspecto particular

$$8') \quad \prod_{1 \leqq n \leqq N} (\sum_{p_n} A_{n,p_n}) = \sum_{p_1, p_2, \ldots, p_N} (A_{1,p_1} \times A_{2,p_2} \times \cdots \times A_{N,p_N}),$$

o qual lembra N 14').

Se tivermos $A_n = A'_n + A''_n$ para cada n, então a igualdade 8') e a proposição N VI conduzem à relação(*)

$$9) \quad (\prod_{1 \leqq n \leqq N} A_n) - (\prod_{1 \leqq n \leqq N} A'_n) = \sum_{1 \leqq p \leqq 2^N - 1} A^0_p \subset$$
$$\subset \bigcup_{1 \leqq m \leqq N} (A_1 \times \cdots \times A_{m-1} \times A''_m \times A_{m+1} \times \cdots \times A_N),$$

onde os A^0_p são os conjuntos diferentes (ou vazios) que podem obter-se, substituindo em $\prod_{1 \leqq n \leqq N} B_n$ cada símbolo B_n ou por A'_n ou por A''_n e suprimindo $\prod_{1 \leqq n \leqq N} A'_n$ dos produtos assim formados. Na hipótese $A_n = \Omega_n$ para cada n, o primeiro membro de 9) passa a ser $(\prod_{1 \leqq n \leqq N} A''^{-}_n)^{-}$.

Segue uma proposição que pode deduzir-se das considerações produzidas nesta secção e de que nos serviremos na continuação do nosso estudo.

N VII) «Suponha-se que o índice natural n corre de 1 até um número N incluído e que o índice natural p corre ou de 1 até um número P incluído ou de 1 até $+\infty$; a cada n faça-se corresponder um espaço contendo os conjuntos não-vazios A_n e $A_{n,p}$. Então, a hipótese $\prod_n A_n = \bigcup_p (\prod_n A_{n,p})$ implica a relação seguinte: $\bigcup_p A_{n,p} = A_n$ para cada n admissível.»

Demonstração de N VII. Seja qual for p, a hipótese do enunciado dá, por causa de N II, de N 7 *a)* e de N VI, a relação $A_{n,p} \subset A_n$ para cada n; logo $\bigcup_p A_{n,p} \subset A_n$ para cada n. Doutro lado, a fórmula 8) dá $\prod_n (\bigcup_p A_{n,p}) \supset \bigcup_p (\prod_n A_{n,p})$, donde, por causa da hipótese do enunciado e por causa de N VI, a relação $\bigcup_p A_{n,p} \supset A_n$ para cada n. Fica assim completada a nossa demonstração.

(*) Os termos do segundo membro de 9) devem ser agrupados convenientemente para que N VI permita a passagem ao terceiro membro.

Passamos a considerar uma colecção finita ou numerável de espaços-factores $\Omega_n (n=1,2,\ldots)$. Se o índice natural p correr ou de 1 até um número P incluído ou de 1 até $+\infty$ e se a cada n corresponderem conjuntos $A_{n,p} \subset \Omega_n$, então vale uma propriedade que podemos classificar de *permutabilidade entre as operações de multiplicação e de intersecção* e que vem expressa através da igualdade seguinte:

$$10) \quad \prod_n (\bigcap_p A_{n,p}) = \bigcap (\prod_n A_{n,p}).$$

Verificação de 10). Qualquer dos dois membros de 10) tem, por causa de 6) e de 3 *d)*, uma indicatriz que é igual ao produto ao longo dos índices n e p das indicatrizes dos conjuntos $A_{n,p}$. Sendo assim, 2 *b)* prova 10).

* * *

Por fim, dois exemplos.

Exemplo 7. São dados os espaços-factores $\Omega_n (n=1,2,\ldots,N)$ e os conjuntos $A_n \subset \Omega_n$ e $A'_n \subset \Omega_n$. Nesta conformidade, vamos generalizar a primeira parte da relação 9) de modo que possa aplicar-se a um diminuidor arbitrário. Pois bem, por causa de N 13 *a)* e de 10), sai $(\prod_n A_n) - (\prod_n A'_n) = (\prod_n A_n) - [\prod_n (A_n \cap A'_n)]$ de modo que 9) dá a igualdade

$$9') \quad (\prod_{1 \leq n \leq N} A_n) - (\prod_{1 \leq n \leq N} A'_n) = \sum_{1 \leq p \leq 2^N - 1} A_p^\circ,$$

onde os A_p° são os conjuntos diferentes (ou vazios) que podem obter-se, substituindo em $\prod_{1 \leq n \leq N} B_n$ cada símbolo B_n ou por $A_n \cap A'_n$ ou por $A_n - A'_n$ e suprimindo $\prod_{1 \leq n \leq N} (A_n \cap A'_n)$ dos produtos assim formados.

Exemplo 8. Quando $\Omega(\omega)$ é o espaço dos números reais finitos, preferimos as letras X e x às letras Ω e ω, respectivamente. Chamamos *recta real* ou *espaço real a uma dimensão* ao espaço $X(x)$ ou X descrito. Este pode representar-se geomètricamente por meio dum eixo real, quer dizer por meio duma recta dotada duma origem, dum sentido de percurso e duma escala de comprimentos de segmentos; isso, porque haverá correspondência biunívoca entre os pontos próprios da recta representativa e as abscissas x desses pontos. — Dada uma colecção finita ou numerável de rectas reais $X_n(x_n)$ $(n=1, 2, \ldots)$, ponha-se $X(x) = \prod_n X_n(x_n)$ ou, em escrita abreviada, $X = \prod_n X_n$. Neste caso damos ao produto o nome de *espaço real a tantas dimensões quantos os factores;* o espaço real a duas dimensões denomina-se também *plano real.* Se as dimensões dum espaço real forem duas (ou três), podemos representá-lo geomètricamente por meio dum espaço euclideano a duas (ou três) dimensões dotado dum sistema de eixos coordenados (em geral ortogonais) figurativos das rectas-factores; isso, porque haverá correspondência biunívoca entre os pontos próprios do espaço representativo e os agrupamentos ordenados das coordenadas desses pontos.

9. As operações de projecção e de marginação. Cilindros. Tomemos o espaço real a três dimensões $X = X_1 \times X_2 \times X_3$ descrito no exemplo 8. Então, é absurdo admitir que o conjunto com 3 pontos $A = \{(1,1,2),(1,2,2),(2,1,2)\} \subset X$ possa resultar da multiplicação de conjuntos $A_1 \subset X_1$, $A_2 \subset X_2$ e $A_3 \subset X_3$, pois, se tal sucedesse, qualquer dos dois conjuntos A_1 e A_2 compor-se-ia dos pontos 1 e 2 e o conjunto A_3 seria formado pelo único ponto 2, factos estes que obrigariam A a ter 4 pontos. Todavia, a hipótese da associatividade da multiplicação implica $X = (X_1 \times X_2) \times X_3$ de modo que A sai igual ao produto do conjunto $\{(1,1),(1,2),(2,1)\} \subset X_1 \times X_2$ pelo conjunto $\{2\} \subset X_3$.

O que precede mostra que conjuntos extraídos dum espaço-produto não são necessàriamente produtos de conjuntos extraídos dos espaços-factores. É esta a razão por que o estudo subsequente não se limita à análise de casos mais ou menos triviais.

Dado o espaço-produto $\Omega(\omega) = \prod_n \Omega_n(\omega_n)$, de dois ou mais factores, reparta-se a colecção dos valores n possíveis por duas colecções não-vazias, a primeira constituída pelos valores $h, i>h, j>i, \ldots$ e a outra constituída pelos valores restantes $r, s>r, t>s, \ldots$ (*). Caso suprimamos as coordenadas $\omega_h, \omega_i, \omega_j, \ldots$ em cada ponto $\omega \in \Omega$, os pontos resultantes $(\omega_r, \omega_s, \omega_t, \ldots) = \omega_{(h,i,j,\ldots)}$ formam o espaço $\Omega_r \times \Omega_s \times \Omega_t \times \cdots = \Omega_{(h,i,j,\ldots)}$, o qual fica inteiramente definido pelos índices r, s, $t, \ldots$, tomados por ordem, e, portanto, não se altera se permutarmos os índices h, i, $j, \ldots$ de qualquer modo ou se associarmos, as vezes que quizermos, um número finito ou infinito desses índices, supostos consecutivos, na sucessão correspondente. Ao espaço $\Omega_{(h,i,j,\ldots)}$ chamamos, por um motivo que veremos mais adiante, *espaço marginal de* Ω *com respeito a* $\Omega_h \times \Omega_i \times \Omega_j \times \cdots$.

Posto isso, caso suprimamos as coordenadas números h, i, $j, \ldots$ em cada ponto dum conjunto não-vazio arbitrário $A \subset \Omega$, fica um conjunto bem determinado $A_{r,s,t,\ldots} = A_{(h,i,j,\ldots)} \subset \Omega_{(h,i,j,\ldots)}$. Chamamos *projecção de* A *sobre* $\Omega_{(h,i,j,\ldots)}$ (*e segundo a direcção de* $\Omega_h \times \Omega_i \times \Omega_j \times \cdots$) não só à operação que transforma A em $A_{(h,i,j,\ldots)}$, como também ao resultado desta operação. É então óbvio que a projecção de Ω sobre $\Omega_{(h,i,j,\ldots)}$ sai igual ao próprio espaço marginal $\Omega_{(h,i,j,\ldots)}$ e, mais geralmente, que a projecção do produto $A = \prod_n A_n$ sobre $\Omega_{(h,i,j,\ldots)}$ satisfaz à igualdade $A_{(h,i,j,\ldots)} = A_r \times A_s \times A_t \times \cdots$.

Completamos as definições dadas, *introduzindo a convenção* que a projecção $O_{(h,i,j,\ldots)}$, correspondente ao conjunto vazio $O \subset \Omega$, se identifica com o conjunto vazio de $\Omega_{(h,i,j,\ldots)}$.

Ora bem, seja qual for o conjunto $A \subset \Omega$ (vazio ou não-vazio) e sejam quais forem as determinações dos argumentos $\omega_r, \omega_s, \omega_t, \ldots$, sai sempre a igualdade

$$\sup_{\omega_h \in \Omega_h, \omega_i \in \Omega_i, \omega_j \in \Omega_j, \ldots} I_A(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots) = I_{A_{(h,i,j,\ldots)}}(\omega_r, \omega_s, \omega_t, \ldots);$$

quer dizer, a omissão dos argumentos $\omega\omega$ dá a igualdade entre funções

(*) Excepcionalmente, a primeira (ou a segunda) colecção parcial terá quer apenas três números h, i e j (ou r, s e t) quer só dois números h e i (ou r e s) quer um único número h (ou r).

$$11) \quad \sup_{\omega_h \in \Omega_h, \omega_i \in \Omega_i, \omega_j \in \Omega_j, \ldots} I_A = I_{A_{(h,i,j,\ldots)}}.$$

Verificação de 11). Fixem-se de qualquer modo as coordenadas ω_r, ω_s, $\omega_t, \ldots$. Então, se o segundo membro de 11) valer 1, o conjunto A não pode ser vazio, sai $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots) \in A$ para alguma escolha de $\omega_h \in \Omega_h$, $\omega_i \in \Omega_i$, $\omega_j \in \Omega_j, \ldots$ e, portanto, o primeiro membro toma o valor 1; se o segundo membro de 11) valer 0, sai $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots) \in A^-$ para qualquer escolha de $\omega_h \in \Omega_h$, $\omega_i \in \Omega_i$, $\omega_j \in \Omega_j, \ldots$ e, portanto, o primeiro membro toma o valor 0. Está assim terminada a verificação de 11).

Uma consequência imediata de 11) é a seguinte: Caso o espaço $\Omega_h \times \Omega_i \times \Omega_j \times \ldots$ contenha mais dum ponto, conjuntos A diferentes podem dar a mesma projecção sobre $\Omega_{(h,i,j,\ldots)}$. Por outras palavras, a operação de projecção sobre $\Omega_{(h,i,j,\ldots)}$ é *uniforme,* mas *não é univalente.*

Doutro lado, é imediato que o supremo de I_A ao longo dos ω_h, ω_i, $\omega_j, \ldots$ possíveis sai igual à iteração dos supremos de I_A primeiro ao longo dos ω_h, depois ao longo dos ω_i, em seguida ao longo dos ω_j, etc. e que tal iteração de supremos não se ressente se permutarmos os seus passos de qualquer modo ou se associarmos, as vezes que quisermos, um número finito ou infinito de passos consecutivos num só passo mais amplo. Por causa do exposto e por causa de 11) e de 2 *b),* podemos afirmar que projectar A sobre $\Omega_{(h,i,j,\ldots)}$ é a mesma coisa que projectar A sobre $\Omega_{(h)}$, projectar depois o resultado da primeira operação ou seja $A_{(h)}$ sobre $\Omega_{(h,i)}$, projectar em seguida o resultado da operação anterior ou seja $A_{(h,i)}$ sobre $\Omega_{(h,i,j)}$, etc. e podemos afirmar mais que as operações de eliminação separada de cada uma das coordenadas ω_h, ω_i, $\omega_j, \ldots$ gozam das propriedades comutativa e associativa.

Vejamos agora mais algumas propriedades da operação de projecção.

Considere-se uma colecção finita ou numerável formada por conjuntos A, A', $A'', \ldots$, todos extraídos do espaço Ω. Nesta conformidade, pode estabelecer-se o par de relações seguinte, onde a segunda relação traduz a *propriedade dis-*

tributiva da operação de projecção com respeito à operação de união.

12) *a)* $A \subset A'$ implica $A_{(h,i,j,\ldots)} \subset A'_{(h,i,j,\ldots)}$;

b) $(A \cup A' \cup A'' \cup \ldots)_{(h,i,j,\ldots)} = A_{(h,i,j,\ldots)} \cup A'_{(h,i,j,\ldots)} \cup$
$\cup A''_{(h,i,j,\ldots)} \cup \cdots$.

Verificação de 12).—12 *a).* De $A \subset A'$ tiramos primeiro, por causa de 2 *a)*, que $\sup\limits_{\omega_h \in \Omega_h,\, \omega_i \in \Omega_i, \ldots} I_A \leqq \sup\limits_{\omega_h \in \Omega_h,\, \omega_i \in \Omega_i, \ldots} I_{A'}$ e depois, por causa de 11), que $A_{(h,i,j,\ldots)} \subset A'_{(h,i,j,\ldots)}$.—12 *b).* Parta-se da igualdade elementar $\sup\limits_{\omega_h \in \Omega_h, \omega_i \in \Omega_i, \ldots} [\sup(I_A, I_{A'}, \ldots)] =$
$= \sup(\sup\limits_{\omega_h \in \Omega_h, \omega_i \in \Omega_i, \ldots} I_A, \sup\limits_{\omega_h \in \Omega_h, \omega_i \in \Omega_i, \ldots} I_{A'}, \ldots)$ e aplique-se a nota a 3 *g)*, a igualdade 11) e a relação 2 *b)*.

Por fim, dois exemplos.

Exemplo 9. Tomem-se o plano real $X = X_1 \times X_2$ (exemplo 8) e nele os dois conjuntos elementares disjuntos $A = \{(1,1)\}$ e $A' = \{(1,2)\}$. Sai $A_{(2)} = \{1\} = A'_{(2)}$; portanto, $A_{(2)} \subset A'_{(2)}$, $A_{(2)} - A'_{(2)} = O_{(2)} \neq \{1\} = (A - A')_{(2)}$ e $(A \cap A')_{(2)} = O_{(2)} \neq \{1\} = A_{(2)} \cap A'_{(2)}$. Este exemplo mostra três coisas: 1.º $A_{(h,i,j,\ldots)} \subset A'_{(h,i,j,\ldots)}$ não conduz necessàriamente a $A \subset A'$. 2.º As projecções de dois conjuntos disjuntos sobre o mesmo espaço marginal podem ficar com pontos comuns, ao passo que a definição de projecção impede que fiquem disjuntas as projecções de dois conjuntos com pontos comuns sobre o mesmo espaço marginal. 3.º Não se pode assegurar a propriedade distributiva da operação de projecção nem com respeito à subtracção nem com respeito à intersecção.

Exemplo 10. Caso se faça a representação geométrica do plano real $X = X_1 \times X_2$ pelo modo explicado no exemplo 8, então as projecções de conjuntos extraídos de X sobre a recta real marginal $X_{(2)} = X_1$ (ou $X_{(1)} = X_2$) e segundo a direcção da recta real X_2 (ou X_1) adquirem os significados bem conhecidos da geometria plana elementar. Semelhantemente, caso se faça a representação geométrica do espaço real a três dimensões $X = X_1 \times X_2 \times X_3$ pelo modo indicado no exemplo 8, as projecções de conjuntos extraídos de X quer sobre o plano real marginal $X_{(3)}=X_1\times X_2$ e segundo a direcção da recta real X_3 quer sobre a recta real marginal $X_{(2,3)}=X_1$ e segundo a direcção do plano real $X_2\times X_3$, assim como as projecções semelhantes que podem obter-se por mudança dos índices, todas essas projecções adquirem os significados bem conhecidos da geometria elementar no espaço.

* * *

Muitas vezes há conveniência em beneficiar a operação de projecção com novas propriedades úteis, limitando, para o efeito, a sua aplicação a conjuntos seleccionados dum modo especial. Nesta ordem de ideias, apresentamos a *definição* seguinte:

Postas as mesmas hipóteses que nos conduziram ao conceito de espaço marginal, um conjunto $C\subset\Omega$ diz-se um *cilindro de geratrizes paralelas a* $\Omega_h, \Omega_i, \Omega_j, \ldots$, quando (e só quando) pertencem ambos a C ou a C^- quaisquer dois pontos de Ω que tenham as mesmas coordenadas $\omega_r, \omega_s, \omega_t, \ldots$ e que se distingam apenas por uma ou mais das coordenadas ω_h, ω_i, $\omega_j, \ldots$.

A definição dada permite concluir sem esforço que C é cilindro de geratrizes paralelas a $\Omega_h, \Omega_i, \Omega_j, \ldots$, quando e só quando a indicatriz $I_C(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots)$ ou, em escrita abreviada, I_C for independente da escolha de $\omega_h\in\Omega_h, \omega_i\in\Omega_i, \omega_j\in\Omega_j, \ldots$. Deste facto e da fórmula 3) tiramos a proposição seguinte:

N VIII) «Dado o espaço-produto $\Omega=\Omega_1\times\Omega_2\times\Omega_3\times\cdots$, saem cilindros de geratrizes paralelas aos espaços-factores $\Omega_h, \Omega_i, \Omega_j, \ldots$ não só o conjunto $O\subset\Omega$ e o próprio espaço Ω, como também qualquer conjunto que seja intersecção, união ou diferença dum número finito ou duma infinidade numerável de cilindros de geratrizes paralelas a $\Omega_h, \Omega_i, \Omega_j, \ldots$.»

Quando se projecta um cilindro C de geratrizes paralelas aos espaços-factores $\Omega_h, \Omega_i, \Omega_j, \ldots$ sobre o espaço marginal $\Omega_{(h,i,j,\ldots)}$, o conjunto-projecção $C_{r,s,t,\ldots}=C_{(h,i,j,\ldots)}$ denomina-se também *base ou conjunto marginal de* C *no espaço*

$\Omega_{(h,i,j,\ldots)}$ e a operação de projecção denomina-se também *marginação de C com respeito a* $\Omega_h \times \Omega_i \times \Omega_j \times \cdots$. Quanto ao cilindro C, diz-se *elementar* no caso particular de ter uma base elementar, quer dizer uma base formada por um só ponto.

Consideremos um cilindro qualquer C de geratrizes paralelas a $\Omega_h, \Omega_i, \Omega_j, \ldots$. Por causa das propriedades da indicatriz de C e por causa das propriedades gerais da operação de projecção, podemos afirmar que marginar C com respeito a $\Omega_h \times \Omega_i \times \Omega_j \times \cdots$ é a mesma coisa que marginar C com respeito a Ω_h, marginar depois o resultado da primeira operação ou seja o cilindro $C_{(h)}$ de geratrizes paralelas a $\Omega_i, \Omega_j, \ldots$ com respeito a Ω_i, marginar em seguida o resultado da operação anterior ou seja o cilindro $C_{(h,i)}$ de geratrizes paralelas a $\Omega_j, \ldots$ com respeito a Ω_j, etc. e podemos afirmar mais que as operações especiais de eliminação separada de cada uma das coordenadas $\omega_h, \omega_i, \omega_j, \ldots$ aqui descritas gozam das propriedades comutativa e associativa.

Tomando agora em conta a índole da indicatriz de C, logo se vê que quaisquer determinações dos argumentos $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ satisfazem à igualdade

$$\sup_{\omega_h \in \Omega_h, \omega_i \in \Omega_i, \omega_j \in \Omega_j, \ldots} I_C(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots) \cdot I_{\Omega_h \times \Omega_i \times \Omega_j \times \cdots}(\omega_h, \omega_i, \omega_j, \ldots) = \\ = I_C(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots).$$

Por isso e por causa de 11), a indicatriz do cilindro $C \subset \Omega$ de geratrizes paralelas a $\Omega_h, \Omega_i, \Omega_j, \ldots$ e a indicatriz da base correspondente $C_{(h,i,j,\ldots)} \subset \Omega_{(h,i,j,\ldots)}$ estão relacionadas pela igualdade entre funções

$$11') \qquad I_C = I_{C_{(h,i,j,\ldots)}} \cdot I_{\Omega_h \times \Omega_i \times \Omega_j \times \cdots},$$

onde o último factor do segundo membro é idênticamente igual a 1.

Uma consequência imediata de 11') é que os cilindros C e C', ambos de geratrizes paralelas a $\Omega_h, \Omega_i, \Omega_j, \ldots$, saem iguais, quando e só quando forem iguais as bases $C_{(h,i,j,\ldots)}$ e $C'_{(h,i,j,\ldots)}$. Por outras palavras, a marginação com respeito a $\Omega_h \times \Omega_i \times \Omega_j \times \cdots$ é uma operação *uniforme e univalente.*

Outra consequência fácil de 11') é que *todo o* conjunto $D \subset \Omega_{(h,i,j,\ldots)}$ resulta da marginação com respeito a $\Omega_h \times \Omega_i \times \times \Omega_j \times \cdots$ do cilindro de indicatriz igual ao produto da indicatriz de D pela indicatriz de $\Omega_h \times \Omega_i \times \Omega_j \times \cdots$.

Ora bem, se substituirmos os conjuntos $A, A', A'', \ldots$ da fórmula 12) pelos cilindros $C, C', C'', \ldots$, todos de geratrizes paralelas a $\Omega_h, \Omega_i, \Omega_j, \ldots$, então 12) cede o lugar ao par de relações seguinte, onde a segunda relação traduz a *propriedade distributiva da marginação com respeito à união e,* em particular, *com respeito à adição.*

12') *a)* $C \subset C'$, quando e só quando $C_{(h,i,j,\ldots)} \subset C'_{(h,i,j,\ldots)}$;
b) $(C \cup C' \cup C'' \cup \cdots)_{(h,i,j,\ldots)} = C_{(h,i,j,\ldots)} \cup C'_{(h,i,j,\ldots)} \cup \cup C''_{(h,i,j,\ldots)} \cup \cdots$, podendo substituir-se o sinal $\cup$ pelo sinal $+$, quando e só quando as bases $C_{(h,i,j,\ldots)}, C'_{(h,i,j,\ldots)}, C''_{(h,i,j,\ldots)}, \ldots$ forem disjuntas duas a duas.

Verificação de 12'). — 12' *a).* Resulta de 2 *a)* e de 11'). — 12' *b).* Atendendo a 12 *b)* e a 2.º do exemplo 9, basta mostrar que dois cilindros disjuntos C e C' produzem bases disjuntas ou, equivalentemente, que a ausência de pontos de Ω que confiram o valor 1 a ambas as indicatrizes I_C e $I_{C'}$ implica a ausência de pontos de $\Omega_{(h,i,j,\ldots)}$ que confiram o valor 1 a ambas as indicatrizes $I_{C_{(h,i,j,\ldots)}}$ e $I_{C'_{(h,i,j,\ldots)}}$. Logo 11') prova 12' *b).*

Passamos para uma fórmula que refere a *propriedade distributiva da marginação com respeito à subtracção.*

13) *a)* $(C - C')_{(h,i,j,\ldots)} = C_{(h,i,j,\ldots)} - C'_{(h,i,j,\ldots)}$;
b) $(C^{-})_{(h,i,j,\ldots)} = (C_{(h,i,j,\ldots)})^{-}$.

Verificação de 13). — 13 *a).* Atendendo a N VIII, a 11') e a 3 *e)*, podemos escrever
$I_{\Omega_h \times \Omega_i \times \cdots} \cdot I_{(C-C')_{(h,i,j,\ldots)}} = I_C \cdot (1 - I_{C'}) = I_{\Omega_h \times \Omega_i \times \cdots} \cdot I_{C_{(h,i,j,\ldots)} - C'_{(h,i,j,\ldots)}}$.
Logo 2 *b)* prova 13 *a).* — 13 *b).* Trata-se do caso particular de 13 *a)* que se obtém, mudando C em Ω e C' em C.

Seguem dois exemplos.

Exemplo 11. O leitor prove a *propriedade distributiva da marginação com respeito à operação de intersecção,* expressa pela relação

$$(C \cap C' \cap C'' \cap \cdots)_{(h,i,j,\ldots)} = C_{(h,i,j,\ldots)} \cap C'_{(h,i,j,\ldots)} \cap C''_{(h,i,j,\ldots)} \cap \cdots.$$

Exemplo 12. Caso se faça a representação geométrica do plano real $X = X_1 \times X_2$ pelo modo explicado no exemplo 8, então os cilindros de geratrizes paralelas à recta-factor X_2 (ou X_1), extraídos de X, passam a ser lugares de rectas paralelas a X_2 (ou X_1) e as bases desses cilindros na recta marginal $X_{(2)} = X_1$ (ou $X_{(1)} = X_2$) passam a ser as intersecções (no sentido geométrico da palavra) dos lugares referidos com a recta marginal correspondente. Semelhantemente, caso se faça a representação geométrica do espaço real a três dimensões $X = X_1 \times X_2 \times X_3$ pelo modo indicado no exemplo 8, os cilindros de geratrizes paralelas à recta-factor X_3 (ou X_2 ou X_1), extraídos de X, e as bases desses cilindros no plano marginal $X_{(3)} = X_1 \times X_2$ (ou $X_{(2)} = X_1 \times X_3$ ou $X_{(1)} = X_2 \times X_3$) adquirem os significados bem conhecidos da geometria elementar no espaço.

Observação final. Permutando coordenadas e recorrendo à hipótese da associatividade da multiplicação, é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots) \in \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3 \times \cdots$ e os pontos $(\omega_{(h,i,j,\ldots)}, (\omega_h, \omega_i, \omega_j, \ldots)) \in$ $\in \Omega_{(h,i,j,\ldots)} \times (\Omega_h \times \Omega_i \times \Omega_j \times \cdots)$. Caso $C \subset \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3 \times \cdots$ seja um cilindro de geratrizes paralelas a $\Omega_h, \Omega_i, \Omega_j, \ldots$, a correspondência referida transforma C no produto da base $C_{(h,i,j,\ldots)}$ pelo espaço $\Omega_h \times \Omega_i \times \Omega_j \times \cdots$ e vice-versa, conforme pode ver-se como segue: Ou trabalha-se directamente com as definições competentes ou aplica-se 11') ao (cilindro) transformado de C e usam-se, em seguida, as relações 6) e 2 *b)*.

10. A operação de corte. Consideremos o espaço-produto $\Omega(\omega) = \prod_n \Omega_n(\omega_n)$, de dois ou mais factores, e repartamos a colecção dos valores de n possíveis por duas colecções não-vazias, a primeira constituída pelos valores $h, i > h, j > i, \ldots$ e a outra constituída pelos valores restantes $r, s > r, t > s, \ldots$ (*). Escolhido qualquer conjunto $A \subset \Omega$, fixe-se o ponto $\omega^0_{(r,s,t,\ldots)} = (\omega^0_h, \omega^0_i, \omega^0_j, \ldots) \in \Omega_{(r,s,t,\ldots)}$, intersecte-se A com o cilindro elementar E de base $\{\omega^0_{(r,s,t,\ldots)}\}$ e de geratrizes paralelas a $\Omega_r, \Omega_s, \Omega_t, \ldots$ e projecte-se o conjunto $A \cap E$ sobre $\Omega_{(h,i,j,\ldots)}$. Representamos a projecção $(A \cap E)_{(h,i,j,\ldots)} \subset \Omega_{(h,i,j,\ldots)}$ pelo símbolo $A/\omega^0_{(r,s,t,\ldots)}$ ou ainda pelo símbolo $A/(\omega^0_h, \omega^0_i, \omega^0_j, \ldots)$ e chamamos *corte feito no conjunto A pelo ponto* $\omega^0_{(r,s,t,\ldots)}$ não só à operação que transforma A em $A/\omega^0_{(r,s,t,\ldots)}$, como também ao resultado desta operação.

As considerações precedentes, a relação 3 *d)* e as igualdades 11') e 11) mostram que se verifica a identidade

$$I_{A/\omega^0_{(r,s,\ldots)}}(\omega_r, \omega_s, \ldots) \equiv$$

$$\equiv \sup_{\omega_h \in \Omega_h, \omega_i \in \Omega_i, \ldots} [I_A(\omega_1, \omega_2, \ldots) \cdot I_{\{\omega^0_{(r,s,\ldots)}\}}(\omega_h, \omega_i, \ldots) \cdot I_{\Omega_{(h,i,\ldots)}}(\omega_r, \omega_s, \ldots)],$$

a qual se transforma, por um cálculo elementar, em

$$14) \qquad I_{A/(\omega^0_h, \omega^0_i, \omega^0_j, \ldots)}(\omega_r, \omega_s, \omega_t, \ldots) \equiv$$

$$\equiv [I_A(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots)]_{\omega_h = \omega^0_h, \omega_i = \omega^0_i, \omega_j = \omega^0_j, \ldots}.$$

A fórmula 14) permite tirar várias conclusões.

Para começar, o segundo membro de 14) não se altera se, em lugar de impormos as igualdades $\omega_h = \omega^0_h, \omega_i = \omega^0_i, \omega_j = \omega^0_j, \ldots$ todas duma só vez, as impusermos ou uma a uma e por qualquer ordem ou por blocos tais que cada um deles seja composto por igualdades consecutivas (em número finito ou infinito). Por outras palavras, assiste-nos o direito de afirmar que cortar A pelo ponto $(\omega^0_h, \omega^0_i, \omega^0_j, \ldots)$ é a mesma coisa que cortar primeiro A pelo ponto ω^0_h, cortar depois o resultado da primeira operação ou seja A/ω^0_h pelo ponto ω^0_i, cortar em

---

(*) Repete-se a nota (*) à página 35.

seguida o resultado da operação anterior ou seja $A/(\omega_h^0, \omega_i^0)$ pelo ponto ω_j^0, etc. e podemos afirmar mais que as operações de fixação separada de cada uma das coordenadas $\omega_h^0, \omega_i^0, \omega_j^0, \ldots$ gozam das propriedades comutativa e associativa.

Uma consequência fácil de 14) é a proposição seguinte:

N IX) «Dados um conjunto A contido no espaço-produto $\prod_n \Omega_n(\omega_n)$ e o corte feito em A pelo ponto $(\omega_h^0, \omega_i^0, \omega_j^0, \ldots)$ situado no espaço $\Omega_h \times \Omega_i \times \Omega_j \times \cdots$, então o ponto $(\omega_1^0, \omega_2^0, \ldots, \omega_n^0, \ldots) = \omega^0$ pertence a A, quando e só quando pertencer ao corte o ponto que resulta de ω^0 por omissão das coordenadas $\omega_h^0, \omega_i^0, \omega_j^0, \ldots$.»

Vejamos agora outra consequência de 14). Se C for um cilindro de geratrizes paralelas a $\Omega_h, \Omega_i, \Omega_j, \ldots$, então 14), juntamente com 11') e 2 *b)*, dá a relação entre conjuntos

14') $C_{(h,i,j,\ldots)} = C/(\omega_h^0, \omega_i^0, \omega_j^0, \ldots)$ para qualquer ponto $(\omega_h^0, \omega_i^0, \omega_j^0, \ldots)$.

Observação. Quando o transformado do conjunto $A \subset \Omega$ pelo processo indicado na observação final da última secção for o produto de dois conjuntos U e V, o primeiro extraído do espaço $\Omega_r \times \Omega_s \times \Omega_t \times \cdots$ e o outro extraído do espaço $\Omega_h \times \Omega_i \times \Omega_j \times \cdots$, então a igualdade (entre funções) óbvia $I_A = I_{U \times V}$, a igualdade (também entre funções) dada em 6) e a identidade 14) conduzem a

$$I_{A/(\omega_h^0, \omega_i^0, \omega_j^0, \ldots)}(\omega_r, \omega_s, \omega_t, \ldots) \equiv I_V(\omega_h^0, \omega_i^0, \omega_j^0, \ldots) \cdot I_U(\omega_r, \omega_s, \omega_t, \ldots).$$

Consequentemente, o corte $A/(\omega_h^0, \omega_i^0, \omega_j^0, \ldots)$ sai igual a U ou igual ao conjunto vazio $O_{(h,i,j,\ldots)}$, conforme o ponto $(\omega_h^0, \omega_i^0, \omega_j^0, \ldots)$ pertencer ou deixar de pertencer a V. No caso particular $A = \prod_n A_n$, onde $A_n \subset \Omega_n$ para cada n, é $U = A_r \times A_s \times A_t \times \cdots$ e $V = A_h \times A_i \times A_j \times \cdots$ de modo que $A/(\omega_h^0, \omega_i^0, \omega_j^0, \ldots)$ sai igual a $A_r \times A_s \times A_t \times \cdots$ ou igual a $O_{(h,i,j,\ldots)}$, conforme $(\omega_h^0, \omega_i^0, \omega_j^0, \ldots)$ pertencer ou deixar de pertencer a $A_h \times A_i \times A_j \times \cdots$. No caso muito especial $A = \Omega$ resulta então $\Omega/(\omega_h^0, \omega_i^0, \omega_j^0, \ldots) = \Omega_{(h,i,j,\ldots)}$.

* * *

Considere-se uma colecção finita ou numerável formada por conjuntos $A, A', A'', \ldots$, extraídos do espaço-produto Ω. Nesta conformidade, pode estabelecer-se o par de relações seguinte, onde a segunda relação traduz a *propriedade distributiva da operação de corte com respeito à união e,* em particular, *com respeito à adição.*

15) *a)* $A \subset A'$ implica $A/(\omega_h^0, \omega_i^0, \ldots) \subset A'/(\omega_h^0, \omega_i^0, \ldots)$;
b) $(A \cup A' \cup A'' \cup \cdots)/(\omega_h^0, \omega_i^0, \ldots) = [A/(\omega_h^0, \omega_i^0, \ldots)] \cup \cup [A'/(\omega_h^0, \omega_i, \ldots)] \cup [A''/(\omega_h^0, \omega_i^0, \ldots)] \cup \cdots$, podendo substituir-se o sinal $\cup$ pelo sinal $+$ quando os conjuntos $A, A', A'', \ldots$ forem disjuntos dois a dois.

Verificação de 15).—15 *a).* A hipótese feita e 2 *a)* dão $I_A \leqq I_{A'}$ para qualquer $\omega \in \Omega$ e, em particular, para todo o ω tal que $\omega_h = \omega_h^0, \omega_i = \omega_i^0, \ldots$. Logo 14) e 2 *a)* provam a implicação posta.—15 *b).* Em face da definição do cilindro elementar E, a igualdade do texto sai equivalente à igualdade

$$[(A \cup A' \cup A'' \cup \cdots) \cap E]_{(h,i,\ldots)} = (A \cap E)_{(h,i,\ldots)} \cup (A' \cap E)_{(h,i,\ldots)} \cup \cup (A'' \cap E)_{(h,i,\ldots)} \cup \cdots,$$

a qual decorre das propriedades distributivas da operação de intersecção e da operação de projecção com respeito à operação de união. Doutro lado, são disjuntos os cortes feitos pelo ponto $(\omega_h^0, \omega_i^0, \ldots)$ em dois conjuntos disjuntos, suponhamos A e A', porque $I_A \cdot I_{A'} = 0$ para qualquer ponto $(\omega_1, \omega_2, \ldots)$ e a identidade 14) dão $I_{A/(\omega_h^0, \omega_i^0, \ldots)} \cdot I_{A'/(\omega_h^0, \omega_i^0, \ldots)} = 0$ para qualquer ponto $(\omega_r, \omega_s, \ldots)$. Está assim terminada a verificação de 15 *b).*

Passamos para uma fórmula que refere a *propriedade distributiva da operação de corte com respeito à subtracção.*

16) *a)* $(A - A')/(\omega_h^0, \omega_i^0, \ldots) = [A/(\omega_h^0, \omega_i^0, \ldots)] - [A'/(\omega_h^0, \omega_i^0, \ldots)]$;
b) $A^-/(\omega_h^0, \omega_i^0, \ldots) = [A/(\omega_h^0, \omega_i^0, \ldots)]^-$.

Verificação de 16). — 16 *a)*. Resulta de 14), 3 *e)* e 2 *b)*. — 16 *b)*. Trata-se do caso particular de 16 *a)* que se obtém, mudando primeiro A em Ω e A' em A e tomando em conta depois a parte final da última observação.

Por fim, dois exemplos.

Exemplo 13. O leitor prove a *propriedade distributiva da operação de corte com respeito à operação de intersecção,* expressa pela relação

$$(A \cap A' \cap A'' \cap \cdots)/(\omega_h^0, \omega_i^0, \ldots) =$$
$$= [A/(\omega_h^0, \omega_i^0, \ldots)] \cap [A'/(\omega_h^0, \omega_i^0, \ldots)] \cap [A''/(\omega_h^0, \omega_i^0, \ldots)] \cap \cdots.$$

Exemplo 14. Considerem-se os conjuntos $A = \}(1,1),(2,2)\{$ e $A' = \}(1,3),(2,2)\{$, qualquer deles extraído do plano real $X = X_1 \times X_2$. Se cortarmos A e A' pelo ponto 1_1, quer dizer pelo ponto $1 \in X_1$, sai $A/1_1 = \}1\{ \subset X_2$ e $A'/1_1 = \}3\{ \subset X_2$; portanto, podem ser disjuntos os cortes feitos por um mesmo ponto em dois conjuntos que não são disjuntos. Se cortarmos A e A' pelo ponto 2_1, quer dizer pelo ponto $2 \in X_1$, sai $A/2_1 = \}2\{ \subset X_2$ e $A'/2_1 = \}2\{ \subset X_2$; logo concluímos que a relação 15 *a)* não é invertível.

b) Espaços mensuráveis

11. Classes de conjuntos extraídos do mesmo espaço. Corpos. Dado o espaço Ω de ponto genérico ω, vamos representar por 2^Ω o novo espaço que tem por ponto genérico o conjunto genérico A extraído de Ω. Então, escolhido qualquer A, podemos escrever $A \subset \Omega$, interpretando A como *conjunto* (eventualmente vazio) *de pontos situados em* Ω, e podemos escrever também $A \in 2^\Omega$, interpretando A como *ponto situado em conjuntos* (jamais vazios) extraídos de 2^Ω. A um conjunto de pontos pertencentes a 2^Ω chamamos também *classe,* em pormenor classe *vazia* se o conjunto for o vazio e classe *não-vazia* nos demais casos; esta nomenclatura tem a vantagem de estabelecer a distinção entre conjuntos extraídos de Ω e de 2^Ω, mesmo que não se faça referência expressa a esses espaços.

Como é natural, as notações, as definições e as propriedades vistas a-propósito dos conjuntos extraídos dum espaço qualquer continuam em vigor quando se passa de Ω para 2^{Ω}. Vejamos alguns exemplos: Se $A, A', A'', \ldots$ forem conjuntos extraídos de Ω, então $\{A, A', A'', \ldots\}$ denota a classe formada por esses conjuntos; a relação $O \in \{O\}$ significa que o conjunto $O \subset \Omega$ está situado na classe elementar formada pelo único conjunto O; se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ forem dois conjuntos extraídos de 2^{Ω}, qualquer das relações equivalentes $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ e $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$ lê-se $\mathcal{A}$ é *subclasse* de $\mathcal{B}$ ou $\mathcal{B}$ é *sobreclasse* de $\mathcal{A}$; se tivermos uma família (não necessàriamente numerável) T de índices t, se a cada $t \in T$ corresponder uma classe $\mathcal{A}_t$ de conjuntos (de pontos ω) e se as diversas classes $\mathcal{A}_t$ forem disjuntas duas a duas, isto é, se não existir conjunto situado simultâneamente em classes $\mathcal{A}_t$ de índices diferentes, então chamamos soma das classes $\mathcal{A}_t$ ao longo do índice t e representamos por $\sum_{t \in T} \mathcal{A}_t$ a nova classe que é formada por todos os conjuntos A tais que $A \in \mathcal{A}_t$ para algum $t \in T$.

Caso Ω tenha um número finito N de pontos, é óbvio que o número de conjuntos que podem extrair-se de Ω sai igual ao número de combinações distintas (vazias e não-vazias) que podem formar-se com N objectos ou seja igual a 2^N. Foi mesmo este o motivo por que escolhemos o símbolo 2^{Ω} para representar o espaço dos conjuntos extraídos de Ω. Ora bem, quer os pontos de Ω constituam uma colecção finita quer constituam uma infinidade *qualquer*, vale a proposição seguinte:

N X) «A potência dum espaço é sempre inferior à potência da classe formada por todos os conjuntos que podem extrair-se dele.»

Demonstração de N X. Consideremos um espaço qualquer $\Omega(\omega)$ e a classe 2^{Ω} de todos os conjuntos $A \subset \Omega$. Como as relações $\omega \in \Omega$ e $\{\omega\} \in 2^{\Omega}$ são equivalentes e como existem sempre conjuntos $A \subset \Omega$ que não são elementares, vê-se imediatamente que a potência de Ω é igual ou inferior à de 2^{Ω}. Por isso, basta mostrar que é absurdo supor iguais as potências de Ω e de 2^{Ω} ou ainda que é absurdo supor iguais a potência de Ω e a do conjunto de todas as indicatrizes $I(\omega)$ definidas em Ω.

Admitamos que cada $\xi \in \Omega$ se corresponde com uma indicatriz $I_{\xi}(\omega)$. Claro que qualquer número $I_{\xi}(\xi)$ só pode ser 0 ou 1. Se pusermos $I(\xi) = 1 - I_{\xi}(\xi)$ para cada $\xi \in \Omega$, fica definida uma função $I(\omega)$, a qual é indicatriz e não pode coincidir com nenhuma das funções $I_{\xi}(\omega)$. Logo é impossível estabelecer uma correspondência biunívoca entre o conjunto de todos os pontos ξ e o conjunto de todas as indicatrizes definidas em Ω. A nossa demonstração está assim terminada.

* * *

A teoria dos conjuntos ocupa-se muito de certas classes de conjuntos que gozam de propriedades especiais. Aqui estudamos apenas dois casos, um nesta secção e o outro nas secções posteriores.

Vamos dar uma *definição*.

Uma classe $\mathcal{A}$ de conjuntos extraídos do espaço Ω diz-se um *corpo* (definido em Ω), quando e só quando satisfaz simultâneamente às três condições seguintes:

1.ª A classe $\mathcal{A}$ não é vazia.—2.ª Todas as vezes que se tenha $A \in \mathcal{A}$, sai $A^{-} \in \mathcal{A}$.—3.ª Seja qual for a colecção *finita* formada por conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_N$ tais que $A_n \in \mathcal{A}$ para $n = 1, 2, \ldots, N$, sai sempre $\bigcup_{1 \leqq n \leqq N} A_n \in \mathcal{A}$.

Se a classe $\mathcal{A}$ for um corpo, a definição dada impõe as propriedades que passamos a escrever.

17) *a)* $O \in \mathcal{A}$ e $\Omega \in \mathcal{A}$;

b) $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{A}$ implicam $A - B \in \mathcal{A}$;

c) $A_n \in \mathcal{A}$ para $n = 1, 2, \ldots, N$ implica $\bigcap_{1 \leqq n \leqq N} A_n \in \mathcal{A}$.

Verificação de 17).—17 *a)*. Pela condição 1.ª, existe um conjunto $A \in \mathcal{A}$; logo as condições 2.ª e 3.ª dão sucessivamente $A^{-} \in \mathcal{A}$, $A + A^{-} = \Omega \in \mathcal{A}$ e $\Omega^{-} = O \in \mathcal{A}$.—17 *b)*. A igualdade N 12) e as condições 2.ª e 3.ª dão $A-B=(A^- \cup B)^- \in \mathcal{A}$. —17 *c)*. Tira-se, por exemplo, de N 11), da condição 3.ª e de 17 *b)*.

Observação. O conjunto das condições 1.ª, 2.ª e 3.ª é equivalente ao conjunto formado pelas condições 1.ª e 2.ª e pela propriedade 17 *c)*. Com efeito, o último conjunto implica, por causa de N 10 *a)*, o primeiro conjunto.

Por fim, alguns exemplos.

Exemplo 15. Suponhamos que Ω é o espaço formado pelos números naturais. A classe $\mathcal{A}$ formada por todos os conjuntos finitos extraídos de Ω não respeita a condição 2.ª da definição de corpo.

Exemplo 16. Consideremos o espaço Ω dos números reais ω tais que $0 \leqq \omega < 1$. Vamos provar que é corpo a classe $\mathcal{A}$ formada por todos os conjuntos que se reduzem a somas dum número finito (igual ou maior que um) de intervalos do tipo $\{a \leqq \omega < b\}$, com $0 \leqq a \leqq b \leqq 1$, intervalos esses que saem vazios ou não-vazios, conforme for $b=a$ ou $b>a$. Para o efeito, basta verificar, de acordo com a última observação, as condições 1.ª e 2.ª da definição de corpo e a propriedade 17 *c)*.

Ora bem, é óbvio que a classe $\mathcal{A}$ não é vazia;

se
$$A = \sum_{1 \leqq n \leqq N} \{a_n \leqq \omega < b_n\},$$

onde $0 \leqq a_n \leqq b_n \leqq 1$ para cada n e onde, podemos supo-lo, $a_{n+1} \geqq b_n$ para cada $n < N$, então sai

$$A^- = \{0 \leqq \omega < a_1\} + \sum_{1 \leqq n \leqq N-1} \{b_n \leqq \omega < a_{n+1}\} + \{b_N \leqq \omega < 1\};$$

se
$$A_n = \sum_{1 \leqq p_n \leqq P_n} \{a_{n,p_n} \leqq \omega < b_{n,p_n}\},$$

onde n corre de 1 a N e onde, dado n, é $0 \leqq a_{n,p_n} \leqq b_{n,p_n} \leqq 1$ para cada p_n, então sai, por causa de N 14'), a igualdade

$$\bigcap_{1 \leqq n \leqq N} A_n = \sum_{p_1, \ldots, p_N} (\{a_{1,p_1} \leqq \omega < b_{1,p_1}\} \cap \cdots \cap \{a_{N,p_N} \leqq \omega < b_{N,p_N}\}),$$

cujo segundo membro tem um número finito de parcelas tais que cada uma delas é manifestamente um intervalo do tipo $\{a \leq \omega < b\}$, com $0 \leq a \leq b \leq 1$.

Exemplo 17. As relações 2 *b)* e 3 *c)* e as notas a 3 *d)* e a 3 *g)* mostram que a classe $\mathcal{A}$ de conjuntos extraídos de Ω é um corpo, quando e só quando a classe $\mathcal{J}$ das indicatrizes correspondentes for, em primeiro lugar, uma classe não-vazia e tal que qualquer $I \in \mathcal{J}$ força $1-I \in \mathcal{J}$ e tiver, além disso, a propriedade seguinte: Qualquer colecção finita de indicatrizes $I_1, I_2, \ldots, I_N$ tais que $I_n \in \mathcal{J}$ para $n=1, 2, \ldots, N$ impõe a relação $\sup\limits_{1 \leq n \leq N} I_n \in \mathcal{J}$ ou, equivalentemente, impõe a relação $\inf\limits_{1 \leq n \leq N} I_n \in \mathcal{J}$.

12. Corpos-σ. Espaços mensuráveis. Vamos agora introduzir corpos especiais que se revestem de importância básica para o desenvolvimento da nossa teoria.

Definição. Uma classe $\mathcal{A}$ de conjuntos extraídos dum espaço Ω diz-se um *corpo-σ* (definido em Ω), quando e só quando satisfaz simultâneamente às três condições seguintes: 1.ª A classe $\mathcal{A}$ não é vazia. — 2.ª Todas as vezes que se tenha $A \in \mathcal{A}$, sai $A^- \in \mathcal{A}$. — 3.ª Seja qual for a colecção finita *ou numerável* de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, todos pertencentes a $\mathcal{A}$, sai sempre $\bigcup\limits_n A_n \in \mathcal{A}$.

Passa-se da definição de corpo para a de corpo-σ, conservando as condições 1.ª e 2.ª e acrescentando à condição 3.ª o pedido que ela se verifique também para colecções numeráveis de conjuntos. Portanto, todo o corpo-σ é um corpo, mas a afirmação inversa escusa de ser verdadeira.

Se a classe $\mathcal{A}$ for um corpo-σ, a definição dada impõe as propriedades que passamos a escrever.

18) *a)* $O \in \mathcal{A}$ e $\Omega \in \mathcal{A}$; *b)* $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{A}$ implicam $A-B \in \mathcal{A}$; *c)* se $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ pertencerem a $\mathcal{A}$, então $\bigcap\limits_n A_n \in \mathcal{A}$.

Verificação de 18). Formalmente igual à verificação de 17). O recurso a N 11) pode envolver uniões com uma infinidade numerável de parcelas.

Observação. O conjunto das condições 1.ª, 2.ª e 3.ª desta secção é equivalente ao conjunto formado pelas condições 1.ª e 2.ª e pela propridade 18 *c)*. Prova-se esta equivalência com o auxílio de N 10 *a)*.

Seguem alguns exemplos.

Exemplo 18. O corpo do exemplo 16 não é corpo-σ, pois a igualdade óbvia $\bigcap\limits_{1\leqq n<\infty} \{0\leqq\omega<1/n\}=\{0\}$ contradiz a propriedade 18 *c)*.

Exemplo 19. Se o espaço Ω for o conjunto $\{1,2,3,4\}$, o leitor verifica fàcilmente que é corpo-σ tanto a classe $\mathcal{A}$ formada pelos quatro conjuntos O, Ω, $\{1,2\}$ e $\{3,4\}$, como também a classe $\mathcal{A}'$ formada pelos quatro conjuntos O, Ω, $\{1\}$ e $\{2,3,4\}$.

Exemplo 20. Dado qualquer espaço Ω, a classe 2^Ω formada por todos os conjuntos $A\subset\Omega$ é òbviamente um corpo-σ, o mais amplo que pode definir-se em Ω. Também a classe $\{O,\Omega\}$ é òbviamente um corpo-σ, o menos amplo que pode definir-se em Ω, isso por causa da propriedade 18 *a)*.

Exemplo 21. Imitando o processo usado no exemplo 17, vê-se que uma classe $\mathcal{A}$ de conjuntos extraídos de Ω é um corpo-σ, quando e só quando a classe $\mathcal{J}$ das indicatrizes correspondentes for, em primeiro lugar, uma classe não-vazia e tal que qualquer $I\in\mathcal{J}$ força $1-I\in\mathcal{J}$ e tiver, além disso, a propriedade seguinte: Qualquer colecção finita ou numerável de indicatrizes $I_1, I_2,\ldots, I_n,\ldots$, todas pertencentes a $\mathcal{J}$, impõe a relação $\sup\limits_n I_n \in\mathcal{J}$ ou, equivalentemente, impõe a relação $\inf\limits_n I_n\in\mathcal{J}$.

* * *

Todo o corpo-σ encontra-se, podemos dizê-lo, ligado ao espaço em que é definido. Sendo assim, é uso referir o binário constituído pelo espaço Ω de ponto genérico ω e pelo corpo-σ, seja $\mathcal{A}$, de conjunto genérico $A \subset \Omega$, classificando-o como *espaço mensurável* e representando-o pelo símbolo $[\Omega(\omega), \mathcal{A}(A)]$ ou, abreviadamente, por $(\Omega, \mathcal{A})$. Nesta conformidade, chama-se *conjunto mensurável* a todo o conjunto $A \in \mathcal{A}$.

Veremos mais adiante que a classificação de mensurável, atribuída a um espaço ou a um conjunto, significa que ele pode ser dotado duma medida. É mesmo esta a origem da escolha do adjectivo mensurável.

Tomando em conta a definição de corpo-σ e as propriedades expressas em 18), podemos estabelecer a seguinte proposição relativa aos conceitos de espaço e de conjunto mensuráveis.

N XI) «Dado um espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{A})$, saem mensuráveis não só o conjunto $O \subset \Omega$ e o próprio Ω, como também qualquer conjunto que seja intersecção, união ou diferença dum número finito ou duma infinidade numerável de conjuntos situados em $\mathcal{A}$.»

A proposição N XI exibe os espaços mensuráveis como ambiente adequado à pretensão que sejam transformações internas as que relacionam os conjuntos duma classe dada pelas operações mais correntes.

13. Operações sobre corpos-σ definidos no mesmo espaço. O problema da geração de corpos-σ. Se tivermos dois corpos-σ, suponhamos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$, ambos definidos em Ω, então a propriedade 18 *a)* mostra que não podem ser disjuntos e mostra ainda que a sua diferença é uma classe de conjuntos, a qual certamente não é corpo-σ. Mais, a classe $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ escusa de sair um corpo-σ; veja-se o exemplo 19 onde a dita classe, formada pelos seis conjuntos O, Ω, $\{1\}$, $\{1,2\}$, $\{3,4\}$ e $\{2,3,4\}$, não inclui a soma $\{1\}+\{3,4\}=\{1,3,4\}$ e, portanto, não cumpre com a condição 3.ª da definição de corpo-σ.

Em face do exposto compreende-se bem o interesse que oferecem as duas proposições desta secção, a primeira das quais é a seguinte.

N XII) «Considere-se um espaço mensurável $(\Omega,\mathcal{A})$, uma classe $\mathcal{A}'\subset\mathcal{A}$ que verifique as condições 1.ª e 3.ª da definição dum corpo-σ e mais a classe $\mathcal{T}$ formada por todos os conjuntos extraídos de Ω que sejam subconjuntos dalgum conjunto situado em $\mathcal{A}'$. Então, sai corpo-σ (definido em Ω) a classe $\mathcal{A}\circ\mathcal{T}$ que se obtém, unindo qualquer $A\in\mathcal{A}$ com qualquer $T\in\mathcal{T}$. Mais, tem-se $\mathcal{A}\subset\mathcal{A}\circ\mathcal{T}$ em todos os casos e tem-se $\mathcal{A}=\mathcal{A}\circ\mathcal{T}$, quando e só quando $\mathcal{T}\subset\mathcal{A}$.»

Demonstração de N XII. Comecemos por mostrar que a classe $\mathcal{A}\circ\mathcal{T}$, evidentemente não-vazia, verifica as condições 2.ª e 3.ª da definição dum corpo-σ.

2.ª Se $A\in\mathcal{A}$ e $T\subset A'\in\mathcal{A}'$, então $A'^{-}\subset T^{-}$. Logo a relação N 10), o conjunto das propriedades N 9), a igualdade N 14'), a condição 2.ª da definição de corpo-σ e a propriedade 18 *c)* dão $(A\cup T)^{-}=(A^{-}\cap T^{-})\cap\Omega=(A^{-}\cap T^{-})\cap(A'^{-}+A')=$ $=(A^{-}\cap A'^{-})+[(A^{-}\cap T^{-})\cap A']\in\mathcal{A}\circ\mathcal{T}$. — 3.ª Se $A_n\in\mathcal{A}$ e $T_n\subset A'_n\in\mathcal{A}'$ para $n=1,2,3,\ldots$, então a proposição N II, a condição 3.ª da definição de corpo-σ e a relação óbvia $\bigcup_n T_n\subset\bigcup_n A'_n$ dão $\bigcup_n(A_n\cup T_n)=(\bigcup_n A_n)\cup(\bigcup_n T_n)\in\mathcal{A}\circ\mathcal{T}$.

Só falta provar o período final do enunciado. Como $O\in\mathcal{T}$, a escolha de qualquer $A\in\mathcal{A}$ dá a relação $A=A\cup O\in$ $\in\mathcal{A}\circ\mathcal{T}$, da qual depreendemos $\mathcal{A}\subset\mathcal{A}\circ\mathcal{T}$. Se $\mathcal{T}\subset\mathcal{A}$, a escolha de qualquer $A\in\mathcal{A}$ e de qualquer $T\in\mathcal{T}$ dá, por causa da condição 3.ª da definição de corpo-σ, a relação $A\cup T\in\mathcal{A}$, da qual tiramos $\mathcal{A}\circ\mathcal{T}\subset\mathcal{A}$. Finalmente, se $\mathcal{T}$ não for subclasse de $\mathcal{A}$, basta tomar $A=O$ e $T\in\mathcal{T}$ tal que $T\notin\mathcal{A}$ para obter a relação $T=O\cup T\notin\mathcal{A}$, da qual inferimos que $\mathcal{A}\circ\mathcal{T}\neq\mathcal{A}$. Está pois completada a nossa demonstração.

Ao corpo-σ representado por $\mathcal{A} \circ \mathcal{T}$ no enunciado de N XII corresponde o espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{A} \circ \mathcal{T})$. Para facilitar as referências futuras ao assunto, vamos chamar ao primeiro desses entes matemáticos *corpo-σ completivo de $\mathcal{A}$ com respeito à classe $\mathcal{A}'$* e vamos chamar ao outro *espaço mensurável completivo de $(\Omega, \mathcal{A})$ com respeito à classe $\mathcal{A}'$*. Damos o nome de *completação de $\mathcal{A}$ ou de $(\Omega, \mathcal{A})$ com respeito à classe $\mathcal{A}'$* à operação que transforma $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A} \circ \mathcal{T}$ ou $(\Omega, \mathcal{A})$ em $(\Omega, \mathcal{A} \circ \mathcal{T})$. Um corpo-$\sigma$ ou um espaço mensurável diz-se *completo* [*incompleto*] *com respeito à classe $\mathcal{A}'$*, quando e só quando é igual ao [diferente do] seu completivo com respeito a essa classe.

Vejamos agora dois exemplos.

Exemplo 22. Se a classe $\mathcal{A}'$ de N XII for tal que $\Omega \in \mathcal{A}'$, então o corpo-σ completivo de $\mathcal{A}$ com respeito a $\mathcal{A}'$ é a classe 2^{Ω}.

Exemplo 23. A completação do primeiro corpo-σ do exemplo 19 com respeito à classe elementar cujo único conjunto é $\{1, 2\}$ dá o corpo-σ formado pelos oito conjuntos O, Ω, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$ e $\{2, 3, 4\}$.

* * *

A classe $\mathcal{A} \circ \mathcal{T}$ supracitada é, em razão da sua definição, uma classe especial de uniões de subconjuntos de conjuntos situados em $\mathcal{A}$, mas pode ser considerada também, por causa da parte final de N XII, como a união de $\mathcal{A}$ com outra classe definida à custa de $\mathcal{A}$. Ora bem, a situação apresenta-se menos artificiosa quando se pretende intersectar corpos-σ definidos no mesmo espaço em lugar de uni-los. Com efeito, vale a proposição (extensiva a corpos) que passamos a enunciar.

I) «*Qualquer* intersecção de corpos-σ [corpos] definidos num espaço Ω é, por sua vez, um corpo-σ [corpo] definido em Ω.»

Demonstração de I. Considere-se uma família qualquer T de índices t e suponha-se que a cada $t \in T$ corresponde uma classe $\mathcal{A}_t$ que é corpo-σ [corpo] definido em Ω. Vamos provar que a classe $\mathcal{A} = \bigcap_{t \in T} \mathcal{A}_t$ satisfaz às três condições da definição dum corpo-σ [corpo].

1.ª A classe $\mathcal{A}$ não é vazia, pois 18 *a)* [17 *a)*] dá $\Omega \in \mathcal{A}$.— 2.ª Se $A \in \mathcal{A}$, então a definição de intersecção e a condição 2.ª dum corpo-σ [corpo] dão $A^{-} \in \mathcal{A}$ para cada t, donde $A^{-} \in \mathcal{A}$.—3.ª Se os conjuntos $A_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$ pertencerem todos a $\mathcal{A}$ e formarem uma colecção quando muito numerável [colecção finita], então a definição de intersecção e a condição 3.ª dum corpo-σ [corpo] dão $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}_t$ para cada t, donde $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$. Está assim completada a demonstração de I.

Se $\mathcal{G}$ for uma classe arbitrária formada por conjuntos G do espaço Ω, então $\mathcal{G}$ escusa de ser um corpo-σ. Como $\mathcal{G} \subset 2^{\Omega}$, o exemplo 20 mostra que existem sobreclasses de $\mathcal{G}$ que são corpos-σ e a proposição *I* mostra que a intersecção $\mathcal{G}^*$ de todas essas sobreclasses é um corpo-σ, o qual contém evidentemente $\mathcal{G}$. Damos a $\mathcal{G}^*$ o nome de *corpo-σ gerado por* $\mathcal{G}$, consideramos $\mathcal{G}$ como *classe geradora de* $\mathcal{G}^*$ e dizemos que a operação que transforma $\mathcal{G}$ em $\mathcal{G}^*$ é a da *geração dum corpo-σ a partir de* $\mathcal{G}$.

Se $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$ e se $\mathcal{A}$ for um corpo-σ, tem-se òbviamente $\mathcal{G}^* \subset \mathcal{A}$; por outras palavras, $\mathcal{G}^*$ é subclasse de qualquer corpo-σ que contenha $\mathcal{G}$. Eis a razão porque é frequente chamar-se a $\mathcal{G}^*$ *corpo-σ mínimo construido sobre* $\mathcal{G}$.

Vamos agora estabelecer fórmulas que referem propriedades da geração de corpos-σ as quais são consequências mais ou menos imediatas da definição dessa operação.

19) *a)* $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}^*$, seja qual for $\mathcal{G}$, e $\mathcal{G} = \mathcal{G}^*$, quando e só quando $\mathcal{G}$ for corpo-σ;
b) $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}$ implica $\mathcal{G}^* \subset \mathcal{B}^*$;
c) $\mathcal{G} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}^*$ implica $\mathcal{G}^* = \mathcal{B}^*$.

Verificação de 19.—19 *a).* Primeiro, a relação de inclusão $\mathcal{G}\subset\mathcal{G}^*$ já foi mencionada no texto. Doutro lado, se $\mathcal{G}$ for corpo-σ, tem-se $\mathcal{G}\supset\mathcal{G}^*$ e, se $\mathcal{G}$ não for corpo-σ, a igualdade $\mathcal{G}=\mathcal{G}^*$ torna-se impossível.—19 *b).* Qualquer corpo-σ que contenha $\mathcal{B}$ contém também $\mathcal{G}$.—19 *c).* Sai $\mathcal{G}^*\subset\mathcal{B}^*\subset(\mathcal{G}^*)^*$, por causa de 19 *b)*, e sai ainda $\mathcal{G}^*=(\mathcal{G}^*)^*$, por causa de 19 *a).*

Observação. Podemos substituir no texto precedente a palavra corpo-σ por *corpo* e o símbolo $\mathcal{G}^*$ por $\mathcal{G}^0$ (para distinguir) sem que daí resulte qualquer prejuízo para as deduções feitas.

Por fim, um exemplo.

Exemplo 24. Qualquer dos dois corpos-σ do exemplo 19 admite classes geradoras elementares, o primeiro a classe formada pelo conjunto $\{1,2\}$ ou a formada pelo conjunto $\{3,4\}$ e o outro a classe formada pelo conjunto elementar $\{1\}$ ou a formada pelo conjunto não-elementar $\{2,3,4\}$.

14. Decomposições dum espaço mensurável. Consideremos o espaço mensurável $(\Omega,\mathcal{C})$ e suponhamos que a classe $\mathcal{D}=\{A_1,A_2,\ldots,A_n,\ldots\}$ é formada por uma colecção quando muito numerável de conjuntos mensuráveis, não-vazios, disjuntos dois a dois e tais que $\Omega=\sum_n A_n$. Nestas circunstâncias é uso dizer que a classe $\mathcal{D}$ é uma *decomposição* ou uma *partição* do espaço mensurável dado.

Uma decomposição, subentende-se de $(\Omega,\mathcal{C})$, diz-se *finita* ou *infinita,* consoante tiver um número finito ou infinito de conjuntos, e diz-se *redutível* ou *irredutível,* conforme algum ou nenhum dos seus conjuntos admitir subconjuntos mensuráveis próprios. Alguns autores dão o nome de *átomos* aos conjuntos duma decomposição irredutível.

Chamamos *classe das somas extraídas da decomposição* $\mathcal{D}=\{A_1,A_2,\ldots,A_n,\ldots\}$ e representamos pelo símbolo $\mathcal{S}(A_1,A_2,\ldots,A_n,\ldots)$ ou, abreviadamente, por $\mathcal{S}$ a classe das somas $A_1'+A_2'+\cdots+A_n'+\cdots$, onde, seja qual for n, a parcela A_n' signifca um subconjunto *impróprio* arbitrário de A_n. Mais, chamamos *classe das somas associadas à decomposição* $\mathfrak{D}=\{A_1, A_2,\ldots, A_n,\ldots\}$ e representamos por $\mathfrak{S}(A_1, A_2,\ldots, A_n,\ldots)$ ou, abreviadamente, por $\mathfrak{S}$ a classe das somas $A_1''+A_2''+\cdots+$ $+A_n''+\cdots$, onde, seja qual for n, a parcela A_n'' significa um subconjunto *mensurável* arbitrário de A_n. Note-se que a escolha $A_n'=O$ [ou $A_n''=O$] para cada n dá a (única) soma vazia no caso das somas $\mathcal{S}$ [ou $\mathfrak{S}$].

Completamos as definições aqui dadas, chamando *soma das classes associadas à decomposição* $\mathfrak{D}=\{A_1, A_2,\ldots, A_n,\ldots\}$ e representando pelo símbolo $\mathcal{C}(A_1, A_2,\ldots, A_n,\ldots)$ ou, abreviadamente, por $\mathcal{C}$ a soma $\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2+\cdots+\mathcal{A}_n+\cdots$, onde, dado n, a parcela $\mathcal{A}_n$ denota a classe formada por todos os subconjuntos (próprios ou impróprios) de A_n que sejam mensuráveis e não-vazios. Repare-se que as classes $\mathcal{A}_n$ são disjuntas duas a duas, o que justifica que se tenha falado na sua soma.

Posto isso, vamos estabelecer a proposição seguinte:

N XIII) «Escolhida qualquer decomposição $\mathfrak{D}$ do espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{A})$, sai igual a $\mathcal{A}$ não só $\mathfrak{S}$ ou seja a classe das somas associadas a $\mathfrak{D}$, como também o corpo-σ gerado por $\mathcal{C}$ ou seja pela soma das classes associadas a $\mathfrak{D}$.»

Demonstração de N XIII. Seja $\mathfrak{D}=\{A_1, A_2,\ldots, A_n,\ldots\}$ a decomposição escolhida. Então, sai $\mathfrak{S}\subset\mathcal{A}$, porque a condição 3.ª da definição dum corpo-σ torna mensurável qualquer $A_1''+A_2''+\cdots+A_n''+\cdots \in \mathfrak{S}$, e sai também $\mathcal{A}\subset\mathfrak{S}$, porque as propriedades N 9 *b)* e N 9 *a)*, a definição de $\mathfrak{D}$, a igualdade N 14') e a propriedade 18 *c)* fazem com que $A\in\mathcal{A}$ conduza a $A=A\cap(\sum_n A_n)=\sum_n(A\cap A_n)$, onde cada intersecção $A\cap A_n$ é um conjunto mensurável A_n''.

Acabamos de provar que $\mathcal{A}=\mathfrak{S}$. Doutro lado, as definições de $\mathcal{C}$, de $\mathfrak{S}$ e de $\mathcal{C}^*$, juntamente com a condição 3.ª da definição dum corpo-σ e com a propriedade 18 *a)*, permitem escrever a relação $\mathcal{C}\subset\mathcal{Z}\subset\mathcal{C}^*$, da qual tiramos, por causa de 19 *a)* e de 19 *c)*, que se verifica a igualdade $\mathcal{Z}=\mathcal{C}^*$. Logo está completada a demonstração de N XIII.

Outra proposição relativa ao assunto em estudo é a seguinte:

N XIV) «Escolhida qualquer decomposição $\mathcal{D}$ do espaço mensurável $(\Omega,\mathcal{Q})$, então $\mathcal{S}$ ou seja a classe das somas extraídas de $\mathcal{D}$ coincide com o corpo-σ gerado por $\mathcal{D}$. Mais, tem-se $\mathcal{S}\subset\mathcal{Q}$ em todos os casos e tem-se $\mathcal{S}=\mathcal{Q}$, quando e só quando $\mathcal{D}$ for irredutível.»

Demonstração de N XIV. Seja $\mathcal{D}=\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$ a decomposição escolhida e comecemos por provar que a classe $\mathcal{S}$, evidentemente não-vazia, verifica as propriedades 2.ª e 3.ª da definição dum corpo-σ.—Condição 2.ª. A hipótese que A'_n é subconjunto impróprio de A_n e as propriedades N 3 *b)*, N 3 *c)*, N 7' *b)* e N 7' *c)* implicam a igualdade $A_n=A'_n+$ $+(A_n-A'_n)$, onde $A_n-A'_n$ é também subconjunto impróprio de A_n. Portanto, a definição de $\mathcal{D}$ e a proposição N II' conduzem a $\Omega=(\sum\limits_n A'_n)+(\sum\limits_n(A_n-A'_n))$ ou, equivalentemente, a $(\sum\limits_n A'_n)^-=\sum\limits_n(A_n-A'_n)$.—Condição 3.ª. Tomemos conjuntos $\sum\limits_n A'_{n,p}\in$ $\in\mathcal{S}(p=1, 2, 3, \ldots)$, onde, seja qual for p, se tem $A'_{n,p}\subset A_n$ para cada n. A proposição N II mostra que $\bigcup\limits_p(\sum\limits_n A'_{n,p})=\bigcup\limits_n(\bigcup\limits_p A'_{n,p})$, onde as propriedades da união forçam todo o conjunto $\bigcup\limits_p A'_{n,p}$ a ser subconjunto impróprio de A_n. Portanto, $\bigcup\limits_p(\sum\limits_n A'_{n,p})=\sum\limits_n \bar{A}'_n$, onde cada $\bar{A}'_n$ é subconjunto impróprio de A_n.

Ora bem, as definições de $\mathcal{D}$, de $\mathcal{S}$ e de $\mathcal{D}^*$, juntamente com a condição 3.ª da definição dum corpo-σ e com a propriedade 18 *a)*, permitem escrever a relação $\mathcal{D}\subset\mathcal{S}\subset\mathcal{D}^*$, da qual tiramos, por causa de 19 *c)*, a igualdade $\mathcal{S}^*=\mathcal{D}^*$. Doutro lado, o facto que $\mathcal{S}$ é corpo-σ e a propriedade 19 *a)* dão $\mathcal{S}=\mathcal{S}^*$. Logo $\mathcal{S}=\mathcal{D}^*$ e só falta provar o período final do enunciado.

Todo o conjunto situado em $\mathcal{S}$ é mensurável, por causa da propriedade 3.ª da definição dum corpo-σ. Se $\mathcal{D}$ for irredutível, sai $\mathfrak{D}=\mathcal{C}$, de modo que N XIII implica $\mathcal{A}=\mathcal{C}^*=\mathfrak{D}^*=\mathcal{S}$, e, se $\mathfrak{D}$ for redutível, existe um n tal que A_n contém um subconjunto mensurável próprio A, o qual não pode coincidir com $\cdots+A'_n+\cdots\in\mathcal{S}$, quer no caso $A'_n=O$ quer no caso $A'_n=A_n$.

* * *

A parte final de N XIV mostra que meras adições efectuadas sobre os conjuntos duma decomposição irredutível dum espaço mensurável permitem obter todos os conjuntos mensuráveis desse espaço. Este facto confere uma posição importante às decomposições irredutíveis e leva-nos a examiná-las mais de perto. Antes de mais nada, vale a proposição seguinte:

N XV) «Caso um espaço mensurável admita certa decomposição irredutível, esta é a única que existe.»

Demonstração de N XV. Consideremos duas decomposições irredutíveis $\mathfrak{D}$ e $\tilde{\mathfrak{D}}$ do mesmo espaço mensurável e sejam $\mathcal{S}$ e $\tilde{\mathcal{S}}$ as classes das somas extraídas de $\mathfrak{D}$ e de $\tilde{\mathfrak{D}}$, respectivamente. Como N XIV torna $\mathcal{S}=\tilde{\mathcal{S}}$, qualquer conjunto situado em $\mathfrak{D}$ sai igual a uma soma de conjuntos situados em $\tilde{\mathfrak{D}}$, a qual soma não pode ter mais do que uma parcela, isso por causa da irredutibilidade de $\mathfrak{D}$. Concluímos que $\mathfrak{D}\subset\tilde{\mathfrak{D}}$. Trocando agora os papeis de $\mathfrak{D}$ e de $\tilde{\mathfrak{D}}$, chegamos semelhantemente a $\tilde{\mathfrak{D}}\subset\mathfrak{D}$, terminando assim a demonstração de N XV.

Dado o espaço mensurável $(\Omega,\mathcal{A})$, podemos admitir que $\mathcal{A}$ é definido por uma classe geradora $\mathcal{G}$, a qual pode ser subclasse própria ou imprópria de $\mathcal{A}$. Se pusermos de lado o caso destituído de interesse $\mathcal{A}=\{O,\Omega\}$, citado no exemplo 20, a classe $\mathcal{G}$ deve incluir um conjunto $A\neq O,\Omega$, ao qual corresponde a decomposição $\{A,A^-\}$. Assiste-nos, pois, o direito de supormos conhecida uma decomposição de $(\Omega,\mathcal{A})$ com pelo menos dois conjuntos. Desejamos usar $\mathcal{G}$ para distinguir se tal decomposição é redutível ou irredutível, não havendo no último caso outra decomposição nas mesmas condições, isso por causa de N XV. No primeiro caso podemos estar interessados em formar uma decomposição diferente com cada um dos seus conjuntos contido num conjunto da anterior e a seguir podemos estar interessados, eventualmente, em retomar a questão inicial sobre a nova decomposição.

Alcançam-se os objectivos aqui expostos com o auxílio da seguinte proposição, redigida de modo que abranja também o caso $\mathcal{A}=\{O,\Omega\}$.

N XVI) «Seja $\mathcal{D}=\{A_1,A_2,\ldots,A_n,\ldots\}$ uma decomposição do espaço mensurável $(\Omega,\mathcal{A})$ e seja $\mathcal{G}$ uma classe geradora de $\mathcal{A}$. Se $\mathcal{G}$ estiver contido em $\mathcal{S}$, quer dizer na classe das somas extraídas de $\mathcal{D}$, então $\mathcal{D}$ sai irredutível. Se existir um conjunto $A\in\mathcal{G}$ tal que $A\notin\mathcal{S}$, então $\mathcal{D}$ sai redutível e há um valor do índice n que faz de qualquer dos conjuntos $A_n\cap A$ e A_n-A, disjuntos e de soma igual a A_n, um subconjunto mensurável próprio de A_n.»

Demonstração de N XVI. Suponhamos primeiro que $\mathcal{G}\subset\mathcal{S}$. Então, a propriedade 19 *b)* dá $\mathcal{G}^*\subset\mathcal{S}^*$, com $\mathcal{A}=\mathcal{G}^*$, por hipótese, e com $\mathcal{S}=\mathcal{S}^*$, devido a N XIV e a 19 *a)*. Logo $\mathcal{A}\subset\mathcal{S}$ e a parte final de N XIV prova que $\mathcal{D}$ é irredutível.

Suponhamos agora que existe $A\in\mathcal{G}$ tal que $A\notin\mathcal{S}$. Então, as propriedades N 9 *b)* e N 9 *c)*, a definição de $\mathcal{D}$ e a igualdade N 14′) dão $A=\sum_n(A_n\cap A)$, havendo a certeza que existe um n tal que $A_n\cap A$ é subconjunto próprio de A_n, isso por causa da propriedade N 9 *a)* e da hipótese $A\notin\mathcal{S}$. Este facto e a mensurabilidade dos conjuntos $A_n\cap A$ e A_n-A [assegurada pela relação $\mathcal{G}\subset\mathcal{A}$ e pelas propriedades 18 *c)* e 18 *b)*] permitem completar a demonstração de N XVI.

Segue uma proposição relativa à potência de qualquer classe de conjuntos que seja corpo-σ.

N XVII) «Se o espaço mensurável $(\Omega,\mathcal{A})$ admitir uma decomposição irredutível finita, o número de conjuntos de

$\mathcal{A}$ sai igual a 2^N, onde N significa o número de conjuntos da decomposição. Mais, se $(\Omega, \mathcal{A})$ admitir uma decomposição irredutível infinita, a potência de $\mathcal{A}$ é a do contínuo. Finalmente, se todas as decomposições de $(\Omega, \mathcal{A})$ forem redutíveis, a potência de $\mathcal{A}$ não pode ser menor do que a do contínuo.»

Demonstração de N XVII. Comecemos por supor que $(\Omega, \mathcal{A})$ admite a decomposição irredutível $\mathcal{D} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$. Por causa de N XIV, a classe $\mathcal{A}$ identifica-se com a classe $\mathcal{S}$ dos conjuntos diferentes que podem obter-se, substituindo em $\sum\limits_n A'_n$ cada símbolo A'_n ou por O ou por A_n. Portanto, se $\mathcal{D}$ for uma decomposição finita com, digamos, N conjuntos, qualquer das classes $\mathcal{S}$ e $\mathcal{A}$ fica com 2^N conjuntos e, se a decomposição $\mathcal{D}$ for infinita, os conjuntos situados em $\mathcal{S}$ correspondem-se biunìvocamente com os números $0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$, onde a_n vale 0 ou 1 conforme A'_n for O ou A_n, de modo que qualquer das classes $\mathcal{S}$ e $\mathcal{A}$ fica com a potência do contínuo (compare-se com a observação final da secção 5).

Se todas as decomposições de $(\Omega, \mathcal{A})$ forem redutíveis, então a proposição N XVI permite deduzir de qualquer decomposição $\mathcal{D}$ com um número finito de conjuntos outra $\tilde{\mathcal{D}}$ com maior número de conjuntos. Logo existem decomposições infinitas, às quais correspondem classes $\mathcal{S}$ com a potência do contínuo. Como $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$, por causa da parte final de N XIV, concluimos que a potência de $\mathcal{A}$ não pode ser menor do que a do contínuo, ficando assim completada a demonstração de N XVII.

Uma consequência imediata de N XVII é o corolário seguinte:

N XVII') «Quando um corpo-σ é formado por uma infinidade de conjuntos, esta não pode ter a potência do numerável.»

Por vezes, é útil a proposição seguinte:

N XVIII) «Se o espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{A})$ admitir uma decomposição irredutível e se $\mathcal{A}'$ for um corpo-σ contido em

$\mathcal{A}$, então o espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{A}')$ admite também uma decomposição irredutível.»

Demonstração de N XVIII. Seja A' o conjunto genérico de $\mathcal{A}'$ e seja $\mathcal{D} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$ uma decomposição irredutível de $(\Omega, \mathcal{A})$. A hipótese feita $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ e a parte final de N XIV obrigam cada conjunto A' a ser um conjunto de $\mathcal{S}$, quer dizer da classe das somas extraídas de $\mathcal{D}$, facto este que resulta importante para a continuação da nossa demonstração.

Ora bem, escrevendo $A_1 = A_{1,1}$, dispondo por ordem dos seus índices os possíveis conjuntos $A_n \neq A_{1,1}$ tais que, seja qual for A', a relação $A' \supset A_{1,1}$ implica $A' \supset A_n$ e representando esses conjuntos A_n, se os houver, por $A_{1,2}, A_{1,3}, \ldots$, fazendo tudo isso, não só fica definida uma colecção de conjuntos A_{1,p_1} de índice genérico p_1, como também a intersecção de todos os conjuntos $A' \supset A_{1,1}$ se reduz à soma não-vazia $\sum\limits_{p_1} A_{1,p_1} = A_1^0$. Supondo $A_1^0 \neq \Omega$, igualando a $A_{2,1}$ o primeiro A_n disjunto de A_1^0, dispondo por ordem dos seus índices os possíveis conjuntos $A_n \neq A_{2,1}$ tais que, seja qual for A', a relação $A' \supset A_{2,1}$ implica $A' \supset A_n$ e representando esses conjuntos A_n, se os houver, por $A_{2,2}, A_{2,3}, \ldots$, fazendo tudo isso, não só fica definida uma colecção de conjuntos A_{2,p_2} de índice genérico p_2, como também a intersecção de todos os conjuntos $A' \supset A_{2,1}$ se reduz à soma não-vazia $\sum\limits_{p_2} A_{2,p_2} = A_2^0$. Etc., etc. Supondo $A_1^0 \cup A_2^0 \cup \ldots \cup A_{h-1}^0 \neq \Omega$, tomando em conta que a união escrita é, por força de N XIV, um conjunto situado em $\mathcal{S}$, igualando a $A_{h,1}$ o primeiro A_n disjunto de $A_1^0 \cup A_2^0 \cup \cdots \cup A_{h-1}^0$, dispondo por ordem dos seus índices os possíveis conjuntos $A_n \neq A_{h,1}$ tais que, seja qual for A', a relação $A' \supset A_{h,1}$ implica $A' \supset A_n$ e representando esses conjuntos A_n, se os houver, por $A_{h,2}, A_{h,3}, \ldots$, fazendo tudo isso, não só fica definida uma colecção de conjuntos A_{h,p_h} de índice genérico p_h, como também a intersecção de todos os conjuntos $A' \supset A_{h,1}$ se reduz à soma não-vazia $\sum\limits_{p_h} A_{h,p_h} = A_h^0$. Etc., etc. Acabamos de formar a colecção dos conjuntos A_{h,p_h}, onde o índice natural h corre de 1 até $H \geqq 1$ ou até $+\infty$ e onde, fixado h de qualquer modo, o índice natural p_h corre de 1 até $P_h \geqq 1$ ou até $+\infty$.

Notando agora que cada A_{h,p_h} é, por construção, um conjunto A_n e que, escolhido qualquer n, sai $A_n = A_{h,p_h}$ para um certo $h \leqq n$ e para um certo p_h, podemos recorrer à definição de $\mathfrak{D}$, à proposição N II e à definição dos conjuntos A_h^0 para tirarmos a relação $\Omega = \sum\limits_n A_n = \bigcup\limits_h (\sum\limits_{p_h} A_{h,p_h}) = \bigcup\limits_h A_h^0$.

Fixemos $A' \neq O$. Todas as vezes que $A_n = A_{h,p_h} \subset A'$, a relação $A_{h,1} \subset A'^-$ é absurda, porque ela e $A'^- \in \mathcal{A}'$ implicavam $A_{h,p_h} \subset A'^-$; portanto, sai $A_{h,1} \subset A'$, donde $A_h^0 \subset A'$. Concluimos, pois, que qualquer conjunto $A' \neq O$ é a *união* de um ou mais conjuntos A_h^0.

Pondo de lado o caso trivial $A_1^0 = \Omega$, consideremos conjuntos arbitrários A_h^0 e A_l^0, com $l > h$. Então, o facto que $A_{l,1}$ é simultâneamente subconjunto de A_l^0 e disjunto de A_h^0 prova a existência dum conjunto situado em $\mathcal{A}'$, seja A_l', que torna correcta a relação $A_h^0 \subset A_l'$ e, simultâneamente, torna falsa a relação $A_l^0 \subset A_l'$, pois a inexistência de tal conjunto implicaria (*) a conclusão absurda $A_h^0 \supset A_{l,1}$. Portanto, o conjunto A_h^0 sai disjunto de A_l^0, pois a hipótese contraditória dava $A_{l,p_l} \subset A_l'$ para um certo p_l, donde a relação $A_l^0 \subset A_l'$, a qual estaria em desacordo com a definição de A_l'. Consequentemente, *os conjuntos* A_h^0, com h variável, *são disjuntos dois a dois e qualquer conjunto* $A' \neq O$ *é a* **soma** *de um ou mais conjuntos* A_h^0.

Posto isso, escolhido qualquer h, o conjunto $C_h' = \bigcap\limits_{l > h} A_l' -$ — situado em $\mathcal{A}'$, por causa de 18 *c)* no caso de existirem valores $l > h$ e por causa de 18 *a)* no caso duma intersecção vazia(**) — é simultâneamente sobreconjunto de A_h^0 e disjunto de todos os conjuntos A_l^0, com $l > h$, que houver, isso pela definição dos conjuntos A_l' e pelas propriedades da intersecção. Nesta conformidade, tem-se primeiro $A_1^0 = C_1' \in \mathcal{A}'$; depois, ou sai a relação $A_2^0 = C_2' \in \mathcal{A}'$ ou então verifica-se a igualdade $A_2^0 = C_2' - A_1^0$, de modo que a propriedade 18 *b)* dá $A_2^0 \in \mathcal{A}'$; etc., etc.; dum modo geral, supondo $h > 2$, ou resulta a relação $A_h^0 = C_h' \in \mathcal{A}'$ ou então o conjunto A_h^0 é a diferença entre C_h' e uma determinada soma não-vazia de parcelas tiradas

---

(*) Intersectem-se todos os conjuntos $A' \supset A_{h,1}$

(**) Vejam-se as linhas 6 a 8 da página 18.

da colecção $A_1^0, \ldots, A_{h-1}^0$, de modo que a hipótese $A_g^0 \in \mathcal{C}'$ para $g=1, \ldots, h-1$ e a condição 3.ª da definição dum corpo-σ conduzem também à relação $A_h^0 \in \mathcal{C}'$; etc., etc. Concluimos, daí e do acima exposto, que $\{A_1^0, A_2^0, \ldots, A_h^0, \ldots\}$ é uma decomposição irredutível de $(\Omega, \mathcal{C}')$. Está assim terminada a demonstração de N X VIII.

Vejamos agora um corolário interessante da proposição precedente.

N XVIII') «O espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{C})$ admite decomposição irredutível todas as vezes que o espaço Ω tiver uma potência finita ou numerável.»

Demonstração de N XVIII'. Suponhamos que os pontos de Ω formam a colecção finita ou numerável $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$ e que 2^Ω é o corpo-σ mais amplo definido no exemplo 20. Como o espaço mensurável $(\Omega, 2^\Omega)$ admite a decomposição irredutível $\{\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \ldots, \{\omega_n\}, \ldots\}$, basta substituir em N XVIII os símbolos $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ por 2^Ω e $\mathcal{C}$, respectivamente, para obter a proposição N XVIII'.

Por fim, dois exemplos.

Exemplo 25. Considere-se o espaço Ω cujos pontos ω são as funções reais da variável real x definidas em $O \leq x \leq 1$ e tome-se para $\mathcal{C}$ o corpo-σ de classe geradora $\mathcal{G}$ formada pelo conjunto L das funções ω limitadas, pelo conjunto C das funções ω contínuas e pelo conjunto D das funções ω com derivada finita. Então, a proposição N XVI mostra que $\{D, C-D, L-C, L^-\}$ é uma decomposição irredutível de $(\Omega, \mathcal{C})$, pois $C=D+(C-D)$ e $L=D+(C-D)+(L-C)$.

Exemplo 26. Considere-se o espaço Ω cujos pontos ω são os dez números 1, 2, ..., 10 e tome-se para $\mathcal{C}$ o corpo-σ de classe geradora $\mathcal{G}$ formada pelos quatro conjuntos $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\{2, 3, 5, 7\}$, $\{4, 5\}$ e $\{4, 8, 9\}$. Então, as proposições N XVIII' e N XV asseguram que $(\Omega, \mathcal{C})$ admite uma e uma só decomposição irredutível que vamos designar por $\mathcal{D}$. Se aplicarmos N XVI à decomposição $\mathcal{D}_1$ formada pelos três conjuntos

$\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 4, 5\} - \{4, 5\}$, $\{4, 5\}$ e $\{6, 7, 8, 9, 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}^-$, esta sai redutível, pois $\{2, 3, 5, 7\} \in \mathcal{G}$ sem ser soma extraída de $\mathcal{D}_1$, e dá, com A igual a $\{2, 3, 5, 7\}$ e com A_n sucessivamente igual a cada um dos conjuntos situados em $\mathcal{D}_1$, a nova decomposição $\mathcal{D}_2$ formada pelos seis conjuntos $\{1\}$, $\{2, 3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6, 8, 9, 10\}$ e $\{7\}$. A decomposição $\mathcal{D}_2$ é redutível, pois $\{4, 8, 9\} \in \mathcal{G}$ sem ser soma extraída de $\mathcal{D}_2$, e dá, com A igual a $\{4, 8, 9\}$ e com A_n igual a $\{6, 8, 9, 10\}$, a nova decomposição formada pelos sete conjuntos $\{1\}$, $\{2, 3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6, 10\}$, $\{7\}$ e $\{8, 9\}$, a qual coincide com $\mathcal{D}$, visto que as somas extraídas dela compreendem todos os conjuntos pertencentes a $\mathcal{G}$.

15. A recta de Borel. Nesta secção ocupar-nos-emos dum espaço mensurável especial que não admite decomposição irredutível e que é muito importante sob vários pontos de vista.

Consideremos o espaço dos números reais finitos ou seja a recta real $X(x)$ do exemplo 8. Vamos introduzir ou, talvez melhor, vamos recordar ao leitor a nomenclatura que é costume usar para referir certos conjuntos fundamentais de pontos x.

Dados dois números reais a e $b \geqq a$, qualquer deles finito ou infinito com sinal qualificado, os conjuntos $\{a < x < b\}$, $\{a \leqq x \leqq b\}$, $\{a \leqq x < b\}$ e $\{a < x \leqq b\}$ dizem-se *intervalos de* (pontos) *extremos a e b,* sendo a o extremo *esquerdo* ou *inferior* e b o extremo *direito* ou *superior.* O primeiro desses intervalos classifica-se de *aberto,* o segundo de *fechado* e qualquer dos dois últimos de *semiaberto* ou de *semifechado* (de aberto do lado do sinal $<$ e de fechado do lado do sinal $\leqq$). Notemos que o sinal $\leqq$ não pode figurar junto a um extremo infinito.

Tomemos um intervalo de extremos a e b. Ele diz-se *infinito,* quando e só quando ocorre pelo menos um dos casos $a = -\infty \neq b$ e $b = +\infty \neq a$, sendo infinito do lado esquerdo ou inferior no primeiro caso e infinito do lado direito ou superior no outro; o intervalo infinito dos dois lados coincide manifestamente com X. O intervalo considerado diz-se *finito* na hipótese de não ser infinito. Mais, diz-se *significativo* se $a<b$ e diz-se *nulo* se $a=b$. O intervalo nulo fechado de extremos a e b reduz-se ao conjunto elementar formado pelo único ponto $a=b$ e qualquer intervalo nulo que não seja fechado identifica-se com o conjunto $O\subset X$.

Quando houver conveniência em distinguir os intervalos que acabamos de descrever doutros que vamos definir mais tarde e que estão contidos em espaços reais a mais do que uma dimensão, então podemos chamar aos primeiros *intervalos lineares ou intervalos a uma dimensão.*

* * *

Posto isso, consideremos a classe $\mathcal{G}$ formada por todos os intervalos *finitos* da forma $\{a\leqq x<b\}$, isto é, fechados do lado esquerdo e abertos do lado direito. $\mathcal{G}$ gera um corpo-σ que representamos pelo símbolo $\mathcal{B}$ e que denominamos *corpo de Borel* e também *corpo de Borel linear* ou *corpo de Borel a uma dimensão* (caso haja conveniência em distingui-lo doutros corpos de Borel a definir mais tarde em espaços reais a mais do que uma dimensão). Aos conjuntos $B\in\mathcal{B}$ chamamos *conjuntos de Borel* e também *conjuntos de Borel lineares* ou *conjuntos de Borel a uma dimensão.* Ao espaço mensurável $[X(x), \mathcal{B}(B)]$, abreviadamente $(X, \mathcal{B})$, chamamos *recta de Borel* e também *espaço de Borel a uma dimensão.*

Vamos verificar em seguida que os conjuntos lineares mais acessíveis são todos conjuntos de Borel. Para começar, temos a proposição seguinte:

N XIX) «Qualquer intervalo (linear) é um conjunto de Borel.»

Demonstração de N XIX. Sejam a e $b\geqq a$ dois números reais finitos arbitrários e seja n o elemento genérico da sucessão dos números naturais. Então, a proposição N XI dá sucessivamente as relações $X=\{-\infty<x<+\infty\}\in\mathcal{B}$, $\bigcup_n\{a-n\leqq x<b\}=\{-\infty<x<b\}\in\mathcal{B}$, $\{-\infty<x<b\}^-=\{b\leqq x<+\infty\}\in\mathcal{B}$,

$\bigcup_n \{b+1/n \leqq x < +\infty\} = \{b < x < +\infty\} \in \mathscr{B}$, $\{b < x < +\infty\}^- =$
$= \{-\infty < x \leqq b\} \in \mathscr{B}$, $\{a \leqq x < +\infty\} - \{b < x < +\infty\} = \{a \leqq x \leqq b\} \in \mathscr{B}$,
$\{a \leqq x \leqq b\} - \{a \leqq x < b\} = \{b\} \in \mathscr{B}$, $\{a \leqq x \leqq b\} - \{a\} = \{a < x \leqq b\} \in \mathscr{B}$ e
$\{a \leqq x < b\} - \{a\} = \{a < x < b\} \in \mathscr{B}$, as quais provam a nossa tese.

Vejamos agora um corolário de N XIX, a saber:

N XIX') «É conjunto de Borel (linear) todo o conjunto finito ou numerável formado por números reais finitos.»

Demonstração de N XIX'. Todo o conjunto finito ou numerável de números reais finitos que seja não-vazio pode tomar a forma $\sum_n \{x_n\}$, onde o índice natural n corre de 1 até $N < +\infty$ ou até $+\infty$ e onde, fixado n de qualquer modo, se tem $x_n \in X$. Portanto, a relação $\{x_n\} \in \mathscr{B}$ para cada n, imposta por N XIX, e a condição 3.ª da definição dum corpo-σ provam o nosso corolário.

Segue outro corolário de N XIX, a saber:

N XIX'') «A recta de Borel não admite decomposição irredutível.»

Demonstração de N XIX''. A proposição N XIX mostra que os únicos conjuntos admissíveis numa decomposição irredutível de $(X, \mathscr{B})$ são conjuntos elementares, como quem diz intervalos nulos fechados. Mas, a soma dum número finito ou duma infinidade numerável de tais intervalos nunca sai igual a X. Portanto, está provada a nossa tese.

Acrescentaremos novas propriedades da recta de Borel na secção n.º 20. Por agora, segue um exemplo destinado a apresentar dois casos notáveis de conjuntos de Borel que não são abrangidos pelas proposições N XIX e N XIX'.

Exemplo 27. Considerem-se o conjunto B' formado pelos números irracionais, igual ao complemento do conjunto (numerável) formado pelos números racionais, e o conjunto

$$B'' = \{0 \leqq x \leqq 1\} - \left[\bigcup_{1 \leqq n < \infty} \left(\sum_{1 \leqq m \leqq 3^{n-1}} \left\{ \frac{3m-2}{3^n} < x < \frac{3m-1}{3^n} \right\} \right) \right],$$

igual à diferença entre um intervalo e a união duma infinidade numerável de intervalos. Logo se repara que cada um dos conjuntos B' e B'' é um conjunto de Borel sem ser intervalo e que B' tem a potência do contínuo. Além disso, se usarmos o sistema de numeração na base 3, então B'' passa a confundir-se com o conjunto das dízimas de parte inteira nula e de mantissa formada exclusivamente por algarismos iguais a 0 e a 2, conjunto este que tem a potência do contínuo, conforme pode vêr-se por um processo semelhante ao que se usou na observação posta a seguir a N 15').

* * *

Passamos a introduzir algumas classes geradoras do corpo de Borel $\mathcal{B}$ distintas da classe $\mathcal{G}$ acima considerada (formada por intervalos dependentes de dois parâmetros).

1.º *Pode tomar-se para classe geradora de $\mathcal{B}$ a classe $\mathcal{Y}$ constituída por todos os intervalos contidos na recta real.* Com efeito, a proposição N XIX dá a relação $\mathcal{G}\subset\mathcal{Y}\subset\mathcal{B}=\mathcal{G}^*$ e esta implica, por causa de 19 *c)*, a igualdade $\mathcal{Y}^*=\mathcal{B}$.

2.º *Pode tomar-se para classe geradora de $\mathcal{B}$ a classe $\mathcal{H}$ formada por todos os subconjuntos* **próprios** *da recta real que gozem da propriedade de serem intervalos abertos infinitos do lado esquerdo.* Com efeito, se atendermos à fórmula 19), não só a relação óbvia $\mathcal{H}\subset\mathcal{Y}$ força $\mathcal{H}^*\subset\mathcal{B}$, como também qualquer par de números reais finitos a e $b\geq a$ impõe, por causa da propriedade 18 *b)*, a relação $\{-\infty<x<b\}-\{-\infty<x<a\}=$ $=\{a\leq x<b\}\in\mathcal{H}^*$; logo resulta primeiro $\mathcal{G}\subset\mathcal{H}^*$, depois $\mathcal{B}\subset\mathcal{H}^*$ e, por fim, $\mathcal{H}^*=\mathcal{B}$. Note-se que a classe $\mathcal{H}$ é formada por intervalos (infinitos) dependentes dum só parâmetro.

3.º *Se Y for um subconjunto de X tal que X coincide com o conjunto dos pontos de acumulação de Y, então pode tomar-se para classe geradora de $\mathcal{B}$ a classe $\mathcal{H}'$ formada por todos os intervalos da forma $\{-\infty<x<y\}$, com $y\in Y$.* Na realidade, não só a relação óbvia $\mathcal{H}'\subset\mathcal{H}$ e a fórmula 19) arrastam $\mathcal{H}'^*\subset\mathcal{B}$, como também a cada número real finito $b\in Y^-$ corresponde

uma sucessão crescente de números $y_n (n=1,2,3,...)$ pertencentes a Y e tais que $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, donde, pela condição 3.ª da definição dum corpo-σ, a relação $\bigcup_n \{-\infty < x < y_n\} = \{-\infty < x < b\} \in \mathcal{B}'^*$; logo resulta primeiro $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'^*$ e depois $\mathcal{B}'^* = \mathcal{B}^* = \mathfrak{B}$. Note-se que a escolha do conjunto Y coincidente com o conjunto dos números racionais dá uma classe geradora $\mathcal{B}'$ *numerável.*

4.º *Escolhidos uma variável real finita u e um número real c, finito arbitrário ou infinito com sinal qualificado, então pode tomar-se para classe geradora de $\mathfrak{B}$ a classe $\mathcal{B}(c)$ constituída por todos os intervalos de extremos c e u que sejam abertos do lado direito e, simultâneamente, fechados ou abertos do lado esquerdo, fechados se $c > -\infty$ e abertos se $c = -\infty$.* Efectivamente, pondo de lado o caso $\mathcal{B}(-\infty) = \mathcal{B}$ já examinado em 2.º, fica não só a relação $\mathcal{B}(c) \subset \mathcal{G}$, como também qualquer par de números reais finitos a e $b \geqq a$ permite igualar $\{a \leqq x < b\}$ a $\{a \leqq x < c\} + \{c \leqq x < b\}$ ou a $\{c \leqq x < b\} - \{c \leqq x < a\}$ ou a $\{a \leqq x < c\} - \{b \leqq x < c\}$, conforme for $a \leqq c \leqq b$ ou $c < a$ ou $c > b$; logo resulta primeiro $\mathcal{G} \subset \mathcal{B}^*(c)$ e depois $\mathcal{B}^*(c) = \mathcal{G}^* = \mathfrak{B}$.

5.º Tome-se a classe $\mathcal{I}$ cujo elemento genérico é o complemento do elemento genérico de $\mathcal{B}$. Então, *os conjuntos que podem obter-se somando um número finito de intervalos situados na classe $\mathcal{G} + \mathcal{B} + \mathcal{I} = \mathcal{S}$ formam um corpo $\mathcal{K}$ o qual é uma classe geradora de $\mathfrak{B}$.* Antes de mais nada, a constituição de $\mathcal{K}$ e a condição 3.ª da definição dum corpo-σ dão $\mathcal{G} \subset \mathcal{K} \subset \mathfrak{B} = \mathcal{G}^*$, donde, por causa de 19 *c)*, a igualdade $\mathcal{K}^* = \mathfrak{B}$. Doutro lado, se tomarmos em conta a observação posta a seguir à fórmula 17), a classe $\mathcal{K}$, manifestamente não-vazia, sai um corpo desde que satisfaça à propriedade 17 *c)* e à condição 2.ª da definição dum corpo. Pois bem, $\mathcal{K}$ cumpre efectivamente com ambas as exigências feitas porque logo se reconhece que $K \in \mathcal{K}$ arrasta $K^- \in \mathcal{K}$ e porque a validez de N 14'), o facto que a intersecção de dois intervalos quaisquer situados em $\mathcal{S}$ se reduz a um intervalo também pertencente a $\mathcal{S}$ e a propriedade associativa da intersecção, estas três circunstâncias fazem com que a hipótese $K_1, K_2, \ldots, K_n \in \mathcal{K}$ implique a relação $K_1 \cap K_2 \cap \cdots \cap K_n \in \mathcal{K}$.

16. Restrição dum corpo-σ a um subespaço. Seja Ω' um subespaço do espaço Ω e seja $\mathcal{A}$ uma classe de conjuntos extraídos de Ω. Representamos pelo símbolo $\mathcal{A} | \Omega'$ a classe formada por todas as restrições $A | \Omega'$ tais que $A \in \mathcal{A}$ e chamamos a esta classe *restrição de* $\mathcal{A}$ *a* Ω' ou *(classe)* $\mathcal{A}$ *dado* Ω' ou $\mathcal{A}$ *na hipótese* (de se verificar) Ω' ou ainda $\mathcal{A}$ *sob a condição* (de se verificar) Ω'.

Vamos agora supor que $\mathcal{A}$ é um corpo-σ e vamos mostrar que, nesta hipótese, a classe $\mathcal{A} | \Omega'$ verifica as três condições da definição dum corpo-σ em relação a $\Omega | \Omega'$: 1.ª Não é classe vazia, pois abrange $\Omega | \Omega'$. — 2.ª Se $A | \Omega' \in \mathcal{A} | \Omega'$, tem-se $A^- \in \mathcal{A}$ e a propriedade 5 *c)* dá $(A | \Omega')^- \in \mathcal{A} | \Omega'$. — 3.ª Se $A_n | \Omega' \in \mathcal{A} | \Omega' (n = 1, 2, 3, \ldots)$, tem-se $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$ e a propriedade 5 *a)* dá $\bigcup_n (A_n | \Omega') \in \mathcal{A} | \Omega'$.

Posto isso, representamos o espaço mensurável $(\Omega | \Omega', \mathcal{A} | \Omega')$ também pelo símbolo abreviado $(\Omega, \mathcal{A}) | \Omega'$ e chamamos-lhe *restrição do espaço mensurável* $(\Omega, \mathcal{A})$ *a* Ω' ou *(espaço mensurável)* $(\Omega, \mathcal{A})$ *dado* Ω' ou $(\Omega, \mathcal{A})$ *na hipótese* (de se verificar) Ω' ou ainda $(\Omega, \mathcal{A})$ *sob a condição* (de se verificar) Ω'.

Passamos a enunciar uma proposição que relaciona as decomposições dum espaço mensurável e da restrição do mesmo a um seu subespaço.

N XX) «Se $\mathcal{D}$ for decomposição (decomposição irredutível) do espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{A})$ e se Ω' for subespaço de Ω, então a classe dos conjuntos não-vazios situados na restrição de $\mathcal{D}$ a Ω' sai uma decomposição (decomposição irredutível) da restrição de $(\Omega, \mathcal{A})$ a Ω'.»

Demonstração de N XX. Se $\mathcal{D}$ for a decomposição $\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$, a restrição $\mathcal{D} | \Omega'$ fica igual a

$\{A_1 | \Omega', A_2 | \Omega', \ldots, A_n | \Omega', \ldots\}$, com $A_n | \Omega' \in \mathcal{A} | \Omega'$, seja qual for n.

Como o exemplo 6 e a definição de decomposição dão $\sum_n (A_n | \Omega') = \Omega | \Omega'$, concluimos que a classe dos conjuntos não-vazios situados em $\mathfrak{D} | \Omega'$ é uma decomposição de $(\Omega, \mathcal{C}) | \Omega'$.

Suponhamos agora que $\mathfrak{D}$ é irredutível. Se existisse um conjunto $A | \Omega' \in \mathcal{C} | \Omega'$ que fosse subconjunto próprio de $A_n | \Omega'$ para um certo valor de n, então a propriedade N 9 *b)* e o exemplo 5 davam $A | \Omega' = (A | \Omega') \cap (A_n | \Omega') = (A \cap A_n) | \Omega'$ e, portanto, a irredutibilidade de $\mathfrak{D}$ forçava $A | \Omega'$ a sair igual a um dos dois conjuntos $O | \Omega'$ ou $A_n | \Omega'$, uma conclusão manifestamente absurda. Fica assim terminada a demonstração de N XX.

Observação. Mesmo que $\mathfrak{D}$ seja redutível, a classe dos conjuntos não-vazios situados em $\mathfrak{D} | \Omega'$ pode sair decomposição irredutível de $(\Omega, \mathcal{C}) | \Omega'$. Por exemplo, considere-se a decomposição da recta de Borel formada pelos conjuntos $\{k \leqq x < k+1\}$, com k a percorrer a sucessão dos números inteiros, e tome-se o conjunto dos números inteiros e pares para subespaço da recta real.

17. Corte feito num corpo-σ por um ponto. Consideremos o espaço-produto $\Omega = \prod_n \Omega_n$, de dois ou mais factores, uma classe $\mathcal{C}$ de conjuntos extraídos de Ω e um ponto fixo $(\omega_h^0, \omega_i^0, \ldots) \in \Omega_h \times \Omega_i \times \cdots \neq \Omega$. Atribuimos o símbolo $\mathcal{C} / (\omega_h^0, \omega_i^0, \ldots)$ e damos o nome de *corte feito na classe* $\mathcal{C}$ *pelo ponto* $(\omega_h^0, \omega_i^0, \ldots)$ à classe formada pelos cortes $A / (\omega_h^0, \omega_i^0, \ldots)$ que o ponto considerado faz nos conjuntos $A \in \mathcal{C}$.

Vamos agora supor que $\mathcal{C}$ é um corpo-σ e vamos mostrar que, nesta hipótese, a classe $\mathcal{C} / (\omega_h^0, \omega_i^0, \ldots)$ verifica as três condições da definição dum corpo-σ em relação ao espaço marginal $\Omega_{(h,i,\ldots)}$: 1.ª A classe é não-vazia, pois abrange $\Omega / (\omega_h^0, \omega_i^0, \ldots) = \Omega_{(h,i,\ldots)}$ (veja-se o texto do fim da pág. 43).— 2.ª Se $A / (\omega_h^0, \omega_i^0, \ldots) \in \mathcal{C} / (\omega_h^0, \omega_i^0, \ldots)$, tem-se $A^- \in \mathcal{C}$ e a propriedade 16 *b)* dá $[A / (\omega_h^0, \omega_i^0, \ldots)]^- \in \mathcal{C} / (\omega_h^0, \omega_i^0, \ldots)$.— 3.ª Se $A / (\omega_h^0, \omega_i^0, \ldots)$, $A' / (\omega_h^0, \omega^0, \ldots), \cdots \in \mathcal{C} / (\omega_h^0, \omega_i^0, \ldots)$, tem-se $A \cup A' \cup \cdots \in \mathcal{C}$

e a propriedade 15 *b)* dá $[A/(\omega_h^0, \omega_i^0, \ldots)] \cup [A'/(\omega_h^0, \omega_i^0, \ldots)] \cup \cup \cdots \in \mathcal{A}/(\omega_h^0, \omega_i^0, \ldots)$.

Posto isso, representamos o espaço mensurável

$$[\Omega/(\omega_h^0, \omega_i^0, \ldots), \mathcal{A}/(\omega_h^0, \omega_i^0, \ldots)]$$

também pelo símbolo abreviado $(\Omega, \mathcal{A})/(\omega_h^0, \omega_i^0, \ldots)$ e chamamos-lhe *corte feito no espaço mensurável* $(\Omega, \mathcal{A})$ *pelo ponto* $(\omega_h^0, \omega_i^0, \ldots)$.

De acordo com as considerações postas a seguir à fórmula 14), podemos afirmar que cortar uma classe de conjuntos extraídos de Ω ou um espaço mensurável por um ponto $(\omega_h^0, \omega_i^0, \ldots)$ é a mesma coisa que cortar a classe ou o espaço pelo ponto ω_h^0, cortar depois o resultado da operação anterior pelo ponto ω_i^0, etc. e podemos afirmar mais que as operações de fixação separada de cada uma das coordenadas $\omega_h^0, \omega^0, \ldots$ gozam, em qualquer dos dois casos, das propriedades comutativa e associativa.

Segue uma proposição relativa ao corte feito numa decomposição qualquer e, em especial, numa decomposição irredutível dum espaço mensurável.

N XXI) «Se Ω for um espaço-produto de dois ou mais factores e se $\mathcal{D}$ for decomposição (decomposição irredutível) do espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{A})$, então a classe dos conjuntos não-vazios situados no corte feito em $\mathcal{D}$ por um ponto pertencente a um espaço marginal de Ω sai uma decomposição (decomposição irredutível) do corte feito em $(\Omega, \mathcal{A})$ pelo ponto considerado.»

Demonstração de N XXI. Se tivermos $\Omega = \prod_n \Omega_n$, se $\mathcal{D}$ for a decomposição $\{A, A', \ldots\}$ e se fixarmos o ponto $\{\omega_h, \omega_i^0, \ldots\} \in \in \Omega_h \times \Omega_i \times \cdots \neq \Omega$, o corte $\mathcal{D}/(\omega_h^0, \omega_i^0, \ldots)$ fica igual à classe

$$\{A/(\omega_h, \omega_i^0, \ldots), A'/(\omega_h^0, \omega_i^0, \ldots), \ldots\},$$

formada por conjuntos todos situados em $\mathcal{A}/(\omega_h^0, \omega_i^0, \ldots)$. Como a propriedade 15 *b)* e a definição de decomposição dão

$[A/(\omega_h^0,\omega_i^0,\ldots)]+[A'/(\omega_h^0,\omega_i^0,\ldots)]+\cdots=\Omega_{(h,i,\ldots)}$, concluímos que a classe dos conjuntos não-vazios pertencentes a $\mathcal{D}/(\omega_h^0,\omega_i^0,\ldots)$ é uma decomposição de $(\Omega,\mathcal{A})/(\omega_h^0,\omega_i^0,\ldots)$.

Suponhamos agora que $\mathcal{D}$ é irredutível. Se existisse um conjunto $A_0/(\omega_h^0,\omega_i^0,\ldots)\in\mathcal{A}/(\omega_h^0,\omega_i^0,\ldots)$ que fosse subconjunto próprio, digamos do conjunto $A/(\omega_h^0,\omega_i^0,\ldots)$, então a propriedade N 9 *b)* e o exemplo 13 davam $A_0/(\omega_h^0,\omega_i^0,\ldots)=$ $=(A_0\cap A)/(\omega_h^0,\omega_i^0,\ldots)$ e, portanto, a irredutibilidade de $\mathcal{D}$ forçava o corte feito em A_0 a sair igual a um dos dois conjuntos $O/(\omega_h^0,\omega_i^0,\ldots)$ ou $A/(\omega_h^0,\omega_i^0,\ldots)$, uma conclusão manifestamente absurda. Fica assim terminada a demonstração de N XXI.

Observação. Mesmo que $\mathcal{D}$ seja redutível, a classe dos conjuntos não-vazios situados em $\mathcal{D}/(\omega_h^0,\omega^0,\ldots)$ pode sair decomposição irredutível de $(\Omega,\mathcal{A})/(\omega_h^0,\omega_i^0,\ldots)$. Por exemplo, se $\Omega_1=\{1,2\}$, se $\Omega_2=\{1,2\}$, se $\Omega=\Omega_1\times\Omega_2$, se $\omega_1^0=1_1$, isto é, $1\in\Omega_1$, se $\mathcal{A}$ for o corpo-σ mais amplo que pode definir-se em Ω e se $\mathcal{D}$ for a decomposição redutível de $(\Omega,\mathcal{A})$ formada pelo conjunto $\{(1,1),(2,2)\}$ e pelo complementar deste, então o corte $\mathcal{D}/1_1$ fica igual à decomposição irredutível de $(\Omega,\mathcal{A})/1_1$ formada pelos conjuntos $\{1\}$ e $\{2\}$ contidos em Ω_2.

18. Projecção e marginação dum corpo-σ. Consideremos o espaço-produto $\Omega=\prod\limits_n\Omega_n$, de dois ou mais factores, uma classe $\mathcal{A}$ de conjunto genérico $A\subset\Omega$ e o espaço $\Omega_r\times\Omega_s\times\cdots=$ $=\Omega_{(h,i,\ldots)}$ ou seja o espaço marginal de Ω com respeito a $\Omega_h\times\Omega_i\times\cdots$. Representamos pelos simbolos $\mathcal{A}_{r,s,\ldots}$ ou $\mathcal{A}_{(h,i,\ldots)}$ a classe formada pelas projecções $A_{r,s,\ldots}=A_{(h,i,\ldots)}$ correspondentes aos conjuntos A e chamamos *projecção da classe* $\mathcal{A}$ *sobre* $\Omega_{(h,i,\ldots)}$ (*e segundo a direcção de* $\Omega_h\times\Omega_i\times\cdots$) quer à operação que transforma $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}_{(h,i,\ldots)}$ quer ao resultado desta operação.

Se $\mathcal{C}$ for a classe formada pelos cilindros $C\in\mathcal{A}$ de geratrizes paralelas a $\Omega_h,\Omega_i,\ldots$, a classe $\mathcal{C}_{r,s,\ldots}=\mathcal{C}_{(h,i,\ldots)}$, a das bases $C_{r,s,\ldots}=C_{(h,i,\ldots)}$ correspondentes aos conjuntos C, sai evidentemente uma subclasse de $\mathcal{A}_{(h,i,\ldots)}$. Chamamos *margi-*

nação da classe $\mathcal{A}$ *com respeito a* $\Omega_h \times \Omega_i \times \cdots$ à operação que transforma $\mathcal{A}$ em $\mathcal{C}_{(h,i,\ldots)}$ e damos o nome de *base ou classe marginal de* $\mathcal{A}$ *em* $\Omega_{(h,i,\ldots)}$ ao resultado dessa operação.

De acordo com as considerações feitas a propósito das fórmulas 11) e 11') e com as propriedades dos cilindros de geratrizes paralelas a $\Omega_h, \Omega_i, \ldots$, podemos afirmar o seguinte: As transformações de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}_{(h,i,\ldots)}$ e em $\mathcal{C}_{(h,i,\ldots)}$ são ambas operações uniformes, mas em geral não são univalentes; mais, qualquer destas operações é equivalente a uma sucessão de operações simples do mesmo género as quais eliminam, a primeira o espaço-factor Ω_h, a segunda o espaço-factor Ω_i, etc., gozando essas eliminações das propriedades comutativa e associativa.

Partindo agora da hipótese que $\mathcal{A}$ é um corpo-σ, vamos mostrar que a classe $\mathcal{A}_{(h,i,\ldots)}$ verifica as condições 1.ª e 3.ª, mas escusa de satisfazer à condição 2.ª da definição dum corpo-σ em relação a $\Omega_{(h,i,\ldots)}$: 1.ª A classe é não-vazia, pois abrange $\Omega_{(h,i,\ldots)}$.—2.ª Se Ω for o espaço-produto de dois factores citado na última observação, se $A = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$ e se $\mathcal{A} = \{O, A, A^-, \Omega\}$, então $\mathcal{A}_{(2)}$ compõe-se dos três conjuntos $\Omega_{(2)} = \Omega_1, \{2\}$ e $O_{(2)} \subset \Omega_1$, donde $\{2\}^- \notin \mathcal{A}_{(2)}$.—3.ª Se $A_{(h,i,\ldots)}$, $A'_{(h,i,\ldots)}, \ldots \in \mathcal{A}_{(h,i,\ldots)}$, tem-se $A \cup A' \cup \cdots \in \mathcal{A}$ e a propriedade 12 *b)* dá $A_{(h,i,\ldots)} \cup A'_{(h,i,\ldots)} \cup \cdots \in \mathcal{A}_{(h,i,\ldots)}$.

Acabamos de ver que $\mathcal{A}$, suposto um corpo-σ, não se projecta necessàriamente sobre $\Omega_{(h,i,\ldots)}$ segundo um corpo-σ. Todavia, a marginação de $\mathcal{A}$ com respeito a $\Omega_h \times \Omega_i \times \cdots$ produz sempre um corpo-σ. Na realidade, como a proposição XVIII força a classe de cilindros $\mathcal{C}$ acima mencionada a sair um corpo-σ, todo o ponto $(\omega_h^0, \omega_i^0, \ldots) \in \Omega_h \times \Omega_i \times \cdots$ dá um corte $\mathcal{C}/(\omega_h^0, \omega_i^0, \ldots)$ que é também um corpo-σ e a dedução fica completa se tomarmos em conta que a fórmula 14') impõe a relação entre classes

20) $\mathcal{C}_{(h,i,j,\ldots)} = \mathcal{C}/(\omega_h^0, \omega_i^0, \omega_j^0, \ldots)$
para qualquer ponto $(\omega_h^0, \omega_i^0, \omega_j^0, \ldots)$.

Posto isso, representamos o espaço mensurável $(\Omega_{(h,i,\ldots)}, \mathcal{C}_{(h,i,\ldots)})$ também pelos símbolos abreviados

$(\Omega, \mathfrak{A})_{(h,i,\ldots)}$ ou $(\Omega, \mathfrak{A})_{r,s,\ldots}$ e chamamos-lhe *base ou espaço mensurável marginal de* $(\Omega, \mathfrak{A})$ *em* $\Omega_{(h,i,\ldots)}$. A operação que leva à formação de $(\Omega, \mathfrak{A})_{(h,i,\ldots)}$ diz-se *marginação de* $(\Omega, \mathfrak{A})$ *com respeito a* $\Omega_h \times \Omega_i \times \cdots$ e goza òbviamente de propriedades decalcadas das inerentes à marginação de $\mathfrak{A}$.

Exemplo 28. O leitor pode provar o seguinte: Se $\mathfrak{A}$ for o corpo-σ mais (ou menos) amplo que pode definir-se em Ω, a base $\mathfrak{C}_{(h,i,\ldots)}$ sai o corpo-σ mais (ou menos) amplo que pode instituir-se em $\Omega_{(h,i,\ldots)}$ (veja-se o princípio da pág. 40).

* * *

Segue uma proposição relativa às decomposições de bases dum espaço mensurável.

NXXII) «Seja $\mathfrak{A}$ um corpo-σ definido no espaço-produto $\Omega = \prod_n \Omega_n$ e seja $\mathfrak{C}$ a classe dos cilindros que pertencem a $\mathfrak{A}$ e que têm geratrizes paralelas aos espaços-factores $\Omega_h, \Omega_i, \ldots$. Então, para que uma classe de conjuntos forme uma decomposição (decomposição irredutível) da base do espaço mensurável $(\Omega, \mathfrak{A})$ no espaço marginal $\Omega_{(h,i,\ldots)}$, é condição necessária e suficiente que ela resulte da marginação, com respeito ao espaço-produto $\Omega_h \times \Omega_i \times \cdots$, duma decomposição (decomposição irredutível) do espaço mensurável $(\Omega, \mathfrak{C})$. Em particular, se $(\Omega, \mathfrak{A})$ admitir uma decomposição irredutível, o mesmo sucede à base de $(\Omega, \mathfrak{A})$ em $\Omega_{(h,i,\ldots)}$.»

Demonstração de N XXII. Vamos dividir a demonstração em três fases.

1.ª *fase*. Se $\mathfrak{D} = \{C, C', \ldots\}$ for uma decomposição de $(\Omega, \mathfrak{C})$, a propriedade 12'*b*) e a circunstância que a univalência da marginação(*) obriga a base dum cilindro não-vazio a sair não-vazia, estes dois factos provam que a classe $\mathfrak{D}_{(h,i,\ldots)} = \{C_{(h,i,\ldots)}, C'_{(h,i,\ldots)}, \ldots\}$ forma uma decomposição do espaço

(*) Evidentemente, a marginação do texto refere-se a conjuntos e *não* a classes.

mensurável $(\Omega, \mathcal{C})_{(h,i,\ldots)} = (\Omega, \mathcal{A})_{(h,i,\ldots)}$. Inversamente, tal decomposição constitui sempre uma classe de bases correspondentes a cilindros situados em $\mathcal{C}$, os quais são não-vazios e têm por soma Ω.

2.ª *fase*. Se $\mathcal{D}$ for decomposição irredutível de $(\Omega, \mathcal{C})$ e só neste caso, a parte final de N XIV, a propriedade 12′ *b)* e a fase 1.ª da demonstração actual conduzem a uma base $\mathcal{D}_{(h,i,\ldots)}$ que é decomposição irredutível de $(\Omega, \mathcal{A})_{(h,i,\ldots)}$.

3.ª *fase*. Se $(\Omega, \mathcal{A})$ admitir uma decomposição irredutível, o mesmo sucede a $(\Omega, \mathcal{C})$, por causa de N XVIII, de modo que podemos aplicar a fase 2.ª da nossa demonstração.

Observação. A base $(\Omega, \mathcal{A})_{(h,i,\ldots)}$ pode ter decomposição irredutível mesmo que $(\Omega, \mathcal{A})$ não a tenha. Por exemplo, se $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, onde Ω_1 é uma recta real e Ω_2 é um espaço com potência finita ou numerável, e se $\mathcal{A}$ designar o corpo-σ mais amplo que pode definir-se em Ω, então a base $(\Omega_{(1)}, \mathcal{C}_{(1)})$, com $\Omega_{(1)} = \Omega_2$, admite decomposição irredutível, por causa de N XVIII′, e é absurdo supor que $(\Omega, \mathcal{A})$ possui decomposição irredutível porque tal hipótese e as proposições N XVIII e N XXII davam uma decomposição irredutível para $(\Omega, \mathcal{A}')_{(2)}$, onde $\mathcal{A}'$ significa o corpo-σ formado pelos cilindros com base de Borel em Ω_1 e com geratrizes paralelas a Ω_2, produzindo assim um conflito com a asserção feita em N XIX″.

Para terminar, apresentamos uma proposição de que nos serviremos na secção seguinte.

N XXIII) «Suponhamos que os conjuntos duma classe $\mathcal{C}$ definida num espaço-produto são cilindros de bases extraídas do mesmo espaço marginal Ω'. Então, se tomarmos bases em Ω', o corpo-σ gerado pela base de $\mathcal{C}$ coincide com a base do corpo-σ gerado por $\mathcal{C}$.»

Demonstração de N XXIII. Designamos o espaço-produto do enunciado pelo símbolo Ω e representamos as bases de $\mathcal{C}$ e de $\mathcal{C}^*$ em Ω' por $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{C}^{*\prime}$, respectivamente. Então, as propriedades da marginação instituem uma correspondência biunívoca, classe por classe, a qual emparceira cada corpo-σ que é definido em Ω' e que contém $\mathcal{C}'$ com o corpo-σ formado por cilindros que é definido em Ω, que contém $\mathcal{C}$ e que admite o primeiro corpo-σ como base. Concluímos daí que $\mathcal{C}'^*$, o corpo-σ gerado por $\mathcal{C}'$, é a base da intersecção de todos os corpos-σ tais que contêm $\mathcal{C}$ e que se compõem de cilindros com bases extraídas de Ω'. Doutro lado, se $\mathcal{A}$ for um corpo-σ arbitrário que contenha $\mathcal{C}$, então $\mathcal{A}$ sai sobreclasse do corpo-σ, digamos $\mathcal{Z}$, que goza das propriedades de conter $\mathcal{C}$ e de se compor dos cilindros situados em $\mathcal{A}$ e dotados de bases extraídas de Ω' [veja-se o texto anterior a 20), com $\mathcal{C}$ substituído por $\mathcal{Z}$]. Portanto, resulta $\mathcal{C}'^* = \mathcal{C}^{*\prime}$ e fica assim completada a nossa demonstração.

19. A multiplicação de classes quaisquer e, em especial, de corpos-σ. Consideremos os espaços $\Omega_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$, formando uma colecção finita ou numerável, e suponhamos que em cada Ω_n se encontra definida uma classe $\mathcal{A}_n$ de conjunto genérico A_n. Então, a classe dos produtos $\prod\limits_n A_n$ possíveis, definida no espaço-produto $\Omega = \prod\limits_n \Omega_n$, gera um corpo-$\sigma$ que representamos pelo símbolo $\prod\limits_n \mathcal{A}_n$ ou, abreviadamente, por $\mathcal{A}$ e a que corresponde o espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{A}) = (\prod\limits_n \Omega_n, \prod\limits_n \mathcal{A}_n)$. Nesta conformidade, podemos dizer que $\mathcal{A}$ resulta da *multiplicação* das classes $\mathcal{A}_n$ ou que $\mathcal{A}$ é o *produto dos factores* $\mathcal{A}_n$.

A definição dada implica que é um corpo-σ qualquer produto dum número finito ou duma infinidade numerável de classes. Esta propriedade acarretar-nos-á diversas vantagens notacionais as quais compensarão o pequeno inconveniente de haver necessidade de distinção entre a classe $\mathcal{A}_1$, por exemplo, e o produto $\prod\limits_{n=1} \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1^*$.

Nada impede que se escolham as classes-factores $\mathcal{A}_n$ de modo tal que cada uma delas seja um corpo-σ. Neste caso particular, podemos dizer que $(\Omega, \mathcal{A})$ resulta da *multiplicação* dos espaços mensuráveis $(\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ ou que $(\Omega, \mathcal{A})$ é o *produto dos* *factores* $(\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ e podemos figurar a situação pondo a igualdade simbólica

$$21)\qquad (\Omega, \mathcal{A}) = (\prod_n \Omega_n, \prod_n \mathcal{A}_n) = \prod_n (\Omega_n, \mathcal{A}_n).$$

Observação. Mesmo que cada uma das classes-factores $\mathcal{A}_n$ seja um corpo-σ, a classe dos produtos $\prod_n A_n$, geradora de $\mathcal{A}$, não costuma sair um corpo-σ definido em Ω. Assim, se tivermos $\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4\} = \Omega_2$ e se $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ forem, respectivamente, o primeiro e o segundo dos dois corpos-σ definidos no exemplo 19, a classe dos produtos $A_1 \times A_2$ compõe-se de dez conjuntos distintos, a saber $O \subset \Omega_1 \times \Omega_2$, o espaço $\Omega_1 \times \Omega_2$, os dois cilindros de geratrizes paralelas a Ω_1 cujas bases em Ω_2 são os conjuntos $\{1\}$ e $\{2, 3, 4\}$, os dois cilindros de geratrizes paralelas a Ω_2 cujas bases em Ω_1 são os conjuntos $\{1, 2\}$ e $\{3, 4\}$ e mais os quatro produtos $\{(1,1), (2,1)\}$, $\{(3, 1), (4, 1)\}$, $\{(1, 2), (2, 2), (1, 3), (2, 3), (1, 4), (2, 4)\}$ e $\{(3, 2), (4, 2), (3, 3), (4, 3), (3, 4), (4, 4)\}$, quando a proposição N XVII torna impossível a existência dum corpo-σ com dez conjuntos.

Segue uma proposição que esclarece o modo como a multiplicação dum número finito de espaços mensuráveis se reflecte nas suas decomposições.

N XXIV) «Suponhamos que $(\Omega, \mathcal{A})$ é o produto dos espaços mensuráveis $(\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ $(n = 1, 2, \ldots, N < +\infty)$ e que ao espaço-factor de índice genérico n corresponde uma decomposição $\mathcal{D}_n$ de conjunto genérico A_{n, p_n}. Então, a classe dos produtos da forma $A_{1, p_1} \times A_{2, p_2} \times \cdots \times A_{N, p_N}$ sai uma decomposição de $(\Omega, \mathcal{A})$, a qual fica irredutível quando e só quando todas as decomposições $\mathcal{D}_n$ forem irredutíveis.»

Demonstração de N XXIV. A definição de decomposição dum espaço mensurável e a igualdade 8') dão a relação

$$\Omega = \prod_n (\sum_{p_n} A_{n, p_n}) = \sum_{p_1, p_2, \ldots, p_N} (A_{1, p_1} \times A_{2, p_2} \times \cdots \times A_{N, p_N}),$$

onde as parcelas do último somatório, todas não-vazias, pertencem a $\mathcal{A}$ e, portanto, formam uma classe $\mathcal{D}$ que é decomposição de $(\Omega, \mathcal{A})$.

A proposição N VI mostra que $\mathcal{D}$ sai redutível quando alguma das N decomposições $\mathcal{D}_n$ for redutível. Mais, se as decomposições $\mathcal{D}_n$ forem *todas* irredutíveis, então, dado n, qualquer conjunto $A_n \in \mathcal{A}_n$ fica situado na classe $\mathcal{S}_n$ das somas extraídas de $\mathcal{D}_n$, por causa de N XIV, e, portanto, qualquer conjunto $\prod_n A_n$ pertence à classe $\mathcal{S}$ das somas extraídas de $\mathcal{D}$, donde, atendendo a 19), a relação $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$, a qual prova primeiro que $\mathcal{S} = \mathcal{A}$ e depois que $\mathcal{D}$ sai irredutível. Fica assim completada a demonstração de N XXIV.

Exemplo 29. Retomemos os dois espaços mensuráveis $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ e $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ da última observação, o primeiro com a decomposição irredutível formada pelos conjuntos $\{1, 2\}$ e $\{3, 4\}$ e o outro com a decomposição irredutível formada pelos conjuntos $\{1\}$ e $\{2, 3, 4\}$. Então, a classe formada pelos últimos quatro dos dez conjuntos $A_1 \times A_2$ mencionados é uma decomposição irredutível de $(\Omega_1, \mathcal{A}_1) \times (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$, isso por causa de N XXIV. Logo a proposição N XVII força $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ a ter $2^4 = 16$ conjuntos, os dez conjuntos $A_1 \times A_2$ e mais seis que o leitor fàcilmente constroi.

Exemplo 30. Se tivermos uma infinidade numerável de espaços mensuráveis $(\Omega_n, \mathcal{A}_n)$, se a cada n corresponder uma decomposição $\mathcal{D}_n$ de conjunto genérico A_{n, p_n} e se $\mathcal{D}_n \neq \{\Omega_n\}$ para uma infinidade de valores de n, então a classe $\mathcal{C}$ dos produtos $\prod_n A_{n, p_n}$, *disjuntos dois a dois,* não pode ter potência inferior à do contínuo, como pode vêr-se por um método semelhante ao método usado na observação feita a seguir a N 15'). Posto isso, é absurdo admitir a existência duma decomposição irredutível $\mathcal{D}$ do espaço mensurável $\prod_n (\Omega_n, \mathcal{A}_n)$, pois tal existência e a proposição N XIV forçariam qualquer conjunto situado em $\mathcal{C}$ a sair uma *soma* extraída de $\mathcal{D}$ e, portanto, confeririam à classe $\mathcal{C}$ uma potência quando muito igual à do numerável.

* * *

Vejamos agora algumas propriedades importantes da multiplicação de classes, de corpos-σ e de espaços mensuráveis. Para começar, vamos enunciar a proposição seguinte:

N XXV) «Dados os espaços Ω_n, formando uma colecção finita ou numerável, e dadas as classes $\mathcal{A}_n$ tais que Ω_n pertence a $\mathcal{A}_n$ para cada n, então o produto das classes consideradas não se altera se substituirmos um factor qualquer $\mathcal{A}_n$, que seja corpo-σ, por uma classe geradora construída de maneira que o espaço Ω_n em que ela se encontra definida possa igualar-se à união dum número finito ou duma infinidade numerável de conjuntos situados na classe.»

Demonstração de N XXV. Designemos o conjunto genérico de qualquer classe $\mathcal{A}$ afectada dum índice pelo símbolo A afectado do mesmo índice e substituamos um qualquer dos factores $\mathcal{A}_n$, que seja corpo-σ, por uma classe geradora $\mathcal{G}_n$ de conjunto genérico G_n. Então, a relação óbvia $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{A}_n$ e a propriedade 19 *b)* implicam que $\mathcal{G} = \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_{n-1} \times \mathcal{G}_n \times \times \mathcal{A}_{n+1} \times \cdots$, o corpo-$\sigma$ gerado pela classe dos produtos possíveis $A_1 \times \cdots \times A_{n-1} \times G_n \times A_{n+1} \times \cdots$, saia subclasse de $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_{n-1} \times \mathcal{A}_n \times \mathcal{A}_{n+1} \times \cdots$, o corpo-$\sigma$ gerado pela classe, seja $\mathcal{P}$, dos produtos possíveis $A_1 \times \cdots \times A_{n-1} \times A_n \times A_{n+1} \times \cdots$.

Representemos agora por $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ e $\mathcal{E}$ as classes dos cilindros da forma $\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{n-1} \times G_n \times \Omega_{n+1} \times \cdots$, $\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{n-1} \times A_n \times \Omega_{n+1} \times \cdots$ e $A_1 \times \cdots \times A_{n-1} \times \Omega_n \times A_{n+1} \times \cdots$, respectivamente. Como $\mathcal{C}$ é subclasse da classe geradora de $\mathcal{G}$ e como a proposição N XXIII impõe a igualdade $\mathcal{C}^*_{(1,\ldots,n-1,n+1,\ldots)} = \mathcal{G}^*_n = \mathcal{A}_n$, a qual só é possível com $\mathcal{C}^* = \mathcal{D}$, tiramos de 19 *b)* e de 19 *a)* que se verifica a relação $\mathcal{D} \subset \mathcal{G}$. Doutro lado, se admitirmos que existem conjuntos $G_{n,p} \in \mathcal{G}_n$, formando uma classe finita ou numerável e tais que $\bigcup_p G_{n,p} = \Omega_n$, então, sejam quais forem os conjuntos mensuráveis $A_1, \ldots, A_{n-1}, A_{n+1}, \ldots$, a hipótese da associatividade da multiplicação de conjuntos, a propriedade 8) e a condição 3.ª da definição dum corpo-σ dão

$$\bigcup_p (A_1\times\cdots\times A_{n-1}\times G_{n,p}\times A_{n+1}\times\cdots)=$$
$$=(A_1\times\cdots\times A_{n-1})\times(\bigcup_p G_{n,p})\times(A_{n+1}\times\cdots)=$$
$$=A_1\times\cdots\times A_{n-1}\times\Omega_n\times A_{n+1}\times\cdots\in\mathcal{G},$$

donde concluimos que se verifica a relação $\mathcal{E}\subset\mathcal{G}$.

Ora bem, qualquer conjunto pertencente a $\mathcal{P}$ é, por causa de 10), a intersecção dum conjunto situado em $\mathcal{D}$ com um conjunto situado em $\mathcal{E}$. Este facto e a propriedade 18 *c)* provam a relação $\mathcal{P}\subset\mathcal{G}$, a qual, juntamente com a relação já deduzida $\mathcal{G}\subset\mathcal{A}=\mathcal{P}^*$ e com as propriedades 19 *c)* e 19 *a)*, conduz à igualdade $\mathcal{G}=\mathcal{A}$ ou seja à tese afirmada no nosso enunciado.

Observação. A condição imposta à classe geradora $\mathcal{G}_n$ no enunciado de N XXV não pode ser dispensada. Por exemplo, se tomarmos os espaços mensuráveis do exemplo 29 e se substituirmos $\mathcal{A}_2$ pela classe geradora elementar $\mathcal{G}_2$ formada pelo (único) conjunto $\{1\}$, então o produto $\mathcal{A}_1\times\mathcal{G}_2$, gerado pela classe dos quatro conjuntos $O\subset\Omega_1\times\Omega_2, \{(1,1),(2,1)\}$, $\{(3,1),(4,1)\}$ e $\Omega_1\times\{1\}$, admite uma decomposição irredutível formada por três conjuntos(*) e, portanto, tendo 8 conjuntos, encontra-se impossibilitado de coincidir com o produto $\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2$ (formado por 16 conjuntos).

A próxima proposição trata da associatividade do tipo de multiplicação que estamos a estudar.

N XXVI) «Quando se trabalha com um número finito ou com uma infinidade numerável de factores, a propriedade associativa da multiplicação de conjuntos transmite-se à multiplicação de classes, de corpos-σ e de espaços mensuráveis.»

Demonstração de N XXVI. Suponhamos que em cada um dos espaços Ω_n, formando uma colecção finita ou nume-

(*) Esta decomposição irredutível constrói-se fàcilmente com o auxílio da proposição N XVI.

Nota—O enunciado completo de N XXVI é o seguinte:

N XXVI) «Quando se trabalha com um número finito ou com uma infinidade numerável de factores, a propriedade associativa da multiplicação de conjuntos transmite-se à multiplicação de classes desde que cada uma destas goze da propriedade seguinte: Pertencem-lhe conjuntos que formam uma colecção finita ou numerável e que têm união igual ao espaço correspondente.

Em aditamento, saem sempre associativas a multiplicação de corpos [-σ] e a de espaços mensuráveis.»

rável com produto igual a Ω, se encontra definida uma classe $\mathcal{A}_n$ de conjunto genérico A_n a qual goza da propriedade referida no enunciado.

Seja $\mathcal{A}'$ o corpo-σ que se obtém multiplicando certas classes $\mathcal{A}_n$ de índices consecutivos, seja Ω' o espaço-produto em que se encontra definida a classe $\mathcal{A}'$, seja Ω'' o espaço marginal de Ω com respeito a Ω' e seja $\mathcal{Q}$ a classe cujo conjunto genérico resulta do produto genérico $\prod\limits_n A_n$ quando se substituem os produtos parciais situados em $\mathcal{A}'$ por conjuntos arbitrários situados em $\mathcal{A}'$. Então, como a propriedade 19 *b)* dá $\mathcal{A} \subset \mathcal{Q}^*$, com $\mathcal{A} = \prod\limits_n \mathcal{A}_n$, só falta deduzir a relação $\mathcal{Q}^* \subset \mathcal{A}$ para que fique demonstrada a parte principal da tese.

Posto isso, representemos por $\mathcal{C}$ a classe dos cilindros com base da forma $\prod\limits_q A_q \in \mathcal{A}'$ e com geratrizes paralelas a (cada um dos factores de) Ω'', representemos por $\mathcal{D}$ a classe de todos os cilindros com base situada em $\mathcal{A}'$ e com geratrizes paralelas a Ω'' e representemos por $\mathcal{E}$ a classe dos cilindros com base da forma $\prod\limits_r A_r \subset \Omega''$ e com geratrizes paralelas a (cada um dos factores de) Ω'. Ora bem, se substituirmos, no texto da demonstração de N XXV, os índices $1, \ldots, n-1, n+1, \ldots$ pela colecção dos índices r e os conjuntos G_n, A_n e Ω_n pelo produto genérico $\prod\limits_q A_q$, pelo conjunto genérico de $\mathcal{A}'$ e pelo espaço Ω', respectivamente, então concluímos, com o auxílio de N XXIII, que $\mathcal{C}^*=\mathcal{D}$ e concluímos ainda, por cálculos orientados no estilo das primeiras linhas da página 80, que $\mathcal{C}\subset\mathcal{A}$ e que $\mathcal{E}\subset\mathcal{A}$. A seguir, as relações $\mathcal{C}\subset\mathcal{A}$ e $\mathcal{C}^*=\mathcal{D}$ dão $\mathcal{D}\subset\mathcal{A}$ e as relações $\mathcal{D}\subset\mathcal{A}$ e $\mathcal{E}\subset\mathcal{A}$ dão $\mathcal{Q}^*\subset\mathcal{A}$ ou seja o resultado pretendido.(*)

Passamos para a parte complementar da tese. Em primeiro lugar, é evidente que um corpo [-σ] é sempre uma classe que goza da propriedade referida no enunciado. Depois, a associatividade da multiplicação de espaços mensuráveis decorre, sem dificuldade, da segunda parte de 21).

Observação. A condição imposta a cada uma das classes-factores do enunciado de N XXVI não pode ser dispensada, conforme mostra o caso $\Omega_1=\Omega_2=\Omega_3=\{1,2\}$ e $\mathcal{A}_1=\mathcal{A}_2=$ $=\mathcal{A}_3=\{\{1\}\}$.

Vejamos agora uma proposição relativa ao corte que um ponto faz num produto de corpos-σ.

N XXVII) «Dada uma colecção finita ou numerável de espaços mensuráveis $(\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ de produto igual a $(\Omega, \mathcal{A})$, então o corpo-σ que se designa por $\mathcal{A}_r\times\mathcal{A}_s\times\mathcal{A}_t\times\cdots$ [o espaço mensurável $(\Omega_r, \mathcal{A}_r)\times(\Omega_s, \mathcal{A}_s)\times(\Omega_t, \mathcal{A}_t)\times\cdots$] coincide com o corte feito em $\mathcal{A}$ [em $(\Omega, \mathcal{A})$] por *qualquer* ponto situado no espaço marginal $\Omega_{(r,s,t,\ldots)}$.»

Demonstração de N XXVII. Representemos por $\mathcal{P}$ a classe formada por todos os conjuntos que são produtos da forma $\prod_n A_n$, com $A_n\in\mathcal{A}_n$ para cada n, e recordemos que, escolhido qualquer ponto $\omega^0_{(r,s,\ldots)}\in\Omega_{(r,s,\ldots)}$, o princípio da secção n.º 17 mostra que o corte $(\Omega, \mathcal{A})/\omega^0_{(r,s,\ldots)}$ é um espaço mensurável sujeito à igualdade $\Omega/\omega^0_{(r,s,\ldots)}=\Omega_r\times\Omega_s\times\cdots$. Nesta conformidade, a tese do enunciado sai equivalente à afirmação que coincidem os *corpos-σ* designados por $\mathcal{A}/\omega^0_{(r,s,\ldots)}$ e por $\mathcal{A}_r\times$ $\times\mathcal{A}_s\times\cdots$, respectivamente.

(*) Quando o número de valores do índice q se reduz a 1, resulta uma associatividade especial correspondente à convenção $\prod_{n=q}\mathcal{A}_n=\mathcal{A}^*_q$ feita no princípio desta secção e resulta também uma variante da proposição N XXV a qual isenta cada um dos espaços Ω_r da obrigação de pertencer a $\mathcal{A}_r$.

Seja qual for o conjunto $P \in \mathcal{P}$ com a particularidade de ser $A_n = \Omega_n$ para $n \neq r, s, \ldots$, tem-se a igualdade $P / \omega^0_{(r,s,\ldots)} = A_r \times A_s \times \cdots$, a qual prova que a classe geradora de $\mathcal{A}_r \times \mathcal{A}_s \times \cdots$ está contida em $\mathcal{A} / \omega^0_{(r,s,\ldots)}$. Logo verifica-se a relação de inclusão $\mathcal{A}_r \times \mathcal{A}_s \times \cdots \subset \mathcal{A} / \omega^0_{(r,s,\ldots)}$ e só falta deduzir a relação de inclusão oposta.

Representemos por $\mathcal{A}^0$ a subclasse de $\mathcal{A}$ formada pelos conjuntos A tais que $A / \omega^0_{(r,s,\ldots)} \in \mathcal{A}_r \times \mathcal{A}_s \times \cdots$. Ora bem, $\mathcal{A}^0 \supset \mathcal{P}$ porque o ponto escolhido faz em todo o conjunto $P \in \mathcal{P}$ um corte que ou é vazio ou é igual a $A_r \times A_s \times \cdots$. Mais, $\mathcal{A}^0$ é um corpo-σ visto que a hipótese $A \in \mathcal{A}^0$ implica $A^- \in \mathcal{A}^0$, isso por causa de 16 *b)*, e visto que a hipótese $A, A', A'', \ldots \in \mathcal{A}^0$ implica $A \cup A' \cup A'' \cup \cdots \in \mathcal{A}^0$, isso por causa de 15 *b)*. Portanto, $\mathcal{A}^0 = \mathcal{A}$, donde $\mathcal{A}_r \times \mathcal{A}_s \times \cdots \supset \mathcal{A} / \omega^0_{(r,s,\ldots)}$. Fica assim completada a nossa demonstração.

A proposição N XXVII admite dois corolários que vão revelar-se úteis numa fase posterior do nosso estudo. Eis o primeiro.

N XXVII') «São dados os espaços mensuráveis $(\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ e $(\Omega, \mathcal{A})$ da proposição N XXVII. Então, um conjunto não-vazio da forma $\prod_n S_n$, com $S_n \subset \Omega_n$ para cada n, só pode pertencer a $\mathcal{A}$ desde que se tenha a relação $S_n \in \mathcal{A}_n$, seja qual for n.»

Demonstração de N XXVII'. Suponhamos que $A = \prod_n S_n \in \mathcal{A}$, que $A \neq O$ e que existe um valor r do índice n tal que $S \in \mathcal{A}_r^-$. Como qualquer ponto $\omega^0_{(r)} = (\omega^0_1, \ldots, \omega^0_{r-1}, \omega^0_{r+1}, \ldots) \in S_1 \times \cdots \times S_{r-1} \times S_{r+1} \times \cdots$ torna $A / \omega^0_{(r)} = S_r$, sai $\mathcal{A} / \omega^0_{(r)} \neq \mathcal{A}_r$ e, portanto, resulta uma incompatibilidade com N XXVII. Consequentemente, o nosso corolário fica demonstrado por redução ao absurdo.

Passamos agora ao segundo dos corolários anunciados.

N XXVII'') «São dados os espaços mensuráveis $(\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ e $(\Omega, \mathcal{A})$ da proposição N XXVII. Então, o corpo-σ [o espaço mensurável] marginal da classe $\mathcal{A}$ [do espaço mensurável

$(\Omega, \mathcal{A})]$ no espaço $\Omega_r \times \Omega_s \times \Omega_t \times \cdots$ coincide com a classe $\mathcal{A}_r \times \mathcal{A}_s \times \mathcal{A}_t \times \cdots$ [com o espaço mensurável $(\Omega_r, \mathcal{A}_r) \times (\Omega_s, \mathcal{A}_s) \times \times (\Omega_t, \mathcal{A}_t) \times \cdots$].»

Demonstração de N XXVII$''$. Seja $\mathcal{C}$ o corpo-σ formado pelos cilindros de $\mathcal{A}$ que têm geratrizes paralelas a (cada um dos espaços-factores de) $\Omega_{(r,s,\ldots)}$ e seja $\omega^0_{(r,s,\ldots)}$ um ponto fixo situado em $\Omega_{(r,s,\ldots)}$. Nesta conformidade, a relação 20) e a definição de espaço marginal de $(\Omega, \mathcal{A})$ em $\Omega_r \times \Omega_s \times \cdots$ mostram que a tese do enunciado se verifica, quando e só quando o corpo-σ designado por $\mathcal{C} / \omega^0_{(r,s,\ldots)}$ coincide com o corpo-σ designado por $\mathcal{A}_r \times \mathcal{A}_s \times \cdots$. Como $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ e como vale N XXVII, só falta deduzir a relação de inclusão $\mathcal{A}_r \times \mathcal{A}_s \times \cdots \subset \mathcal{C} / \omega^0_{(r,s,\ldots)}$. Mas, esta relação sai do segundo trecho da demonstração de N XXVII se nele substituirmos $\mathcal{A}$ por $\mathcal{C}$.

* * *

Fechamos esta secção com duas proposições sobre corpos geradores de produtos de classes. Eis a primeira.

N XXVIII) «Suponhamos que em cada um dos espaços Ω_n $(n = 1, 2, \ldots, N)$ se encontra definido um corpo $\mathcal{A}_n$ de conjunto genérico A_n. Então, os conjuntos que podem obter-se, somando um número finito de produtos do tipo $A_1 \times A_2 \times \cdots \cdots \times A_N$, formam um corpo definido no espaço $\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_N$, o qual é uma classe geradora do produto $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 \times \cdots \times \mathcal{A}_N$.»

Demonstração de N XXVIII. A classe $\mathcal{S}$ das somas dum número finito de produtos do tipo $\prod_n A_n$ é, evidentemente, não-vazia e é também geradora de $\prod_n \mathcal{A}_n$, isso por causa da condição 3.ª que figura na definição dum corpo-σ e por causa da propriedade 19 *c)*. Portanto, só falta provar que $\mathcal{S}$ verifica as condições 2.ª e 3.ª da definição dum corpo.

Ora, dado um conjunto $U = \bigcup_{1 \leq p \leq P} \left(\prod_{1 \leq n \leq N} A_{n,p} \right)$ tal que, seja qual for p, se tem $A_{n,p} \in \mathcal{A}_n$ para cada n, então a relação

N 10 *a)*, a relação 9) devidamente adaptada e a convenção $2^N - 1 = L$ permitem escrever a igualdade

$$U^- = \bigcap_{1 \leq p \leq P} \Big(\prod_{1 \leq n \leq N} A_{n,p} \Big)^- = \bigcap_{1 \leq p \leq P} \Big[\sum_{1 \leq l \leq L} A^0_{p,l} \Big],$$

onde, fixado de qualquer modo o índice p, os $A^0_{p,l}$ são os conjuntos diferentes (ou vazios) que podem obter-se, substituindo em $\prod\limits_{1 \leq n \leq N} B_{n,p}$ cada símbolo $B_{n,p}$ ou por $A_{n,p}$ ou por $A^-_{n,p}$ e suprimindo $\prod\limits_{1 \leq n \leq N} A_{n,p}$ dos produtos assim formados. Daí e da igualdade N 14') tiramos a relação

$$U^- = \sum_{1 \leq l_1, l_2, \ldots, l_P \leq L} (A^0_{1,l_1} \cap A^0_{2,l_2} \cap \cdots \cap A^0_{P,l_P}),$$

a qual, juntamente com a igualdade 10), com a condição 2.ª da definição dum corpo e com a propriedade 17 *c)*, leva à conclusão $U^- \in \mathcal{S}$. Mas, a proposição N II obriga qualquer união dum número finito de conjuntos $S \in \mathcal{S}$ a ser um conjunto do tipo U. Consequentemente, a classe $\mathcal{S}$ verifica as condições 2.ª e 3.ª da definição dum corpo, conforme desejávamos provar.

Por motivo semelhante ao invocado na observação feita a propósito da fórmula N 15'), a demonstração de N XXVIII não serve para o caso duma infinidade numerável de corpos $\mathcal{A}_n$. Eis a razão por que apresentamos a proposição seguinte.

N XXIX) «Dados os espaços Ω_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, em número infinito, suponhamos que em cada Ω_n se encontra definido um corpo $\mathcal{A}_n$ de conjunto genérico A_n. Então, se considerarmos os conjuntos que podem obter-se, formando as somas dum número finito de produtos $\prod\limits_{1 \leq n < +\infty} A_n$ tais que cada parcela tem quando muito um número finito de factores $A_n \neq \Omega_n$, esses conjuntos constituem uma classe que é um corpo definido no espaço $\prod\limits_{1 \leq n < +\infty} \Omega_n$ e que é geradora do produto $\prod\limits_{1 \leq n < +\infty} \mathcal{A}_n$.»

Demonstração de N XXIX. A classe das somas referidas no enunciado, digamos $\mathcal{C}$, é òbviamente uma classe não-vazia, pois abrange o espaço-produto em que se encontra definida. Além disso, dado um conjunto $U = \bigcup_{1 \leq p \leq P} (\prod_{1 \leq n < +\infty} A_{n,p})$ tal que, seja qual for p, se tem $A_{n,p} \in \mathcal{A}_n$ com cada n e $A_{n,p} = \Omega_n$ com $n \geq n(p)$, basta pôr $N = \sup_p n(p)$ para que a propriedade associativa da multiplicação de conjuntos dê a igualdade

$$U = \bigcup_{1 \leq p \leq P} [A_{1,p} \times \cdots \times A_{N-1,p} \times (\prod_{N \leq n < +\infty} \Omega_n)].$$

Portanto, podemos retomar os cálculos do segundo trecho da demonstração de N XXVIII, sob a condição de substituirmos $\mathcal{S}$ por $\mathcal{C}$ e cada conjunto $A_{N,p}$ pelo espaço $\prod_{N \leq n < +\infty} \Omega_n$. Concluímos que $\mathcal{C}$ é um corpo e só falta mostrar que $\mathcal{C}$ é uma classe geradora de $\mathcal{A} = \prod_{1 \leq n < +\infty} \mathcal{A}_n$.

Evidentemente, sai $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, pois qualquer conjunto $C \in \mathcal{C}$ é a soma dum número finito de conjuntos (especiais) da classe geradora de $\mathcal{A}$. Doutro lado, dados quaisquer conjuntos $A_n \in \mathcal{A}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, a igualdade 10) e a propriedade 18 *c)* implicam

$$22) \quad \bigcap_{1 \leq n < \infty} (\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{n-1} \times A_n \times \Omega_{n+1} \times \cdots) = \prod_{1 \leq n < \infty} A_n \in \mathcal{C}^*,$$

donde, por causa de 19), a relação $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}^*$. Em suma, $\mathcal{C} \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{C}^*$ e a fórmula 19) permite concluir que se verifica a igualdade $\mathcal{C}^* = \mathcal{A}$, conforme desejávamos provar.

20. Espaços de Borel com um número de dimensões arbitrário. Na secção n.º 15 ocupámo-nos da recta de Borel ou seja do espaço de Borel a uma dimensão. Agora vamos desenvolver o estudo iniciado e vamos generalizá-lo a um número de dimensões maior do que 1.

No exemplo 8 vimos que o plano real ou espaço real a duas dimensões pode ser definido pela igualdade $X(x) = X_1(x_1) \times X_2(x_2)$, abreviadamente $X = X_1 \times X_2$, onde X_1 e X_2

significam duas rectas reais, e mencionámos que tal espaço pode ser representado geomètricamente por um plano euclideano dotado dum sistema de eixos coordenados figurativos das rectas-factores.

Se $\mathscr{B}_1(B_1)$ e $\mathscr{B}_2(B_2)$ forem os corpos de Borel lineares definidos em X_1 e em X_2, respectivamente, escrevemos $\mathscr{B}(B)$ para designar o produto desses dois corpos, o qual é um corpo-σ definido em X. Nesta conformidade, a classe $\mathscr{B}$ diz-se *corpo de Borel plano* ou *corpo de Borel a duas dimensões,* os conjuntos $B \in \mathscr{B}$ dizem-se *conjuntos de Borel planos* ou *conjuntos de Borel a duas dimensões* e o espaço mensurável $[X(x), \mathscr{B}(B)]$, abreviadamente $(X, \mathscr{B})$, diz-se *plano de Borel* ou *espaço de Borel a duas dimensões.* Aos conjuntos B especiais que são da forma $J_1 \times J_2$, onde $J_1 \subset X_1$ e $J_2 \subset X_2$ são intervalos lineares (veja-se N XIX), a esses conjuntos B podemos chamar *intervalos planos* ou *intervalos a duas dimensões* ou ainda *paralelogramos de lados*(*) J_1 *e* J_2.

No exemplo 8 vimos também que o espaço real a três dimensões pode ser definido pela igualdade $X(x) = X_1(x_1) \times \times X_2(x_2) \times X_3(x_3)$, abreviadamente $X = X_1 \times X_2 \times X_3$, onde X_1, X_2 e X_3 correspondem a três rectas reais, e mencionámos que tal espaço pode ser representado geomètricamente pelo espaço euclideano a três dimensões dotado dum sistema de eixos coordenados figurativos das rectas-factores.

Se $\mathscr{B}_1(B_1)$ e $\mathscr{B}_2(B_2)$ tiverem os significados anteriores e se $\mathscr{B}_3(B_3)$ for o corpo de Borel linear definido em X_3, escrevemos ainda $\mathscr{B}(B)$ para designar o produto desses três corpos, o qual é um corpo-σ definido em X. Nesta conformidade, a classe $\mathscr{B}$ diz-se *corpo de Borel a três dimensões,* os conjuntos $B \in \mathscr{B}$ dizem-se *conjuntos de Borel a três dimensões* e o espaço mensurável $(X, \mathscr{B})$ diz-se *espaço de Borel a três dimensões.* Aos conjuntos B especiais que são da forma $J_1 \times J_2 \times J_3$, onde $J_1 \subset X_1$, $J_2 \subset X_2$ e $J_3 \subset X_3$ são intervalos lineares, a esses conjuntos B podemos chamar *intervalos a três dimensões* ou ainda *paralelipípedos de arestas* J_1, J_2 *e* J_3.

(*) Se tivermos eixos coordenados ortogonais, é corrente dar o nome de *rectângulos* aos paralelogramos do texto.

Os casos da multiplicação de corpos e de rectas de Borel até agora referidos merecem atenção pela nomenclatura especial que lhes corresponde e pela possibilidade duma representação geométrica sugestiva.

Dum modo geral, se tivermos uma colecção finita ou numerável de rectas reais $X_n(x_n)$ $(n=1,2,3,\ldots)$, então a igualdade $X(x)=\prod_n X_n(x_n)$, abreviadamente $X=\prod_n X_n$, define X como espaço real a tantas dimensões quantos os factores presentes.

Seja $\mathcal{B}_n(B_n)$ o corpo de Borel linear definido em X_n e seja $\mathcal{B}(B)=\prod_n \mathcal{B}_n(B_n)$. Então, a classe $\mathcal{B}$, definida em X, diz-se *corpo de Borel com o mesmo número de dimensões que* X, os conjuntos $B \in \mathcal{B}$ dizem-se *conjuntos de Borel com o mesmo número de dimensões que* X e o espaço mensurável $(X, \mathcal{B})$ diz-se *espaço de Borel com o mesmo número de dimensões que* X. Aos conjuntos B especiais que são da forma $\prod_n J_n$, onde cada factor $J_n \subset X_n$ é um intervalo linear, a esses conjuntos B podemos chamar *intervalos com o mesmo número de dimensões que* X ou ainda, se $N>3$, *hiperparalelipípedos de arestas* $J_1, J_2, \ldots, J_n, \ldots$.

* * *

Seguem algumas proposições destinadas a alargar e a aperfeiçoar os resultados alcançados na proposição N XIX e nos seus corolários.

N XXX) «É conjunto de Borel todo o intervalo contido num espaço real.»

Demonstração de N XXX. Trata-se duma reafirmação de factos referidos na primeira parte desta secção.

Passamos para um corolário de N XXX, a saber

N XXX') «Nenhum espaço de Borel admite decomposição irredutível.»

Demonstração de N XXX'. Se $(X, \mathcal{B})$ for um espaço de BOREL com um número qualquer de dimensões, então N XXX obriga todo o conjunto elementar a situar-se em $\mathcal{B}$. Nestas condições, basta decalcar a demonstração de N XIX'' para chegarmos ao resultado desejado.

Posto isso, convém recordar duas definições que é usual dar na teoria dos conjuntos: Um conjunto de pontos contido num espaço real com um número finito de dimensões diz-se *fechado* se (e só se) contiver o seu derivado e diz-se *aberto* se (e só se) for o complemento dum conjunto fechado. Escusado será dizer que o derivado dum conjunto é o conjunto dos seus pontos de acumulação.

Agora podemos enunciar um novo corolário de N XXX, a saber:

N XXX'') «Todo o conjunto aberto contido num espaço real com um número finito $N \geqq 1$ de dimensões é um conjunto de BOREL igual a uma união finita ou quando muito numerável de produtos de N intervalos lineares finitos e abertos.»

Demonstração de N XXX''. Como valem a proposição N XXX e a condição 3.ª da definição dum corpo-σ, só falta provar que todo o conjunto aberto contido no produto X das N rectas reais $X_n (x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$ pode ser igualado a uma união quando muito numerável de produtos do tipo descrito no enunciado.

Suponhamos que $Y \subset X$ é um conjunto aberto ou, equivalentemente, que Y^- é um conjunto *fechado*, representemos por $A_p (p = 1, 2, 3, \ldots)$ o elemento genérico da classe numerável formada pelos intervalos a N dimensões do tipo $\prod_n \{\alpha_n < x_n < \beta_n\}$, com α_n e $\beta_n > \alpha_n$ racionais para cada n, e designemos por U a união (finita ou numerável) dos intervalos A_p especiais que estão contidos em Y. Então, é óbvio que $U \subset Y$ e logo se vê que $U \supset Y$ pela razão seguinte: Se existisse um ponto $y = (y_1, \ldots, y_N) \varepsilon Y$ com a propriedade $y \varepsilon U^-$, primeiro seria impossível determinar números positivos δ_n e

ε_n tais que as somas $y_n+\varepsilon_n$ e as diferenças $y_n-\delta_n$ fossem todas racionais e que, simultâneamente, $\prod_n \{y_n-\delta_n<x_n<y_n+\varepsilon_n\}$ saísse subconjunto de Y, depois seria possível formar uma sucessão de pontos $(y_{1,q},\ldots,y_{N,q})\in Y^-(q=1,2,3,\ldots)$ convergente para y e, por fim, o ponto y ficaria situado em Y^-, uma conclusão incompatível com a hipótese $y\in Y$. Fica assim terminada a nossa demonstração.

Acrescentamos mais um corolário, a saber:

N XXX‴) «Todo o conjunto fechado contido num espaço real com um número finito $N\geqq 1$ de dimensões é um conjunto de Borel igual a uma intersecção finita ou quando muito numerável de complementos de intervalos a N dimensões do tipo referido no enunciado de N XXX″.»

Demonstração de N XXX‴. A nossa tese é uma consequência imediata da proposição N XXX″, da condição 2.ª da definição dum corpo-σ e da relação de Morgan N 10 *a)*.

Passamos a dar exemplos de conjuntos de Borel multidimensionais que não são intervalos.

Exemplo 31. É conjunto de Borel todo o conjunto finito ou numerável contido num espaço real com um número qualquer de dimensões. Prova-se a afirmação feita somando conjuntos elementares.

Exemplo 32. Considerem-se três números reais finitos α, β e γ tais que $\alpha^2+\beta^2>0$ e tomem-se os três conjuntos R, R' e R'' do plano real X de ponto genérico (x_1,x_2) que são caracterizados pelas relações que se obtêm sujeitando a expressão $\alpha x_1+\beta x_2+\gamma$ a ser nula, positiva e negativa, respectivamente. Então, se pusermos $K(k_1,k_2)=\{-k_1\leqq x_1<k_1\}\times$ $\times\{-k_2\leqq x_2\leqq k_2\}$ para todo o par de números naturais k_1 e k_2, a igualdade óbvia $X=\bigcup_{k_1,k_2} K(k_1,k_2)$ e as fórmulas N 9 *b)* e N 14) dão a relação $R+R'=\bigcup_{k_1,k_2}[(R+R')\cap K(k_1,k_2)]$, a qual, junta-

mente com N XXX''' e com a condição 3.ª da definição dum corpo-σ, prova que a soma $R+R'$ é um conjunto de Borel. Anàlogamente se mostra que a soma $R+R''$ é um conjunto de Borel. Portanto, basta atender às igualdades $R=(R+R')\cap\cap(R+R'')$, $R'=(R+R')-R$ e $R''=(R+R'')-R$, a primeira decorrente de N 14') e as outras duas imediatas, para que N XI declare R, R', R'' e $R'+R''$ sucessivamente conjuntos de Borel.

* * *

A abundância de classes geradoras do corpo de Borel linear (patenteada através da parte final da secção n.º 15) e diversas propriedades afirmadas através dos teoremas da secção n.º 19 facultam-nos uma liberdade de escolha notável se quizermos substituir a classe dos produtos $\prod_n B_n$ por outra classe geradora do corpo de Borel $\prod_n \mathscr{B}_n$ a qualquer número de dimensões. Seguem algumas das escolhas possíveis.

1.º A classe dos produtos $B'\times B''$, onde B' significa qualquer conjunto de Borel linear e B'' significa qualquer conjunto de Borel plano, é uma classe geradora do corpo de Borel a três dimensões, conforme pode ver-se através de N XXVI. Idem para a classe dos produtos $B''\times B'$.

2.º A classe dos intervalos pluridimensionais da forma $\prod_n \{-\infty<x_n<b_n\}$, onde n corre de 1 a $N<+\infty$ e onde, dado n, o símbolo b_n significa um número real finito arbitrário, é uma classe geradora do corpo de Borel $\prod_n \mathscr{B}_n$, conforme pode ver-se através de 2.º da parte final da secção n.º 15 e através do uso repetido de N XXVI no caso particular correspondente à nota da página 82.

3.º Escolhidas N variáveis reais finitas u_n $(n=1,2,\ldots,N)$ e N números reais c_n, qualquer deles finito arbitrário ou infinito com sinal qualificado, então sai classe geradora do corpo de Borel a N dimensões a classe $\mathscr{S}(c_1, c_2, \ldots, c_N)$ constituída por todos os produtos de N intervalos lineares J_n tais que, dado n, o conjunto J_n toma a forma $\{u_n \leqq x_n < c_n\}$ ou $\{c_n \leqq x_n < u_n\}$ ou $\{-\infty < x_n < u_n\}$, conforme for $u_n \leqq c_n$ ou $u_n > c_n > -\infty$ ou $c_n = -\infty$. Com efeito, a propriedade afirmada é consequência de 4.º da parte final da secção n.º 15 e do caso particular de N XXVI referido na nota da página 82.

4.º Escolhida qualquer das rectas reais $X_n\,(n=1,2,\ldots,N)$, designemos por S_n e K_n os conjuntos genéricos das classes $\mathcal{S}_n$ e $\mathcal{K}_n$, respectivamente, onde $\mathcal{S}_n$ e $\mathcal{K}_n$ se supõem definidos do mesmo modo que $\mathcal{S}$ e $\mathcal{K}$ em 5.º da parte final da secção n.º 15. Nesta conformidade, a classe dos conjuntos que podem obter-se somando um número finito de produtos $\prod\limits_n S_n$ é, por causa de 8'), a mesma que a dos conjuntos que podem obter-se somando um número finito de produtos $\prod\limits_n K_n$. Este facto e as proposições N XXVIII e N XXV mostram que é *corpo* gerador de $\prod\limits_n \mathcal{B}_n$ a classe dos conjuntos que podem obter-se somando um número finito de produtos da forma $\prod\limits_n S_n$.

5.º Uma classe geradora do corpo de Borel a uma infinidade numerável de dimensões é o corpo formado pelas somas dum número finito de produtos $\prod\limits_{1 \leqq n < +\infty} B_n$ tais que cada parcela tem quando muito um número finito de factores $B_n \neq X_n$. Prova-se a afirmação feita substituindo os símbolos $\Omega_n, \mathcal{A}_n$ e A_n do enunciado de N XXIX por $X_n, \mathcal{B}_n$ e B_n, respectivamente.

c) Espaços de medida

21. Funções aferidoras, conteúdos e conteúdos-σ. O estudo feito a respeito das operações sobre conjuntos e a respeito dos espaços mensuráveis proporciona-nos condições óptimas para tratarmos de novos conceitos muito importantes em relação à teoria que estamos a elaborar.

Consideremos uma classe de conjuntos não-vazia $\mathcal{A}$ de elemento genérico A, definida num espaço $\Omega(\omega)$, e consideremos mais uma correspondência funcional φ tal que cada conjunto A tem por homólogo um número real $\varphi(A)$, inito arbitrário ou infinito com sinal qualificado. Então, a *função de conjunto* $\varphi(A)$ é uma função numérica real definida em $\mathcal{C}$. Esta função recebe o nome de *função aferidora* (definida em $\mathcal{C}$) se for não-negativa e não constantemente infinita, por outras palavras, se $\varphi(A) \geqq 0$ para qualquer A e se existir um A tal que $\varphi(A) < +\infty$.

Dada uma função aferidora $\varphi(A)$, definida em $\mathcal{C}$, chama-se *valor* dum conjunto A fixo ao número que a função φ faz corresponder a esse conjunto.

Uma função aferidora diz-se *nula* se atribuir o valor zero a qualquer conjunto A; diz-se *significativa* se atribuir valor positivo a algum conjunto A; diz-se *finita* se atribuir valor finito a qualquer conjunto A; diz-se *infinita* se atribuir o valor $+\infty$ a algum conjunto A; diz-se *normada* se $\Omega \in \mathcal{C}$ e $\varphi(\Omega)=1$; diz-se *não-normada* se $\Omega \in \mathcal{C}^-$ ou se $\varphi(\Omega) \neq 1$; diz-se *finita-σ* se qualquer conjunto A for a soma dum número finito ou duma infinidade numerável de conjuntos tais que cada um pertence a $\mathcal{C}$ e fica com valor finito; diz-se *infinita-σ* se não for finita-σ. Evidentemente, uma função aferidora finita sai sempre finita-σ.

Seguem duas definições bastante importantes para a continuação desta exposição.

Considera-se a função aferidora $\varphi(A)$, definida em $\mathcal{C}$, como tendo a *propriedade aditiva finita* ou *aditiva simples* se qualquer colecção finita de conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_N \in \mathcal{C}$, disjuntos dois a dois e de soma situada em $\mathcal{C}$, for tal que se verifica a igualdade

23) $$\varphi(A_1+A_2+\cdots+A_N)=\varphi(A_1)+\varphi(A_2)+\cdots+\varphi(A_N).$$

Mais, a função aferidora $\varphi(A)$ considera-se como tendo a *propriedade aditiva-σ* ou *aditiva generalizada* se qualquer colecção finita ou numerável de conjuntos $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \in \mathcal{C}$, disjuntos dois a dois e de soma situada em $\mathcal{C}$, for tal que se verifica a igualdade

23') $$\varphi(A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots)=\varphi(A_1)+\varphi(A_2)+\cdots+\varphi(A_n)+\cdots.$$

Reconhece-se imediatamente que toda a função aferidora aditiva-σ é finitamente aditiva, mas que uma função aferidora finitamente aditiva escusa de ser aditiva-σ.

Vejamos agora dois exemplos.

Exemplo 33. Dado o espaço $\Omega=\{1,2,3,4\}$, considere-se a classe $\mathcal{Cl}$ formada pelos três conjuntos $A=\{1,2\}$, A^- e Ω. Então, a função φ tal que $\varphi(A)=1$ e $\varphi(A^-)=\varphi(\Omega)=+\infty$ sai uma função aferidora definida em $\mathcal{Cl}$, a qual é infinita, não-normada, infinita-σ e aditiva-σ; doutro lado, a função φ tal que $\varphi(A)=3$ e $\varphi(A^-)=\varphi(\Omega)=1$ sai uma função aferidora definida em $\mathcal{Cl}$, a qual é finita e normada sem ser finitamente aditiva. Evidentemente, ambas as funções consideradas são significativas.

Exemplo 34. Considere-se o espaço Ω formado pelos números naturais e seja A o conjunto genérico que pode extrair-se de Ω. Então, a função φ caracterizada por $\varphi(A)=0$ para qualquer A finito e $\varphi(A)=+\infty$ para qualquer A infinito sai uma função aferidora definida no corpo-σ mais amplo que pode instituir-se em Ω, a qual é significativa, infinita, não--normada, finita-σ e finitamente aditiva, mas não é aditiva-σ.

*
* *

Passando ao estudo especial das funções aferidoras finitamente aditivas, vamos enunciar a proposição seguinte:

N XXXI) «Considere-se uma classe não-vazia $\mathcal{Cl}$ de conjunto genérico A, definida em certo espaço. Então, qualquer função aferidora finitamente aditiva $\varphi(A)$ goza das propriedades seguintes:

a) Se $O\in\mathcal{Cl}$, sai $\varphi(O)=0$.—*b)* Para A', $A-A'\in\mathcal{Cl}$, a relação $A'\subset A$ implica $\varphi(A')\leqq\varphi(A)$ em todos os casos e implica mais $\varphi(A-A')=\varphi(A)-\varphi(A')$ quando e só quando $\varphi(A')<+\infty$. —*c)* Seja qual for a colecção finita ou numerável de conjuntos $A_n\in\mathcal{Cl}(n=1,2,3,\ldots)$, disjuntos dois a dois e tais que A_k+

$+A_{k+1}+\cdots \in \mathcal{A}$ para cada k tirado do campo de variação de n, verifica-se sempre a desigualdade $\sum\limits_n \varphi(A_n) \leqq \varphi(\sum\limits_n A_n)$.»

Demonstração de N XXXI. Vamos provar sucessivamente cada uma das alíneas do enunciado.

a) Seja qual for A, a propriedade N 7' *b)* e a igualdade 23) dão $\varphi(A)=\varphi(A+O)=\varphi(A)+\varphi(O)$. Portanto, basta escolher $\varphi(A)<+\infty$ para que saia $\varphi(O)=0$.—*b)* A relação $A' \subset A$ tem a consequência óbvia $A=A'+(A-A')$. Este facto e 23) dão $\varphi(A)=\varphi(A')+\varphi(A-A')$, com $\varphi(A-A')\geqq 0$, donde $\varphi(A')\leqq\varphi(A)$ em todos os casos e $\varphi(A-A')=\varphi(A)-\varphi(A')$ quando e só quando a última diferença não tiver a forma indeterminada $\infty-\infty$.—*c)* A igualdade 23) torna evidente que esta alínea só carece de demonstração quando os conjuntos A_n formam uma colecção numerável. Neste caso a proposição N II', as hipóteses feitas com respeito aos conjuntos A_n e as propriedades supostas para a função φ dão a relação $\varphi(A_1+\cdots+A_n+A_{n+1}+\cdots)=$ $=\varphi(A_1+\cdots+A_n+(A_{n+1}+\cdots))\geqq\varphi(A_1)+\cdots+\varphi(A_n)$, válida para qualquer n, da qual tiramos a desigualdade suposta fazendo crescer n para $+\infty$.

* * *

Para que possam aplicar-se as igualdades 23) e 23') e as diversas alíneas da proposição N XXXI, é preciso fazer várias hipóteses relativas aos conjuntos envolvidos. Algumas dessas hipóteses podem ser dispensadas no caso da classe $\mathcal{A}$ de conjunto genérico A sair um *corpo*, caso este em que se chama *conteúdo* (definido em $\mathcal{A}$) a qualquer função $\varphi(A)$ aferidora finitamente aditiva e se chama *conteúdo-σ* (definido em $\mathcal{A}$) a qualquer função $\varphi(A)$ aferidora aditiva-σ. Em face do exposto, todo o conteúdo-σ é um conteúdo, mas um conteúdo escusa de ser um conteúdo-σ [veja-se o texto depois de 23') e também o exemplo 34].

Vamos agora enunciar uma proposição concebida no estilo de N XXXI.

N XXXII) «Se A for o conjunto genérico dum corpo $\mathcal{A}$ definido em certo espaço Ω, então qualquer conteúdo $\varphi(A)$ goza das propriedades seguintes:

a) $\varphi(O)=0$.—*b)* A relação $A'\subset A$, com $A'\in\mathcal{A}$, implica $\varphi(A')\leqq\varphi(A)$ em todos os casos e implica mais $\varphi(A-A')=$ $=\varphi(A)-\varphi(A')$ quando e só quando $\varphi(A')<+\infty$; em particular, $\varphi(A)\leqq\varphi(\Omega)$ em todos os casos e $\varphi(A^-)=\varphi(\Omega)-\varphi(A)$ quando e só quando $\varphi(A)<+\infty$.—*c)* Seja qual for a colecção finita de conjuntos $A_n\in\mathcal{A}\,(n=1,2,\ldots,N)$, disjuntos dois a dois, sai sempre a igualdade $\sum\limits_n\varphi(A_n)=\varphi(\sum\limits_n A_n)$; mais, seja qual for a colecção numerável de conjuntos $A_n\in\mathcal{A}\,(n=1,2,3,\ldots)$, disjuntos dois a dois e tais que $\sum\limits_n A_n\in\mathcal{A}$, sai sempre a desigualdade $\sum\limits_n\varphi(A_n)\leqq\varphi(\sum\limits_n A_n)$, a qual se transforma forçosamente na igualdade correspondente se $\varphi(A)$ for um conteúdo-σ.—*d)* Qualquer colecção finita de conjuntos $A_n\in\mathcal{A}$ impõe a desigualdade $\varphi(\bigcup\limits_n A_n)\leqq\sum\limits_n\varphi(A_n)$; mais, se $\varphi(A)$ for um conteúdo-σ, a desigualdade escrita estende-se a qualquer colecção numerável de conjuntos $A_n\in\mathcal{A}$ tais que $\bigcup\limits_n A_n\in\mathcal{A}$.»

Demonstração de N XXXII. Vamos provar sucessivamente cada uma das alíneas do enunciado.

a) Veja-se 17 *a)* e N XXXI *a)*.—*b)* No caso geral veja-se 17 *b)* e N XXXI *b)*; no caso particular veja-se 17 *a)* e substitua-se A' e A do caso geral por A e Ω, respectivamente.—*c)* Para a primeira parte veja-se a condição 3.ª da definição dum corpo e a igualdade 23); para a segunda parte servem as propriedades dos corpos, a alínea *c)* de N XXXI e a igualdade 23').—*d)* Na primeira parte, as propriedades dos corpos, a fórmula 1), a proposição N IV e a aditividade simples da função φ permitem estabelecer a igualdade

$$\varphi(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots)=$$
$$=\varphi(A_1)+\varphi(A_1^-\cap A_2)+\cdots+\varphi((A_1^-\cap\cdots\cap A_{n-1}^-)\cap A_n)+\cdots,$$

a qual também se alcança na segunda parte recorrendo às três primeiras das razões já invocadas, acrescidas da hipótese $\bigcup_n A_n \in \mathcal{C}$ e da aditividade generalizada da função φ. Em seguida, a igualdade escrita, a propriedade N 9 *a)* e a alínea *b)* da nossa proposição conduzem à desigualdade

$$\varphi(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots) \leqq \varphi(A_1) + \varphi(A_2) + \cdots + \varphi(A_n) + \cdots,$$

a qual desejávamos deduzir.

22. Quase-medidas, medidas e espaços de medida. Vamos agora considerar um caso particular sumamente importante do estudo feito na parte final da secção anterior.

Dado o espaço mensurável $[\Omega(\omega), \mathcal{C}(A)]$, abreviadamente $(\Omega, \mathcal{C})$, chama-se *quase-medida* [definida em $\mathcal{C}$ ou em $(\Omega, \mathcal{C})$] a qualquer função aferidora $\varphi(A)$ que seja conteúdo e chama-se **medida** [definida em $\mathcal{C}$ ou em $(\Omega, \mathcal{C})$] a qualquer função aferidora $\varphi(A)$ que seja conteúdo-σ. Evidentemente, toda a medida é uma quase-medida, mas uma quase-medida escusa de ser uma medida (veja-se o texto antes de N XXXII e também o exemplo 34).

Dada a importância do conceito de medida, vamos retomar a definição respectiva desde o princípio: *Uma medida é uma função aferidora aditiva-σ definida num corpo-σ, como quem diz definida num espaço mensurável.*

Posto isso, vamos enunciar uma proposição concebida no estilo de N XXXII.

N XXXIII) «Considere-se um espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{C})$ de conjunto mensurável genérico A. Então, qualquer quase-medida $\varphi(A)$ goza das propriedades seguintes:

a) $\varphi(O) = 0$.—*b)* A relação $A' \subset A$, com A' mensurável, implica $\varphi(A') \leqq \varphi(A)$ em todos os casos e implica mais $\varphi(A - A') = \varphi(A) - \varphi(A')$ quando e só quando $\varphi(A') < +\infty$; em particular, $\varphi(A) \leqq \varphi(\Omega)$ em todos os casos e $\varphi(A^-) = \varphi(\Omega) - \varphi(A)$ quando e só quando $\varphi(A) < +\infty$.—*c)* Seja qual for a colecção finita ou numerável de conjuntos mensuráveis $A_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$, disjuntos dois a dois, sai sempre a desigualdade $\sum_n \varphi(A_n) \leqq \leqq \varphi(\sum_n A_n)$, a qual se transforma forçosamente na igualdade correspondente quer no caso da colecção considerada ser finita quer no caso da função φ ser uma medida.—*d)* Qualquer colecção finita de conjuntos mensuráveis A_n impõe a desigualdade $\varphi(\bigcup_n A_n) \leqq \sum_n \varphi(A_n)$, a qual se estende a qualquer colecção numerável de conjuntos mensuráveis A_n no caso particular da função φ ser uma medida.»

Demonstração de N XXXIII. Recordemos que $\mathcal{A}$ significa o corpo-σ de que A é o conjunto genérico. Então, a nossa proposição é o caso especial de N XXXII em que a relação $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$ não pode falhar porque a isso se opõe a condição 3.ª da definição dum corpo-σ.

* * *

Caso a função aferidora $\varphi(A)$ definida no espaço mensurável $[\Omega(\omega), \mathcal{A}(A)]$ saia uma medida, é preferível assinalar-se esta situação peculiar pondo a letra μ em lugar da letra φ. Então, qualquer conjunto mensurável fixo A_0 fica com um valor igual a $\mu(A_0)$ ao qual é uso chamar *medida de* A_0. Nesta conformidade, podemos designar a medida $\mu(A)$, variável com A, por *função medida,* desde que nos convenha fazer a distinção verbal entre medidas concebidas como funções e medidas concebidas como valores.

Se mergulharmos a medida $\mu(A)$, abreviadamente μ, no espaço mensurável acima mencionado, no qual a supomos definida, constituímos o terno $[\Omega(\omega), \mathcal{A}(A), \mu(A)]$, abreviadamente $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, terno esse a que damos o nome de **espaço de medida.**

O conceito de espaço de medida é o conceito mais importante que até agora encontrámos. Pois, são os espaços de medida que fornecem o ambiente adequado para o desenvolvimento ulterior da nossa teoria.

Vamos agora dar um exemplo duma medida ou, equivalentemente, dum espaço de medida. Tal exemplo pode servir para eliminar da mente do leitor quaisquer dúvidas relativas à existência de medidas.

Exemplo 35. Dados os números 1, 2 e 3, consideremos o espaço $\Omega=\{1,2,3\}$ e mais o corpo-σ, seja $\mathcal{A}$, formado pelos quatro conjuntos O, $\{1,2\}$, $\{3\}$ e Ω. Então, a função μ sujeita às igualdades $\mu(O)=0$, $\mu(\{1,2\})=+\infty$, $\mu(\{3\})=3$ e $\mu(\Omega)=+\infty$ sai uma medida definida no espaço mensurável $(\Omega,\mathcal{A})$, a qual é significativa, infinita, não-normada e infinita-σ.

23. Teoremas diversos. Nesta secção vamos deduzir vários resultados de que nos serviremos mais adiante.

Para começar, enunciamos a proposição seguinte:

N XXXIV) «Considere-se uma classe $\mathcal{A}$ de conjunto genérico A, definida em certo espaço, e suponha-se que o conjunto vazio pertence a $\mathcal{A}$. Então, dada qualquer colecção finita ou numerável de constantes não-negativas $c_p\,(p=1,2,3,\ldots)$, a hipótese que cada uma das grandezas $\varphi_p(A)$ é uma função aferidora finitamente aditiva [aditiva-σ], juntamente com a convenção $c_p\,\varphi_p(A)=0$ quando $c_p=0$ e $\varphi_p(A)=+\infty$, implica que a combinação linear e homogénea $\sum\limits_p c_p\,\varphi_p(A)=\varphi(A)$ sai, por sua vez, uma função aferidora finitamente aditiva [aditiva-σ]. Em particular, se cada uma das funções $\varphi_p(A)$ for um conteúdo, um conteúdo-σ, uma quase-medida ou uma medida, o mesmo sucede à função $\varphi(A)$.»

Demonstração de N XXXIV. A função $\varphi(A)$ é aferidora porque é bem definida e não-negativa para cada A e porque N XXXI *a)* arrasta $\varphi(O)=0<+\infty$. Mais, se tivermos qualquer colecção finita [finita ou numerável] de conjuntos $A_n\in\mathcal{A}$ $(n=1,2,3,\ldots)$, disjuntos dois a dois e de soma situada em $\mathcal{A}$, então a definição da função φ e a hipótese $\varphi_p(\sum\limits_n A_n)=\sum\limits_n\varphi_p(A_n)$

para cada p admissível, uma e outra estabelecidas no enunciado, dão a relação

$$\varphi(\sum_n A_n)=\sum_p [c_p \cdot \sum_n \varphi_p(A_n)]=\sum_n [\sum_p c_p \varphi_p(A_n)]=\sum_n \varphi(A_n),$$

a qual prova a aditividade simples [generalizada] da função φ. Finalmente, para que a nossa demonstração fique completada, só falta aplicar a dedução aqui feita ao caso particular dos conteúdos em que $\mathcal{C}$ é um corpo e ao caso particular das quase-medidas em que $\mathcal{C}$ é um corpo-σ.

* * *

A classificação das funções aferidoras que são conteúdos é um tanto facilitada pela proposição seguinte:

N XXXV) «Se A for o conjunto genérico dum corpo $\mathcal{C}$ definido em certo espaço Ω, então qualquer conteúdo $\varphi(A)$ sai

a) nulo ou significativo, conforme $\varphi(\Omega)=0$ ou $\varphi(\Omega)>0$;
b) finito ou infinito, conforme $\varphi(\Omega)<+\infty$ ou $\varphi(\Omega)=+\infty$;
c) finito-σ quando e só quando existem conjuntos $A_n \in \mathcal{C}(n=1,2,3,\ldots)$ disjuntos dois a dois, de soma igual a Ω e tais que se tem $\varphi(A_n)<+\infty$ para cada n admissível.»

Demonstração de N XXXV. As alíneas *a)* e *b)* resultam consequências imediatas da desigualdade $0\leqq\varphi(A)\leqq\varphi(\Omega)$, assegurada por N XXXII *b)*. Mais, se o conteúdo $\varphi(A)$ for finito-σ, então Ω, um conjunto A possível, sai igual à soma dum número finito ou duma infinidade numerável de conjuntos tais que cada um deles pertence a $\mathcal{C}$ e tem valor finito.

Posto isso, só falta provar que a existência dos conjuntos A_n referidos na alínea *c)* força a função $\varphi(A)$ a ser finita-σ. Ora bem, admitida essa existência e escolhido qualquer A, sai $A=\sum_n (A \cap A_n)$, isso por causa de N 9 *b)* e de N 14'), e sai ainda $\varphi(A \cap A_n)\leqq\varphi(A_n)<+\infty$ para cada n, isso por causa de

N 9 *a)*, de 17 *c)* e de N XXXII *b)*, ficando assim completada a nossa demonstração.

Vejamos agora uma proposição que nos vai aparecer como corolário de N XXXV e que pode considerar-se como inversa de certo caso muito particular do teorema N XXXIV. Ei-la:

N XXXV') «Considere-se um espaço Ω e definido nele um corpo [corpo-σ] de conjunto genérico A. Então, qualquer função $\varphi(A)$ que seja conteúdo-σ finito-σ e significativo [medida finita-σ e significativa] determina uma colecção de constantes $c_p > 0 (p=1,2,3,\ldots)$ e uma colecção de conteúdos-σ normados [medidas normadas] $\varphi_p(A)$ tais que qualquer A satisfaz à igualdade

$$a) \quad \varphi(A) = c_1 \cdot \varphi_1(A) + c_2 \cdot \varphi_2(A) + \cdots + c_p \cdot \varphi_p(A) + \cdots.$$

O número de parcelas do segundo membro de *a)* pode reduzir-se a um ou sai necessàriamente infinito, conforme a função $\varphi(A)$ for finita ou infinita.»

Demonstração de N XXXV'. Representemos por $\mathfrak{A}$ o corpo [corpo-σ] de que A é o conjunto genérico e suponhamos que $\varphi(A)$ é um conteúdo-σ finito-σ e significativo [uma medida finita-σ e significativa].

Se designarmos por $A'_p (p=1,2,3,\ldots)$ os (eventuais) conjuntos A_n da alínea *c)* de N XXXV para os quais $\varphi(A_n) > 0$, então a aditividade-σ da função φ permite escrever $\varphi(\Omega) = \sum\limits_p \varphi(A'_p)$, saindo o número de parcelas do somatório pelo menos igual a um e saindo cada uma das parcelas positiva e finita. Em face do exposto, podemos definir uma colecção de constantes c_p e uma colecção de funções $\varphi_p(A)$ pelas fórmulas

$$24) \quad a) \quad c_p = \varphi(A'_p) > 0; \qquad b) \quad \varphi_p(A) = \varphi(A \cap A'_p)/c_p \geqq 0.$$

Ora bem, a igualdade $A = \sum\limits_n (A \cap A_n)$ posta na parte final da demonstração de N XXXV, a aditividade-σ da função φ, a eliminação de todas as parcelas $\varphi(A \cap A_n)$ tais que $\varphi(A_n)=0$ (se as houver) e as fórmulas 24) implicam a relação

$$\varphi(A)=\sum_p \varphi(A \cap A'_p)=\sum_p c_p \cdot \varphi_p(A),$$

a qual prova a igualdade *a)* porque, escolhido qualquer p, não só vem $\varphi_p(\Omega)=\varphi(A'_p)/c_p=1$, isso por causa de 24), como também toda a colecção finita ou numerável de conjuntos $C_n \in \mathcal{Q}(n=1,2,3,\ldots)$, disjuntos dois a dois e sujeitos à restrição $\sum_n C_n \in \mathcal{Q}$ na hipótese de $\mathcal{Q}$ não ser corpo-σ, impõe

$$\varphi_p(\sum_n C_n)=(1/c_p)\cdot\varphi(\sum_n (C_n \cap A'_p))=\sum_n \varphi_p(C_n),$$

isso por causa de 24), de N 14'), de 17 *c)* e da aditividade-σ da função φ.

Quanto à parte final do enunciado, uma função $\varphi(A)$ finita permite pôr $\Omega=A_1=A'_1$ e uma função $\varphi(A)$ infinita não pode ser a soma dum número finito de parcelas finitas. Fica assim completada a nossa demonstração.

* * *

Fechamos esta secção com a proposição seguinte.

N XXXVI) «Se φ for um conteúdo definido num corpo $\mathcal{Q}$, então a hipótese que o conjunto A situado em $\mathcal{Q}$ satisfaz à desigualdade $\varphi(A)<+\infty$ torna impossível a existência duma classe formada por uma infinidade não-numerável de conjuntos disjuntos dois a dois, todos contidos em A e pertencentes a $\mathcal{Q}$ e tais que φ atribui valor positivo a cada um deles.»

Demonstração de N XXXVI. Suponhamos que existe uma classe nas condições do enunciado, seja a classe $\mathcal{Q}'$ de conjuntos A'. Como a alínea *b)* de N XXXII implica $\varphi(A')\leqq\varphi(A)$ para qualquer A', reconhecemos imediatamente que é inadmissível supor nulo o número $\varphi(A)$, abreviadamente φ.

Nesta conformidade, se designarmos por $\mathcal{A}'_l (l=1,2,3,\ldots)$ a classe dos conjuntos A' sujeitos à desigualdade $\varphi/(l+1)< <\varphi(A')\leq\varphi/l$, sai a igualdade entre classes $\mathcal{A}'=\sum_l \mathcal{A}'_l$, isso porque cada A' pertence a uma e uma só classe $\mathcal{A}'_l$. Doutro lado, se existissem $l+1$ conjuntos $A'_i \in \mathcal{A}' (i=1,2,\ldots,l+1)$ tais que $\varphi/l\geq\varphi(A'_i)>\varphi/(l+1)$ para cada i, as alíneas *b)* e *c)* de N XXXII davam a desigualdade absurda $\varphi\geq\varphi(A'_1+\cdots+A'_{l+1})>(l+1)\cdot \cdot\varphi/(l+1)$. Portanto, $\mathcal{A}'$ é a soma duma infinidade numerável de classes finitas, uma conclusão incompatível com a hipótese duma classe $\mathcal{A}'$ infinita não-numerável. Fica assim concluída a demonstração de N XXXVI.

24. Limites de sucessões de funções aferidoras aditivas. Dada uma sucessão de funções aferidoras aditivas com limite, tem interesse saber se este é uma função aferidora aditiva e, eventualmente, indagar qual é o tipo da sua aditividade. A questão que acabamos de levantar é resolvida em boa parte pela proposição seguinte.

N XXXVII) «Considere-se uma classe $\mathcal{A}$ de conjunto genérico A, definida em certo espaço, e suponha-se que o conjunto vazio pertence a $\mathcal{A}$. Então, a hipótese que a sucessão de funções aferidoras finitamente aditivas $\varphi_p(A)$ $(p=1,2,3,\ldots)$ tem limite, quando $p\to\infty$, implica que este limite, seja $\varphi(A)$, sai, por sua vez, uma função aferidora finitamente aditiva. Em particular, se cada uma das funções $\varphi_p(A)$ for um conteúdo ou uma quase-medida, o mesmo sucede à função $\varphi(A)$.»

Demonstração de N XXXVII. A função $\varphi(A)$ é aferidora porque é bem definida e não-negativa para cada A e porque N XXXI *a)* arrasta $\varphi(O)=0<+\infty$. Mais, se tivermos qualquer colecção finita de conjuntos $A_n \in \mathcal{A}$ $(n=1,2,\ldots,N)$, disjuntos dois a dois e de soma situada em $\mathcal{A}$, a definição da função φ e a hipótese $\varphi_p(\sum_n A_n)=\sum_n \varphi_p(A_n)$ para cada p, uma e outra estabelecidas no enunciado, dão a relação

$$\varphi(\sum_n A_n)=\lim_{p\to\infty}[\sum_n \varphi_p(A_n)]=\sum_n \varphi(A_n),$$

a qual prova a aditividade simples da função φ. Finalmente, completamos a nossa demonstração considerando os casos particulares em que $\mathfrak{A}$ é um corpo e em que $\mathfrak{A}$ é um corpo-σ.

Vejamos agora um corolário de N XXXVII, a saber:

N XXXVII') «Retomem-se as funções aferidoras finitamente aditivas $\varphi_p(A)$ da proposição N XXXVII. Então, para que a função aferidora limite $\varphi(A)$ resulte aditiva-σ, é condição suficiente que se possa extrair da sucessão dos números p uma subsucessão p_q $(q=1, 2, 3, \ldots)$ tal que cada função $\varphi_{p_q}(A)$ saia aditiva-σ e, simultâneamente, a sucessão das funções $\varphi_{p_q}(A)$ saia não-decrescente. Em particular, se cada uma das funções $\varphi_{p_q}(A)$ referidas na condição suficiente for um conteúdo-σ ou uma medida, o mesmo sucede à função $\varphi(A)$.»

Demonstração de N XXXVII'. Tendo em vista N XXXVII, basta provar que a condição estabelecida no nosso enunciado força qualquer colecção *numerável* de conjuntos $A_n \in \mathfrak{A}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, disjuntos dois a dois e de soma situada em $\mathfrak{A}$, a respeitar a igualdade $\varphi(\sum_n A_n)=\sum_n \varphi(A_n)$. Ora bem, se $\varphi_{p_q}(\sum_n A_n)=+\infty$ para algum q, alcança-se a igualdade mencionada por intermédio das duas relações $\varphi_{p_q}(\sum_n A_n)=\sum_n \varphi_{p_q}(A_n)$ e $\varphi_{p_q}(A)\leqq\varphi(A)$ para qualquer A e, se $\varphi_{p_q}(\sum_n A_n)<+\infty$ para cada q, alcança-se a mesma igualdade por intermédio da relação

$$\varphi_{p_1}(\sum_n A_n)+\sum_q[\varphi_{p_{q+1}}(\sum_n A_n)-\varphi_{p_q}(\sum_n A_n)]=\sum_n \varphi_{p_1}(A_n)+$$
$$+\sum_q\{\sum_n[\varphi_{p_{q+1}}(A_n)-\varphi_{p_q}(A_n)]\}=\sum_n\{\varphi_{p_1}(A_n)+\sum_q[\varphi_{p_{q+1}}(A_n)-\varphi_{p_q}(A_n)]\}.$$

Fica assim terminada a nossa demonstração.

Observação. Caso se deixe de cumprir a condição de não-decrescimento mencionada no enunciado de N XXXVII', não podemos assegurar a aditividade-σ da função $\varphi(A)$, mesmo que cada uma das funções $\varphi_p(A)$ seja aditiva-σ. Exemplifiquemos: Escolhidos qualquer número natural p e qualquer conjunto A contido no espaço formado por todos os números naturais, ponha-se $\varphi_p(A)$ igual ao produto da fracção $1/p$ pelo número de pontos situados em A; então, cada uma das funções $\varphi_p(A)$ $(p=1,2,3,\ldots)$ sai uma medida finita-σ e $\lim\limits_{p\to\infty}\varphi_p(A)$ identifica-se com a função $\varphi(A)$ do exemplo 34, a qual é quase-medida sem ser medida.

25. A aditividade-σ como caso particular da aditividade finita. Iniciamos esta secção apresentando algumas convenções e definições.

Dada uma colecção finita ou numerável de números reais x_n $(n=1,2,3,\ldots)$, qualquer deles finito ou igual a $+\infty$ ou igual a $-\infty$, escrevemos $x_n\uparrow[x_n\downarrow]$ para assinalar que os x_n não decrescem [não crescem]. Caso se verifique a relação $x_n\uparrow[x_n\downarrow]$, pomos $x_n\uparrow x\,[x_n\downarrow x]$ para exprimir que x é o último dos números x_n ou é o limite dos números x_n, conforme tivermos uma colecção finita ou numerável.

Se $\mathcal{A}$ for uma classe de conjunto genérico A, extraída de certo espaço, então os símbolos que acabamos de introduzir e os conceitos de colecção de conjuntos ascendente e descendente permitem estabelecer as definições seguintes:

Uma função aferidora $\varphi(A)$ diz-se *inferiormente contínua em* $\mathcal{A}$ se a relação $\varphi(A_n)\uparrow\varphi(\bigcup\limits_n A_n)$ for verdadeira para qualquer colecção numerável de conjuntos $A_n\in\mathcal{A}$ $(n=1,2,3,\ldots)$ tais que $A_n\uparrow$ e $\bigcup\limits_n A_n\in\mathcal{A}$. Semelhantemente, uma função aferidora $\varphi(A)$ diz-se *superiormente contínua em* $\mathcal{A}$ se a relação $\varphi(A_n)\downarrow\varphi(\bigcap\limits_n A_n)$ for verdadeira para qualquer colecção numerável de conjuntos $A_n\in\mathcal{A}$ tais que $A_n\downarrow$, $\bigcap\limits_n A_n\in\mathcal{A}$ e $\varphi(A_k)<+\infty$ para algum k tirado do campo de variação de n.

Posto isso, vamos enunciar a proposição seguinte:

II) «Se tivermos um corpo [corpo-σ], suponhamos $\mathcal{A}$, extraído de certo espaço, então qualquer conteúdo-σ definido [medida definida] em $\mathfrak{A}$ é aí uma função aferidora *inferiormente* e *superiormente contínua.*»

Demonstração de II. Seja $\varphi(A)$ um conteúdo-σ definido no corpo $\mathfrak{A}$ e admitamos as hipóteses $A_n \in \mathfrak{A}$ $(n=1,2,3,\ldots)$, $A_n \uparrow$ e $\bigcup_n A_n \in \mathfrak{A}$. Nesta conformidade, a alínea *b)* de N XXXII dá $\varphi(A_n)\uparrow$, isso em todos os casos possíveis, e dá ainda $\varphi(\bigcup_n A_n)=+\infty$, isso desde que saia $\varphi(A_n)=+\infty$ para algum n. Mais, se $\varphi(A_n)<+\infty$ para qualquer n, a fórmula 1'), a aditividade-σ da função φ e a alínea *b)* de N XXXII impõem a igualdade

$$\varphi(\bigcup_n A_n)=\lim_{n\uparrow\infty}[\varphi(A_1)+\varphi(A_2-A_1)+\cdots+\varphi(A_n-A_{n-1})]=\lim_{n\uparrow\infty}\varphi(A_n).$$

Em face do exposto, podemos afirmar que a função aferidora $\varphi(A)$ é inferiormente contínua em $\mathfrak{A}$.

Admitamos agora as hipóteses $A_n \in \mathfrak{A}(n=1,2,3,\ldots)$, $A_n\downarrow$, $\bigcap_n A_n \in \mathfrak{A}$ e $\varphi(A_k)<+\infty$ para algum número natural k. Nesta conformidade, a alínea *b)* de N XXXII dá $\varphi(A_n)\downarrow$, isso em todos os casos possíveis. Mais, as igualdades óbvias $A_k=\bigcup_{n\geqq k} A_n$ e $\bigcap_{n\geqq k} A_n=\bigcap_{n\geqq 1} A_n$ transformam N 11) na relação $\bigcap_{n\geqq 1} A_n=A_k-[\bigcup_{n\geqq k}(A_k-A_n)]$, onde a união está contida no diminuendo A_k de modo que sai $\bigcup_{n\geqq k}(A_k-A_n)=A_k-(\bigcap_{n\geqq 1} A_n)\in\mathfrak{A}$. Como $A_k-A_n\uparrow$, concluímos da alínea *b)* de N XXXII e da continuidade inferior da função φ que se verifica a relação

$$\varphi(A_k)-\varphi(\bigcap_{n\geqq 1} A_n)=\varphi(\bigcup_{n\geqq k}(A_k-A_n))=\lim_{n\uparrow\infty}\varphi(A_k-A_n)=$$
$$=\varphi(A_k)-\lim_{n\uparrow\infty}\varphi(A_n).$$

Resulta a igualdade $\varphi(\bigcap_{n\geqq 1} A_n)=\lim_{n\uparrow\infty}\varphi(A_n)$, a qual prova, juntamente com a relação $\varphi(A_n)\downarrow$, que a função aferidora $\varphi(A)$ é superiormente contínua em $\mathfrak{A}$.

Caso $\mathcal{A}$ seja um corpo-σ, a demonstração precedente torna-se um nada mais simples, pois os conjuntos $\bigcup_n A_n$ e $\bigcap_n A_n$ saem forçosamente mensuráveis.

Observação. Dado um conteúdo-σ infinito, a existência dum k tal que $\varphi(A_k) < +\infty$ é uma restrição essencial se quisermos que as hipóteses $A_n \in \mathcal{A}$, $A_n \downarrow$ e $\bigcap_n A_n \in \mathcal{A}$ impliquem a relação $\varphi(A_n) \downarrow \varphi(\bigcap_n A_n)$. Exemplifiquemos com o espaço de medida $[\Omega(\omega), \mathcal{A}(A), \mu(A)]$, onde Ω é o espaço formado pelos números naturais, $\mathcal{A}$ é o corpo-σ mais amplo que pode instituir-se em Ω e μ é a função que atribui a qualquer conjunto A uma medida igual ao número dos seus pontos: Os conjuntos $A_n = \{n \leq \omega < +\infty\}$ tornam falsa a relação $\mu(A_n) \downarrow \mu(\bigcap_n A_n)$, já que $\mu(A_n) = +\infty$ com qualquer n e $\mu(\bigcap_n A_n) = \mu(O) = 0$.

* * *

A proposição II mostra que a continuidade inferior é uma condição necessária para que um conteúdo saia um conteúdo-σ. Vamos provar agora que a continuidade inferior é também uma condição suficiente para o fim indicado.

III) «É conteúdo-σ todo o conteúdo inferiormente contínuo. Em particular, é medida toda a quase-medida inferiormente contínua.»

Demonstração de III. Consideremos um corpo $\mathcal{A}$ de conjunto genérico A e suponhamos que $\varphi(A)$ é um conteúdo inferiormente contínuo. Então, escolhida qualquer colecção numerável de conjuntos $A_n \in \mathcal{A}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, disjuntos dois a dois e de soma pertencente a $\mathcal{A}$, a aditividade simples da função φ e as relações óbvias

$$\sum_{1 \leq i \leq n} A_i = B_n \uparrow \quad \text{e} \quad \bigcup_{1 \leq n < \infty} B_n = \sum_{1 \leq n < \infty} A_n$$

implicam a igualdade

$$\sum_{1 \leq n < \infty} \varphi(A_n) = \lim_{n \uparrow \infty} \varphi(\sum_{1 \leq i \leq n} A_i) = \varphi(\bigcup_{1 \leq n < \infty} B_n) = \varphi(\sum_{1 \leq n < \infty} A_n),$$

a qual prova a aditividade-σ da função $\varphi(A)$. Se $\mathcal{A}$ for um corpo-σ, a demonstração dada simplifica-se coisa de nada.

A proposição II mostra que a continuidade superior é uma condição necessária para que um conteúdo saia um conteúdo-σ. Mas, tal condição não é suficiente para o fim indicado, conforme pode exemplificar-se tomando a quase-medida $\varphi(A)$ do exemplo 34. Todavia, se limitarmos a relação característica da continuidade superior aos conjuntos $A_n \in \mathcal{A}$ tais que $A_n \downarrow$, $\bigcap\limits_n A_n = O$ e $\varphi(A_n) < +\infty$ para cada n e se impusermos, em contrapartida, a relação característica da aditividade-σ em certos casos muito especiais, então resulta uma condição suficiente proveitosa para que um conteúdo saia um conteúdo-σ.

IV) «Seja $\mathcal{A}$ um corpo [corpo-σ] de conjunto genérico A e seja $\varphi(A)$ um conteúdo definido [uma quase-medida definida] em $\mathcal{A}$. Então, $\varphi(A)$ sai um conteúdo-σ [uma medida] quando se verifica a condição seguinte:

Escolhida qualquer colecção numerável de conjuntos $A_n \in \mathcal{A}$ $(n=1,2,3,\ldots)$, disjuntos dois a dois, de soma obrigatòriamente situada na classe $\mathcal{A}$ caso esta não seja corpo-σ e tais que se verifica a desigualdade $\varphi(A_n) < +\infty$ para cada n admissível, escolhida uma colecção nessas condições, a hipótese $\varphi(\sum\limits_n A_n) < +\infty$ implica a relação $\varphi(A_{n+1}+A_{n+2}+\cdots)\downarrow 0$, quando $n \uparrow \infty$, e a hipótese $\varphi(\sum\limits_n A_n) = +\infty$ implica a existência de conjuntos $A'_p \in \mathcal{A}$ $(p=1,2,3,\ldots)$, disjuntos dois a dois e tais que se tem $\sum\limits_p A'_p = \sum\limits_n A_n$, $\varphi(\sum\limits_p A'_p) = \sum\limits_p \varphi(A'_p)$ e $\varphi(A_p) < +\infty$ para cada p.»

Demonstração de IV. Vamos distinguir três casos de colecções numeráveis de conjuntos $A_n \in \mathcal{A}$, disjuntos dois a dois e sujeitos à relação $\sum\limits_n A_n \in \mathcal{A}$ se $\mathcal{A}$ não for corpo-σ.

1.º caso. Suponha-se que existe um k tal que $\varphi(A_k) = +\infty$. Como $A_k \subset \sum\limits_n A_n$, a alínea *b)* de N XXXII dá $\varphi(\sum\limits_n A_n) = +\infty = \sum\limits_n \varphi(A_n)$.

2.º caso. Suponha-se $\varphi(A_n) < +\infty$ para cada n e $\varphi(\sum_n A_n) < +\infty$. Como as propriedades dos corpos dão a relação $A_{n+1} + A_{n+2} + \cdots \in \mathcal{C}$, válida para qualquer n, tiramos da proposição N II′ e da aditividade simples da função φ que se verifica a igualdade

$$\varphi(\sum_n A_n) = \varphi(A_1) + \cdots + \varphi(A_n) + \varphi(A_{n+1} + A_{n+2} + \cdots).$$

Portanto, a relação $\varphi(A_{n+1} + A_{n+2} + \cdots) \downarrow 0$, admitida no enunciado, permite-nos escrever mais uma vez $\varphi(\sum_n A_n) = \sum_n \varphi(A_n)$.

3.º caso. Suponha-se $\varphi(A_n) < +\infty$ para cada n e $\varphi(\sum_n A_n) = +\infty$. Seja qual for o conjunto A'_p referido no enunciado, a relação $A'_p \subset \sum_n A_n$, a propriedade N 9 *b)* e a igualdade N 14′) dão $A'_p = \sum_n (A'_p \cap A_n)$, com $\varphi(A'_p) < +\infty$, isso por hipótese, e com $\varphi(A'_p \cap A_n) < +\infty$ para cada n, isso por causa de N 9 *a)* e de N XXXII *b)*; portanto, a condição do enunciado assegura a relação $\varphi((A'_p \cap A_{n+1}) + (A'_p \cap A_{n+2}) + \cdots) \downarrow 0$, quando $n \uparrow \infty$, a qual permite escrever $\varphi(A'_p) = \sum_n \varphi(A'_p \cap A_n)$, isso pelo estudo feito no 2.º caso. Concluímos daí primeiro que se verifica a igualdade $\sum_p \varphi(A'_p) = \sum_{n,p} \varphi(A'_p \cap A_n)$ e depois, trocando os papéis dos conjuntos A_n e A'_p na dedução precedente, que se verifica também a igualdade $\sum_n \varphi(A_n) = \sum_{n,p} \varphi(A_n \cap A'_p)$. Consequentemente, a propriedade N 9 *c)* e as propriedades dos conjuntos A'_p admitidas na parte final do enunciado implicam o resultado $\sum_n \varphi(A_n) = \sum_p \varphi(A'_p) = \varphi(\sum_n A_n)$, ficando assim completada a prova da aditividade-σ da função $\varphi(A)$.

Observação. Caso a função $\varphi(A)$ seja um conteúdo-σ, ela satisfaz necessàriamente à condição posta no enunciado de IV. Com efeito, escolhida qualquer sucessão de conjuntos A_n de acordo com o estabelecido nessa condição, então a continuidade superior de $\varphi(A)$, assegurada por II, e as relações óbvias

$A_n + A_{n+1} + \cdots = C_n \downarrow$ e $\bigcap_n C_n = O$(*) mostram que a hipótese $\varphi(C_1) < +\infty$ implica o resultado $\varphi(C_{n+1}) \downarrow \varphi(O) = 0$, onde a igualdade final vem de N XXXII *a)*. Mais, a relação $\varphi(\sum_n A_n) = \sum_n \varphi(A_n)$, assegurada pela aditividade-σ da função φ, mostra que a hipótese $\varphi(C_1) = +\infty$ constitui os próprios A_n em conjuntos A'_p possíveis.

26. Valor que um conteúdo atribui a uma união de conjuntos tais que qualquer deles tem valor finito. Seja A o conjunto genérico dum corpo $\mathcal{C}$ extraído de certo espaço Ω e seja $\varphi(A)$ um conteúdo definido em $\mathcal{C}$. Escolhida uma colecção finita de conjuntos $A_n \in \mathcal{C}\,(n = 1, 2, \ldots, N)$ tais que $\varphi(A_n) < +\infty$ para cada n admissível, então a alínea *d)* de N XXXII impõe a *desigualdade* $\varphi(\bigcup_n A_n) \leqq \sum_n \varphi(A_n) < +\infty$. Aqui propomo-nos achar *igualdades* que permitam calcular o valor exacto da união dos A_n por adição algébrica dos valores de certos conjuntos tais que cada um deles pertença a $\mathcal{C}$ e esteja contido nalguma parcela A_n.

Obtemos igualdades do tipo desejado se aplicarmos a propriedade aditiva simples da função φ ou ao segundo membro de 1) ou ao segundo membro de N 15'), tendo qualquer dos dois processos as suas vantagens e os seus inconvenientes, conforme vimos na discussão feita à volta de N 15'). Em seguida vamos transformar a igualdade correspondente ao segundo processo de modo que fique desembaraçada da presença dos complementos dos conjuntos A_n.

A transformação anunciada conduz à fórmula seguinte:

$$25) \qquad \varphi\Big(\bigcup_{1 \leqq n \leqq N} A_n\Big) =$$

$$= \sum_{1 \leqq n \leqq N} \Big[(-1)^{n-1} \cdot \sum_{1 \leqq m_1 < m_2 < \cdots < m_n \leqq N} \varphi(A_{m_1} \cap A_{m_2} \cap \cdots \cap A_{m_n})\Big].$$

(*) Se tivéssemos $\bigcap_n C_n \neq O$, saía, por causa de N 10 *b)*, a relação absurda

$$\Omega \neq \bigcup_n C_n^- = C_1^- \cup (C_1^- + A_1) \cup \cdots \cup (C_1^- + A_1 + \cdots + A_{n-1}) \cup \cdots =$$
$$= (A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots)^- + (A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots).$$

Dedução de 25). Representamos por ${}_aC_b$ o número de combinações de a objectos tomados b a b e escolhemos para ponto de partida da nossa dedução a igualdade

$$26)\qquad \varphi\Big(\bigcup_{1\leqq n\leqq N} A_n\Big)=\sum_{1\leqq p\leqq 2^N-1}\varphi(A_p^0),$$

onde os conjuntos A_p^0 têm o mesmo significado que em N 15'). Assim, pode estabelecer-se uma correspondência biunívoca, elemento por elemento, entre os conjuntos $A_p^0=\bigcap\limits_{1\leqq m\leqq N} B_m$ admissíveis e as combinações não-vazias dos números $\alpha,\beta,\ldots,\rho$ extraídas da combinação $1,2,\ldots,N$, correspondência essa que se efectua através da relação

$$B_\alpha=A_\alpha, B_\beta=A_\beta,\ldots,B_\rho=A_\rho \quad \text{e} \quad B_m=A_m^- \text{ para } m\neq\alpha,\beta,\ldots,\rho,$$

ou seja, por causa de N IV, através da relação

$$A_p^0=A_\alpha\cap A_\beta\cap\cdots\cap A_\rho\cap\Big(\bigcap_{m\neq\alpha,\beta,\cdots,\rho} A_m^-\Big).^{(*)}$$

Em particular, as combinações $\alpha,\beta,\ldots,\rho$ especiais com r elementos ($1\leqq r\leqq N$) correspondem a ${}_NC_r$ produtos A_p^0 (formalmente) diferentes tais que cada um deles tem r e só r conjuntos secantes do tipo A_n.

Se escrevermos o segundo membro de 25) como soma, quando n corre de 1 a N, dos termos

$$25')\ (-1)^{n-1}\cdot\sum_{1\leqq m_1<\cdots<m_n\leqq N}\varphi\Big(A_{m_1}\cap\cdots\cap A_{m_n}\cap\Big[\bigcap_{m\neq m_1,\cdots,m_n}(A_m+A_m^-)\Big]\Big),^{(*)}$$

se desenvolvermos em 25') o argumento genérico da função φ pela igualdade N 14') e se aplicarmos depois a propriedade aditiva de φ, se fizermos tudo isso, então obtemos de 25') uma soma algébrica que tem o compor-

---

(*) Caso a combinação $\alpha,\beta,\ldots,\rho$ ou $m_1,m_2,\ldots,m_n$ seja a de todos os números $1,2,\ldots,N$, deve atender-se à convenção que a intersecção vazia coincide com Ω.

tamento seguinte: O módulo de cada parcela é um dos termos do segundo membro de 26), o número de parcelas é

$$\sum_{1 \leqq n \leqq N} {}_N C_n \cdot 2^{N-n} = (1+2)^N - 2^N = 3^N - 2^N$$

e as combinações de índices $m_1, m_2, \ldots, m_n$ contidas numa certa colecção $\alpha, \beta, \ldots, \rho$ são tais que cada uma delas fornece uma parcela igual ao produto de $(-1)^{n-1}$ pelo valor de φ no conjunto A_p^0 caracterizado por $\alpha, \beta, \ldots, \rho$ e que a classe formada por todas elas faz contribuir o valor de φ referido com um número de parcelas igual a $\sum\limits_{1 \leqq n \leqq r} {}_r C_n = (1+1)^r - 1$ e com um coeficiente numérico igual a $\sum\limits_{1 \leqq n \leqq r} (-1)^{n-1} \cdot {}_r C_n = 1 - -(1-1)^r = 1$. Posto isso, basta atender à igualdade

$$\sum_{1 \leqq r \leqq N} {}_N C_r \cdot (2^r - 1) = [(2+1)^N - 1] - [(1+1)^N - 1] = 3^N - 2^N$$

para concluirmos que os segundos membros de 26) e de 25) assumem o mesmo valor. Fica assim completada a demonstração de 25).

Alternativa para a dedução de 25). Primeiro, a fórmula 1), a aditividade de φ, a igualdade N 13 *b)*, as propriedades N 9) e a alínea *b)* de N XXXII dão a relação

$$\varphi(A_1 \cup A_2) = \varphi(A_1) + \varphi(\bar{A_1} \cap A_2) = \varphi(A_1) + \varphi(A_2 - (A_1 \cap A_2)) =$$
$$= \varphi(A_1) + \varphi(A_2) - \varphi(A_1 \cap A_2),$$

a qual prova 25) no caso particular $N = 2$. Em seguida, passa-se ao caso geral, fazendo a hipótese (indutiva) que a fórmula 25) é verdadeira quando se muda N para $N - 1 \geqq 2$ e inferindo daí que ela continua a ser verdadeira para N pelo processo que vamos descrever: A proposição N II, a aplicação de 25) ao caso da união de dois conjuntos situados em $\mathcal{A}$, a fórmula N 14), a hipótese indutiva, a proposição N IV e a propriedade N 9 *b)* dão a igualdade

$$\varphi(\bigcup_{1\leq n\leq N} A_n)=\varphi(\bigcup_{1\leq n\leq N-1} A_n)+\varphi(A_N)-\varphi(\bigcup_{1\leq n\leq N-1}(A_n\cap A_N))=$$

$$=\sum_{1\leq n\leq N-1}[(-1)^{n-1}\cdot\sum_{1\leq m_1<m_2<\cdots<m_n\leq N-1}\varphi(A_{m_1}\cap A_{m_2}\cap\cdots\cap A_{m_n})]+$$

$$+\varphi(A_N)+$$

$$+\sum_{1\leq n\leq N-1}[(-1)^{n}\cdot\sum_{1\leq m_1<m_2<\cdots<m_n\leq N-1}\varphi(A_{m_1}\cap\cdots\cap A_{m_n}\cap A_N)],$$

cujo último membro pode transformar-se no segundo membro de 25) por reagrupamento conveniente dos seus termos.

* * *

Seja A o conjunto genérico dum corpo $\mathfrak{A}$ e seja $\varphi(A)$ um conteúdo-σ definido em $\mathfrak{A}$. Então, escolhida qualquer colecção numerável de conjuntos $A_n\in\mathfrak{A}\,(n=1,2,3,\ldots)$ tais que $\bigcup_n A_n\in\mathfrak{A}$ e $\varphi(A_n)<+\infty$ para cada n, vale a fórmula seguinte:

27) $$\varphi(\bigcup_{1\leq n<\infty} A_n)=$$

$$=\lim_{N\uparrow\infty}\{\sum_{1\leq n\leq N}[(-1)^{n-1}\cdot\sum_{1\leq m_1<\cdots<m_n\leq N}\varphi(A_{m_1}\cap\cdots\cap A_{m_n})]\}.$$

Demonstração de 27). Atendendo às duas relações óbvias

$$\bigcup_{1\leq n\leq N} A_n=B_N\uparrow,\text{ quando } N\uparrow,\text{ e }\bigcup_{1\leq N<\infty} B_N=\bigcup_{1\leq n<\infty} A_n,$$

podemos afirmar que 27) é uma consequência imediata de 25) e da continuidade inferior de φ, esta assegurada por II.

27. Completação dum espaço de medida. Aqui só interessam funções aferidoras que são (pelo menos) simplesmente aditivas. Para que qualquer dessas funções possa beneficiar da maior parte das propriedades atrás referidas, é preciso que ela se encontre definida num corpo, por outras palavras, é preciso que ela seja um conteúdo. Todavia, o conceito de conteúdo definido num corpo, digamos $\mathfrak{A}$, não garante que certas propriedades importantes, válidas para cada colecção finita de conjuntos situados em $\mathcal{A}$, se possam estender ao caso duma infinidade numerável de conjuntos. Remedeia-se o inconveniente apontado pelo lado dos conjuntos, escolhendo para $\mathcal{A}$ um corpo-σ ou, equivalentemente, escolhendo uma quase-medida, e pelo lado dos valores do conteúdo, supondo que ele é aditivo-σ ou, equivalentemente, supondo que ele é um conteúdo-σ.

Em face do exposto, fica bem patente a eficiência notável que cabe ao conceito de medida definida num espaço mensurável ou, equivalentemente, que cabe ao conceito de espaço de medida.

O assunto de que estamos a tratar pode ser encarado doutro ponto de vista. Com efeito, é natural que o leitor possua uma ideia intuitiva, mais ou menos precisa, acerca do que se possa entender por uma (função) medida. Assim, talvez valha a pena indagar se a noção abstracta de medida aqui descrita apresenta as características, as quais o mero senso comum deseja atribuir a um ente matemático para lhe reconhecer o título de medida. É o que vamos fazer em seguida.

Consideremos o espaço de medida $[\Omega(\omega), \mathcal{A}(A), \mu(A)]$. Então, a propriedade da medida μ de ser definida para qualquer A significa que todo o conjunto a que se chama mensurável tem efectivamente medida. As convenções quanto aos valores da função μ não só estabelecem um campo de medidas com ínfimo nulo e com supremo finito ou infinito, como também excluem a hipótese de cada conjunto mensurável ter medida infinita, a qual seria destituida de interesse. A propriedade aditiva-σ da função μ assegura o seguinte: Se um conjunto tiver um número finito ou uma infinidade numerável de partes mensuráveis e disjuntas duas a duas, então a medida do todo sai igual à soma das medidas das partes. A alínea *a)* de N XXXIII confere medida nula ao único conjunto destituido de pontos ω. A alínea *b)* de N XXXIII mostra primeiro que qualquer conjunto mensurável tem medida não inferior à medida de qualquer outro conjunto mensurável nele contido e não superior à medida do espaço inteiro e mostra ainda que a divisão dum conjunto em duas partes mensuráveis e disjuntas atribui a uma das partes uma medida igual à diferença entre as medidas do todo e da outra parte, isso desde que não surja a indeterminação $\infty - \infty$. A alínea *d)* de N XXXIII afirma que qualquer união finita ou numerável de conjuntos mensuráveis tem uma medida igual ou menor do que a soma das medidas das parcelas, explicando-se a alternativa da medida da união ser menor pela possibilidade de existirem pontos ω comuns a várias parcelas. A proposição N XXXIV não só garante a sobreponibilidade dum número finito ou duma infinidade numerável de medidas, como também permite afectar dum factor de escala qualquer das medidas sobrepostas.

Quanto às propriedades das medidas referidas nas proposições N XXXV a N XXXVII' e II a IV, estas não podem classificar-se de intuitivas, mas devem considerar-se muito oportunas do ponto de vista analítico-matemático. Finalmente, as fórmulas 25) e 27) tornam-se, por vezes, cómodas para o cálculo da medida duma união.

* * *

Apesar da boa eficiência que reconhecemos ao conceito de espaço de medida, este ainda é susceptível dum melhoramento. Pois, dado um espaço de medida $[\Omega(\omega), \mathcal{A}(A), \mu(A)]$, pode acontecer que dois conjuntos mensuráveis A_1 e $A_2 \supset A_1$ tornem $\mu(A_1) = \mu(A_2)$ e que o conjunto Q sujeito à relação $A_1 \subset Q \subset A_2$ não tenha medida, isso pela razão simples de não ser mensurável. Tal possibilidade contraria o pedido natural que um conjunto compreendido entre dois conjuntos com medida comum deve ter a mesma medida dos conjuntos que o enquadram. Propomo-nos anular esta pequena deficiência do conceito de medida através das considerações que seguem.

Seja $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ a classe formada por todos os conjuntos mensuráveis A' tais que $\mu(A') = 0$ e seja $\mathcal{N}$ a classe formada por todos os conjuntos N tais que $N \subset A' \in \mathcal{A}'$.(*) Então, se

(*) Evidentemente, $O \in \mathcal{A}$, por causa de N XXXIII *a)*.

$A'_n \in \mathcal{C}' \,(n=1,2,3,\ldots)$, a relação $0 \leqq \mu\,(\bigcup_n A'_n) \leqq \sum_n \mu\,(A'_n) = 0$, assegurada por N XXXIII *d)*, permite concluir que $\bigcup_n A'_n \in \mathcal{C}'$. Este facto e a proposição N XII mostram que a classe dos conjuntos $A \cup N$ é o corpo-σ completivo de $\mathcal{C}$ com respeito à classe $\mathcal{C}'$. Como μ determina inteiramente $\mathcal{C}'$, vamos representar o corpo-σ referido pelo símbolo $\mathcal{C}_\mu$ e vamos dar-lhe o nome de *corpo-σ completivo de $\mathcal{C}$ com respeito à medida μ*. Nesta conformidade, $[\Omega(\omega), \mathcal{C}_\mu(A \cup N)]$, abreviadamente $(\Omega, \mathcal{C}_\mu)$, diz-se *espaço mensurável completivo de* $(\Omega, \mathcal{C})$ *com respeito à medida* μ. Mais, à operação que transforma $\mathcal{C}$ em $\mathcal{C}_\mu$ ou $(\Omega, \mathcal{C})$ em $(\Omega, \mathcal{C}_\mu)$ chama-se *operação completiva* e também *completação* de $\mathcal{C}$ ou de $(\Omega, \mathcal{C})$ *com respeito à medida* μ.

Posto isso, consideremos a função $\tilde{\mu}$ que faz corresponder a qualquer conjunto $A \cup N$ o número dado pela igualdade

$$\tilde{\mu}\,(A \cup N) = \mu\,(A). \tag{28}$$

A função $\tilde{\mu}$ encontra-se univocamente definida em toda a classe $\mathcal{C}_\mu$, pois se tivermos $A_0 \in \mathcal{C}$, $N_0 \subset A'_0 \in \mathcal{C}'$ e $A_0 \cup N_0 = A \cup N$, então propriedades familiares dos conjuntos dão

$$A \cap A_0 \subset A\,,\; A_0 \subset (A \cap A_0) \cup (A' \cup A'_0),$$

donde concluímos, atendendo a 28), a N XXXIII *b)* e a 25), que sai

$$\tilde{\mu}\,(A \cup N) = \mu\,(A) = \mu\,(A \cap A_0) = \mu\,(A_0) = \tilde{\mu}\,(A_0 \cup N_0).$$

Mais, a função $\tilde{\mu}$ é não-negativa, devido a $\mu\,(A) \geqq 0$, e é tal que $\tilde{\mu}(O) = \tilde{\mu}(O + O) = \mu\,(O) = 0 < +\infty$. Além disso, dados os conjuntos $A_n \cup N_n \in \mathcal{C}_\mu \,(n=1,2,3,\ldots)$ disjuntos dois a dois, a relação $N_n \subset A'_n$, com $A'_n \in \mathcal{C}'$ para qualquer n, implica primeiro $\sum_n N_n \subset \bigcup_n A'_n$, com $\bigcup_n A'_n \in \mathcal{C}'$, e implica depois a igualdade

$$\tilde{\mu}\,(\sum_n (A_n \cup N_n)) = \tilde{\mu}\,((\sum_n A_n) \cup (\sum_n N_n)) = \mu\,(\sum_n A_n) = \sum_n \tilde{\mu}\,(A_n \cup N_n),$$

isso devido a N II e a 28). Em face do exposto, inferimos que a função $\tilde{\mu}$ é uma medida definida no espaço mensurável

$(\Omega, \mathcal{C}_\mu)$, à qual vamos chamar *medida completiva de* μ. Quanto a $[\Omega(\omega), \mathcal{C}_\mu(A \cup N), \tilde{\mu}(A \cup N)]$, abreviadamente $(\Omega, \mathcal{C}_\mu, \tilde{\mu})$, vamos dar-lhe o nome de *espaço de medida completivo de* $(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$. Finalmente, à operação que transforma μ em $\tilde{\mu}$ ou $(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$ em $(\Omega, \mathcal{C}_\mu, \tilde{\mu})$ vamos chamar-lhe *operação completiva* e também *completação* de μ ou de $(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$, conforme o caso.

Vimos em N XII que a relação $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_\mu$ é sempre correcta e que $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\mu$, quando e só quando $\mathcal{N} \subset \mathcal{C}$. Neste último caso usa dizer-se que $\mathcal{C}$ e $(\Omega, \mathcal{C})$ são *completos com respeito à medida* μ; nos demais casos $\mathcal{C}$ e $(\Omega, \mathcal{C})$ dizem-se *incompletos com respeito a* μ.

Pondo $N = O$ em 28), tiramos a igualdade $\tilde{\mu}(A) = \mu(A)$, a qual prova que *a medida completiva* $\tilde{\mu}$ *respeita a medida original* μ *sobre a classe* $\mathcal{C}$. A medida μ e o espaço de medida $(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$ coincidem com os seus completivos, quando e só quando $\mathcal{N} \subset \mathcal{C}$. Neste último caso, μ e $(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$ dizem-se *completos* e, nos demais casos, eles dizem-se *incompletos*.

Exemplo 36. Considere-se o espaço de medida $(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$, onde Ω é o espaço formado pelos cinco números 1, 2, 3, 4 e 5, onde $\mathcal{C}$ é o corpo-σ formado pelos quatro conjuntos O, $\{3,4\}$, $\{3,4\}^-$ e Ω e onde μ é a medida que toma os valores 0 e 7 nos conjuntos $\{3,4\}$ e $\{3,4\}^-$, respectivamente. Evidentemente, não só sai $\mu(O) = 0$ e $\mu(\Omega) = 7$, como também a medida μ é incompleta. Aqui a classe $\mathcal{N}$ é formada pelos quatro conjuntos O, $\{3\}$, $\{4\}$ e $\{3,4\}$ e o corpo-σ completivo $\mathcal{C}_\mu$ compreende os quatro conjuntos situados em $\mathcal{C}$ e mais os quatro conjuntos $\{3\}$, $\{4\}$, $\{3\}^-$ e $\{4\}^-$. Finalmente, a medida completiva $\tilde{\mu}$ coincide com μ sobre $\mathcal{C}$ e toma os valores 0, 0, 7 e 7 nos quatro conjuntos de $\mathcal{C}_\mu$ exteriores a $\mathcal{C}$.

* * *

O completivo dum espaço de medida fica livre da deficiência apontada no início da segunda parte desta secção se abstrairmos dalguns casos em que os conjuntos que enquadram têm ambos medida infinita. Para reconhecermos esse facto, consideramos, em primeiro lugar, a proposição seguinte:

V) «Dados um espaço de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ e o seu completivo $(\Omega, \mathcal{A}_\mu, \tilde{\mu})$, suponha-se que A_1 e $A_2 \supset A_1$ são dois conjuntos mensuráveis com a mesma medida μ e que Q é um conjunto arbitrário, enquadrado por A_1 e A_2. Então, sai a relação

$$a) \qquad Q \in \mathcal{A}_\mu \quad \text{e} \quad \mu(A_1) = \tilde{\mu}(Q) = \tilde{\mu}(A_2),$$

quando e só quando existem na classe $\mathcal{A}$ dois conjuntos A_3 e A_4 tais que $A_1 \subset A_3 \subset Q \subset A_4 \subset A_2$ e que $\mu(A_4 - A_3) = 0$. Em particular, a condição $\mu(A_1) = \mu(A_2) < +\infty$ é suficiente para que saia a relação citada.»

Demonstração de V. Suponhamos em primeiro lugar que existem conjuntos A_3 e A_4 com as propriedades referidas no enunciado. Então, é óbvio que sai $\mu(A_1) \leq \mu(A_3) \leq \mu(A_2) = \mu(A_1)$ e que se tem $Q = A_3 + (Q - A_3)$, com $Q - A_3 \subset A_4 - A_3$, donde $Q \in \mathcal{A}_\mu$ e $\tilde{\mu}(Q) = \mu(A_3) = \tilde{\mu}(A_1) = \tilde{\mu}(A_2)$.

Suponhamos agora que se verifica a relação *a)*. Sendo assim, existem na classe $\mathcal{A}$ dois conjuntos A e A' tais que $Q = A \cup N$, com $N \subset A'$ e $\mu(A') = 0$. Se fizermos

$$A_3 = A \cup A_1 \quad \text{e} \quad A_4 = A \cup (A' \cap A_2),$$

as propriedades do símbolo de inclusão $\subset$ dão $A_1 \subset A_3 \subset \subset Q \subset A_4 \subset A_2$, onde A_3, A_4 e $A_4 - A_3$ pertencem a $\mathcal{A}$, isso pelas propriedades dos corpos-σ. Mas, a fórmula 1) e a definição de diferença entre dois conjuntos implicam $A_4 - A_3 = [A^- \cap (A' \cap A_2)] - (A^- \cap A_1) \subset A'$. Portanto, sai a igualdade $\mu(A_4 - A_3) = 0$.

Finalmente, a condição $\mu(A_1) = \mu(A_2) < +\infty$ e as convenções $A_3 = A_1$ e $A_4 = A_2$ forçam $\mu(A_4 - A_3) = \mu(A_2) - \mu(A_1) = 0$, ficando assim completada a nossa demonstração.

Observação. Se o conjunto Q referido em V pertencer a $\mathcal{A}$, então a relação *a)* sai verdadeira, conforme pode ver-se ou directamente ou pondo $A_3 = Q = A_4$ no enunciado de V.

O objectivo referido no texto introdutório de V alcança-se agora por meio do corolário seguinte:

V') «Dados os espaços de medida da proposição V, suponha-se que M_1 e $M_2 \supset M_1$ são dois conjuntos situados em $\mathcal{C}_\mu$ e dotados da mesma medida $\tilde{\mu}$ e admita-se que Q é um conjunto arbitrário, enquadrado por M_1 e M_2. Então, sai a relação

$$a') \qquad Q \in \mathcal{C}_\mu \quad \text{e} \quad \tilde{\mu}(M_1) = \tilde{\mu}(Q) = \tilde{\mu}(M_2),$$

quando e só quando existem dois conjuntos M_3 e M_4, ambos situados em $\mathcal{C}_\mu$, tais que $M_1 \subset M_3 \subset Q \subset M_4 \subset M_2$ e que $\tilde{\mu}(M_4 - M_3) = 0$. Em particular, a condição $\tilde{\mu}(M_1) = \tilde{\mu}(M_2) < +\infty$ é suficiente para que saia a relação citada.»

Demonstração de V'. Escolhido arbitràriamente um conjunto R tal que $R \subset M \in \mathcal{C}_\mu$ e que $\tilde{\mu}(M) = 0$, a relação óbvia $M = A \cup N$, com $A \in \mathcal{C}$, $N \subset A' \in \mathcal{C}$ e $\mu(A') = 0$, dá $R \subset A \cup A'$, isso devido às propriedades do símbolo $\subset$, dá mais $\tilde{\mu}(M) = \mu(A)$, isso por causa de 28), e dá ainda $\mu(A \cup A') = 0$, isso devido a 25) e a N XXXIII *b)*. Logo sai $\tilde{\mu}(R) = \mu(O) = 0$, o que prova que o espaço de medida $(\Omega, \mathcal{C}_\mu, \tilde{\mu})$ é completo(*) ou, por outras palavras, que a medida $\tilde{\mu}$ coincide com a sua completiva, a qual vamos designar por $\tilde{\tilde{\mu}}$.

Posto isso, vamos aplicar V, tomando $(\Omega, \mathcal{C}_\mu, \tilde{\mu})$ para espaço de medida inicial e escrevendo $\tilde{\tilde{\mu}}$ e $M_l (l = 1, 2, 3, 4)$ respectivamente nos lugares de $\tilde{\mu}$ e de A_l. Nesta conformidade, o nosso corolário é uma consequência imediata de $\tilde{\tilde{\mu}} = \tilde{\mu}$ e de $\mathcal{C}_{\tilde{\mu}} = \mathcal{C}_\mu$.

(*) Acabamos de estabelecer a proposição seguinte:

Dado um espaço de medida, o seu completivo sai completo.

Para demonstrarmos esta proposição, seguimos, na essência, uma exposição feita por J. P. Carvalho Dias.

Terminamos esta secção com a proposição seguinte:

VI) «Uma medida é nula, significativa, finita, infinita, normada, não-normada, finita-σ ou infinita-σ simultâneamente com a sua medida completiva.»

Demonstração de VI. Considere-se um espaço de medida $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ e o seu completivo $(\Omega, \mathfrak{A}_\mu, \tilde{\mu})$. Então, a relação conhecida $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}_\mu$, a proposição N XXXV, a igualdade 28) e as definições de função aferidora normada e não-normada provam imediatamente toda a tese do enunciado, com excepção da afirmação que μ é necessàriamente uma medida finita-σ se $\tilde{\mu}$ o for.

Suponhamos agora que $\tilde{\mu}$ é uma medida finita-σ ou, equivalentemente, que existem conjuntos $\tilde{A}_n \in \mathfrak{A}_\mu \, (n=1,2,3,\ldots)$, disjuntos dois a dois e de soma igual a Ω, tais que sai $\tilde{\mu}(\tilde{A}_n) < +\infty$ para cada n admissível. Seja qual for n, tem-se $\tilde{A}_n = A_n \cup N_n$, onde $A_n \in \mathfrak{A}, N_n \subset A'_n$ e $\mu(A'_n) = 0$ e onde 28) dá $\mu(A_n) < +\infty$. Doutro lado, a proposição N II, a fórmula 1) e as propriedades dos corpos-σ mostram que

$$\Omega = (\sum_n A_n) \cup (\sum_n N_n) = (\sum_n A_n) + N, \quad \text{com} \quad (\sum_n A_n)^- \cap (\sum_n N_n) =$$
$$= N = \Omega - (\sum_n A_n) \in \mathfrak{A}.$$

Daí, de N 7' *a)* e de N XXIII tiramos

$$N \subset \bigcup_n A'_n \quad \text{e} \quad 0 \leqq \mu(N) \leqq \sum_n \mu(A'_n) = 0\,.$$

Portanto, a alínea *c)* de N XXXV força a medida μ a ser finita-σ e assim a nossa demonstração fica terminada.

28. **O problema da extensão de funções aferidoras a medidas e a sua solução no caso particular dum espaço mensurável com decomposição irredutível.** Dados o espaço Ω e as duas classes não-vazias $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$, respectivamente de conjuntos genéricos $A \subset \Omega$ e A', consideremos as funções $\varphi(A)$ e $\psi(A')$

ambas numéricas reais, a primeira definida em $\mathcal{A}$ e a outra definida em $\mathcal{A}'$. Caso se tenha a relação

$$\varphi(A')=\psi(A') \text{ para qualquer } A',$$

diz-se que a função $\psi(A')$ é (obtida pela operação de) *restrição da função* $\varphi(A)$ *à classe* $\mathcal{A}'$ e que a função $\varphi(A)$ é (obtida pela operação de) *extensão da função* $\psi(A')$ *à classe* $\mathcal{A}$.

Exemplo 37. Dados um espaço de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ e o seu completivo $(\Omega, \mathcal{A}_\mu, \tilde{\mu})$, vê-se imediatamente que $\tilde{\mu}$ é extensão de μ ao corpo-σ completivo $\mathcal{A}_\mu$ e que μ é restrição de $\tilde{\mu}$ ao corpo-σ designado por $\mathcal{A}$.

São muito simples as propriedades da operação de restrição.(*) Com efeito, qualquer função $\varphi(A)$ admite uma e uma só restrição à classe $\mathcal{A}'$, a saber a função $\varphi(A')$; se $\varphi(A)$ for uma função aferidora, o mesmo sucede a $\varphi(A')$, desde que $\mathcal{A}'$ abranja algum conjunto de valor finito; a propriedade aditiva simples ou generalizada de $\varphi(A)$ transmite-se a $\varphi(A')$. O único inconveniente que pode surgir é que $\mathcal{A}'$ não sai necessàriamente um corpo ou um corpo-σ quando $\mathcal{A}$ o for.

Caso $\mathcal{A}'$ seja subclasse própria de $\mathcal{A}$, então qualquer função $\psi(A')$ admite muitas extensões à classe $\mathcal{A}$. Nesta conformidade, oferece interesse especial supor a função $\psi(A')$ aditiva ou aditiva-σ em $\mathcal{A}'$ e procurar extensões suas à classe $\mathcal{A}$ que sejam também aditivas ou aditivas-σ. Em particular, se a função $\psi(A')$ for aditiva-σ em $\mathcal{A}'$ e se $\mathcal{A}$ for um corpo-σ, convém indagar da existência de medidas que estendam a função dada a $\mathcal{A}$ e, no caso afirmativo, construir uma dessas medidas, a única se o número delas sair igual a 1 ou alguma, escolhida segundo um critério vantajoso, se o número delas sair superior a 1. É o que vamos fazer a seguir, em certos casos particulares importantes.

(*) Não pode haver confusão entre esta operação de restrição a uma *classe* não-vazia e a operação de restrição a um *conjunto* não-vazio atrás considerada.

* * *

Suponhamos que o espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{A})$ admite a decomposição irredutível $\mathcal{D} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$ e que ψ é uma função numérica real não-negativa definida na classe $\mathcal{D}$. Então, a única medida que estende a função ψ à classe $\mathcal{A}$ é a função $\mu(A)$ que se anula no conjunto vazio e que verifica a igualdade

$$29) \quad \mu(A_{n_1} + A_{n_2} + \cdots + A_{n_p} + \cdots) = \psi(A_{n_1}) + \psi(A_{n_2}) + \cdots + \psi(A_{n_p}) + \cdots$$

para qualquer colecção de índices $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$ extraída da colecção dos valores n possíveis. Com efeito:

A função $\mu(A)$ é aferidora e estende a função ψ à classe $\mathcal{A}$, porque $\mu(O) < +\infty$ e porque a hipótese $A \neq O$, a proposição N XIV e a igualdade 29) implicam a existência duma e duma só colecção de conjuntos $A_{n_p} \in \mathcal{D}$ tais que $\mu(A) = \mu(\sum_p A_{n_p}) = \sum_p \psi(A_{n_p}) \geqq 0$, com $\mu(A) = \psi(A)$ se A pertencer ao domínio de ψ. A função $\mu(A)$ é também aditiva-σ porque, dados os conjuntos não-vazios $A'_m \in \mathcal{A} \, (m = 1, 2, 3, \ldots)$, disjuntos dois a dois, pode pôr-se $A'_m = \sum_{p_m} A_{m, p_m}$, onde cada conjunto A_{m, p_m} pertence a $\mathcal{D}$, de modo que 29) e N II' conduzem à relação

$$\sum_m \mu(A'_m) = \sum_m (\sum_{p_m} \psi(A_{m, p_m})) = \mu(\sum_m (\sum_{p_m} A_{m, p_m})) = \mu(\sum_m A'_m).$$

Finalmente, se $\mu^*(A)$ for uma medida que estenda a função ψ à classe $\mathcal{A}$, tem-se $\mu^*(O) = 0$ e nenhum conjunto $A \neq O$ pode tornar $\mu^*(A) \neq \mu(A)$ porque, se tal sucedesse, a igualdade entre conjuntos já referida $A = \sum_p A_{n_p}$ e a aditividade-σ das funções μ^* e μ davam $\sum_p \mu^*(A_{n_p}) \neq \sum_p \mu(A_{n_p})$, donde a relação absurda $\psi(A_{n_p}) \neq \psi(A_{n_p})$ para algum valor de p.

Observação. A medida $\mu(A)$ definida a propósito de 29) sai finita-σ, quando e só quando $\psi(A_n) < +\infty$ para cada n admissível. Na realidade: Se $\psi(A_n) < +\infty$ para cada n, sai $\mu(A_n) < +\infty$ para cada n e a alínea *c)* de N XXXV prova que

μ é medida finita-σ; se $\psi(A_n)=+\infty$ para $n=n'$, suponhamos, então a irredutibilidade da decomposição $\mathfrak{D}$ impede $A_{n'}$ de ser soma de conjuntos de medida finita e, portanto, mostra que μ é uma medida infinita-σ.

29. A extensão de conteúdos-σ a medidas. Muitos problemas importantes implicados pela teoria da medida envolvem o tipo de extensão mencionado no título desta secção. Daí o interesse que oferece a proposição seguinte, à qual vamos chamar **teorema fundamental sobre a extensão de conteúdos-σ a medidas.**

VII) «Dados um espaço Ω, um corpo $\mathcal{G}$ de conjunto genérico $G\subset\Omega$ e um conteúdo-σ, seja $\varphi(G)$, definido em $\mathcal{G}$, considere-se a função $\Phi(C)$ que se obtém fazendo corresponder a cada conjunto $C\subset\Omega$ a relação

a) $\Phi(C)=\inf\limits_{\bigcup\limits_n G_n\supset C} \sum\limits_n \varphi(G_n)$, onde o ínfimo se refere a todas as colecções finitas ou numeráveis de conjuntos $G_n \in \mathcal{G}$ tais que $\bigcup\limits_n G_n\supset C$.

Então, é corpo-σ a classe $\mathcal{A}$ daqueles conjuntos $A\subset\Omega$ que satisfazem à relação

b) $\Phi(C)\geqq\Phi(A\cap C)+\Phi(A^-\cap C)$ para qualquer C.

Mais, a restrição da função $\Phi(C)$ à classe $\mathcal{A}$ é uma medida completa, digamos $\mu(A)$, que estende $\varphi(G)$ a $\mathcal{A}$ e que sai nula ou significativa, finita ou infinita, normada ou não-normada e finita-σ ou infinita-σ simultâneamente com a função φ. Além disso, qualquer medida $\mu^*(A)$ que estenda $\varphi(G)$ a $\mathcal{A}$ verifica a relação

c) $\mu^*(A)\leqq\mu(A)$ para cada A;

em particular, se a função $\varphi(G)$ for finita-σ, então $\mu(A)$ sai a única medida que estende φ a $\mathcal{A}$.»

Demonstração de VII. Procederemos por fases: Primeiro, vamos deduzir certas propriedades úteis da função Φ definida por *a)*; depois, vamos provar que a classe $\mathcal{A}$ é um corpo-σ, o qual contém $\mathcal{G}$; em seguida, vamos concluir que a restrição da função Φ a $\mathcal{A}$ é uma medida completa, a qual estende a função φ e tem o tipo dela; por fim, vamos demonstrar o período final do enunciado.

1.ª fase. Dado $C \subset \Omega$, a relação $\Omega \in \mathcal{G}$, vista em 17 *a)*, garante a existência de conjuntos G_n que têm as propriedades referidas no enunciado ou, como também se diz, que formam uma *cobertura de* C *extraída de* $\mathcal{G}$; portanto, a relação *a)* do texto define um e um só número $\Phi(C) \geq 0$. Mais, se C for um conjunto G, não só ele serve de cobertura de si mesmo, como também N 9 *b)* e N 14) forçam $G = \bigcup_n (G \cap G_n)$ para quaisquer conjuntos G_n que formem uma cobertura de G extraída de $\mathcal{G}$, donde, atendendo à relação *a)* do texto, à propriedade 17 *c)* e às alíneas *d)* e *b)* de N XXXII, a desigualdade

$$\Phi(G) \leqq \varphi(G) \leqq \inf_{\bigcup_n G_n \supset G} \sum_n \varphi(G \cap G_n) \leqq \inf_{\bigcup_n G_n \supset G} \sum_n \varphi(G_n) = \Phi(G).$$

O que precede e a relação $\varphi(O) = 0 < +\infty$, esta devida a N XXXII *a)*, mostram que $\Phi(C)$ *é uma função aferidora que estende* $\varphi(G)$ *a* 2^Ω.

Caso se tenha $C \subset D \subset \Omega$, qualquer cobertura de D extraída de $\mathcal{G}$ é também uma cobertura de C. Portanto, a relação *a)* do enunciado dá a nova relação

30) $\Phi(C) \leqq \Phi(D)$, sempre que se tenha $C \subset D \subset \Omega$.

Escolhidos um número $\varepsilon > 0$ e uma colecção finita ou numerável de conjuntos $C_m \subset \Omega$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$, a relação *a)* faz corresponder a cada C_m conjuntos $G_{m,n} \in \mathcal{G}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ que o cobrem e que satisfazem a $\sum_n \varphi(G_{m,n}) \leqq \Phi(C_m) + \varepsilon/2^m$. Como N II dá $\bigcup_m C_m \subset \bigcup_{m,n} G_{m,n}$, concluímos que $\Phi(\bigcup_m C_m) \leqq \sum_{m,n} \varphi(G_{m,n}) \leqq$

$\leqq \sum_m \Phi(C_m)+\varepsilon$, donde, por ε ser arbitrário, a relação(*)

31) $\Phi(\bigcup_m C_m) \leqq \sum_m \Phi(C_m)$ para qualquer colecção finita ou numerável de conjuntos $C_m \subset \Omega$.

Se $\mathcal{C}' \subset 2^\Omega$ for um corpo-σ, então a igualdade $\Phi(O)=0$ mostra que a restrição da função $\Phi(C)$ à classe $\mathcal{C}'$ sai uma função aferidora. Caso se tenha a relação

32) $\Phi(\sum_m C_m) \geqq \sum_m \Phi(C_m)$ para qualquer colecção *finita* de conjuntos $C_m \in \mathcal{C}'$ disjuntos dois a dois,

a restrição mencionada não só sai uma quase-medida, isso por causa da relação 31), como até sai uma medida, isso por causa da relação 31) e da alínea *c)* de N XXXII, ambas aplicadas a uma colecção numerável arbitrária, formada por conjuntos $C_m \in \mathcal{C}'$ disjuntos dois a dois.

2.ª *fase*. Escolhidos de qualquer modo $C \subset \Omega$ e $G \in \mathcal{G}$, a relação *a)* do enunciado, as fórmulas N 9) e N 14'), as propriedades dos corpos, a aditividade da função φ, as propriedades triviais dos ínfimos e a igualdade N 14) permitem escrever

$$\Phi(C) = \inf_{\bigcup_n G_n \supset C} \sum_n \varphi((G \cap G_n) + (G^- \cap G_n)) =$$

$$= \inf_{\bigcup_n G_n \supset C} [\sum_n \varphi(G \cap G_n) + \sum_n \varphi(G^- \cap G_n)] \geqq \inf_{\bigcup_n (G \cap G_n) \supset G \cap C} \sum_n \varphi(G \cap G_n) +$$

$$+ \inf_{\bigcup_n (G^- \cap G_n) \supset G^- \cap C} \sum_n \varphi(G^- \cap G_n) \geqq \Phi(G \cap C) + \Phi(G^- \cap C).$$

Concluímos que qualquer conjunto situado em $\mathcal{G}$ satisfaz à relação *b)* do enunciado. Portanto, sai $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$.

(*) A uma função aferidora definida numa classe $\mathcal{C}$ que é corpo-σ chama-se *medida exterior* se ela atribuir valor nulo ao conjunto vazio e se ela verificar as relações 30) e 31) para quaisquer conjuntos $C, D \supset C$ e C_m pertencentes a $\mathcal{C}$. Portanto, a função $\Phi(C)$ do texto é uma medida exterior definida em 2^Ω.

Caso $A \subset \Omega$ verifique a relação *b)*, então N 5) mostra que o mesmo sucede a A^-. Por outras palavras, $A \in \mathcal{C}$ arrasta $A^- \in \mathcal{C}$.

Se escolhermos qualquer colecção finita de conjuntos $A_n \in \mathcal{C} (n=1, 2, \ldots, r)$ e se substituirmos, em *b)* do enunciado, primeiro C sucessivamente por C, por $A_1 \cap C$ e por $A_1^- \cap C$ e depois A sucessivamente por A_1, por A_2 e por A_2, então 31), N 9), N 14'), N 15') e N 10 *a)* dão a desigualdade

$$\begin{gathered}\Phi(C) \geqq \Phi(A_1 \cap C) + \Phi(A_1^- \cap C) \geqq \Phi(A_2 \cap (A_1 \cap C)) + \\ + \Phi(A_2^- \cap (A_1 \cap C)) + \Phi(A_2 \cap (A_1^- \cap C)) + \\ + \Phi(A_2^- \cap (A_1^- \cap C)) \geqq \Phi([(A_1 \cap A_2) + (A_1 \cap A_2^-) + (A_1^- \cap A_2)] \cap C) + \\ + \Phi((A_1^- \cap A_2^-) \cap C) = \Phi((A_1 \cup A_2) \cap C) + \Phi((A_1 \cup A_2)^- \cap C),\end{gathered}$$

da qual concluímos primeiro $A_1 \cup A_2 \in \mathcal{C}$ e depois, recorrendo ao método da indução finita e à propriedade associativa da união, $\bigcup_n A_n \in \mathcal{C}$, de modo que $\mathcal{C}$ é um corpo.

Se escolhermos qualquer colecção numerável de conjuntos $A_n \in \mathcal{C} (n=1, 2, 3, \cdots)$, a fórmula 1) e as propriedades dos corpos permitem estabelecer a igualdade

$$\bigcup_n A_n = \sum_n A'_n, \text{ com } A'_1 = A_1 \text{ e } A'_n = A_1^- \cap \cdots \cap A_{n-1}^- \cap A_n \in \mathcal{C} \text{ para } n > 1.$$

Pondo agora $A'_1 + A'_2 + \cdots + A'_r = B_r \uparrow$, qualquer r dá $(\bigcup_n A_n)^- \subset \subset B_r^- \in \mathcal{C}$, de modo que *b)* e 30) conduzem à desigualdade

$$33) \quad \Phi(C) \geqq \Phi(B_r \cap C) + \Phi((\bigcup_n A_n)^- \cap C),$$

válida para C e r arbitrários.

Doutro lado, se escolhermos um índice $n > 1$, se substituirmos os conjuntos C e A da relação *b)* respectivamente por $B_n \cap C$ e por A'_n e se recordarmos as propriedades N 9) e a igualdade N 14'), então tiramos primeiro $\Phi(B_n \cap C) \geqq \Phi(B_{n-1} \cap C) + \Phi(A'_n \cap C)$ e depois, pelo método da indução finita, a desigualdade

$$34) \quad \Phi(B_r \cap C) \geqq \Phi(A'_1 \cap C) + \Phi(A'_2 \cap C) + \cdots + \Phi(A'_r \cap C),$$

válida para C e r arbitrários.

Posto isso, as desigualdades 33) e 34), a relação 31) e a igualdade N 14') dão o resultado

$$\Phi(C) \geqq \sum_n \Phi(A'_n \cap C) + \Phi((\bigcup_n A_n)^- \cap C) \geqq \Phi((\bigcup_n A_n) \cap C) + \Phi((\bigcup_n A_n)^- \cap C),$$

o qual prova que $\mathfrak{A}$ é um corpo-σ, ficando assim completada a 2.ª fase da nossa demonstração.

3.ª fase. Pondo $C = \Omega$ em 34), alcança-se um caso particular que reproduz a relação 32) na hipótese $\mathfrak{C}' = \mathfrak{A}$, a saber

> $\Phi(\sum_m A'_m) \geq \sum_m \Phi(A'_m)$ para qualquer colecção finita de conjuntos $A'_m \in \mathfrak{A}$ disjuntos dois a dois.

Portanto, as fases 1.ª e 2.ª da nossa demonstração provam que $\mu(A)$, a restrição de $\Phi(C)$ a $\mathfrak{A}$, é uma medida que estende $\varphi(G)$ a $\mathfrak{A}$.

Se $A' \in \mathfrak{A}$ anular a medida μ e se $N \subset \Omega$ for um subconjunto qualquer de A', então a igualdade $\Phi(A') = 0$, as propriedades N 9 *a)* e N 1 *b)* e a relação 30) dão primeiro $\Phi(N \cap C) = 0$ para qualquer C e dão depois a relação *b)* do enunciado, com N em lugar de A. Logo $N \in \mathfrak{A}$ ou, equivalentemente, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_\mu$; por outras palavras, a medida $\mu(A)$ é completa.

Porque $\mu(G) = \varphi(G)$ para qualquer G e porque, em particular, $\mu(\Omega) = \varphi(\Omega)$, tiramos de N XXXV e das definições de função aferidora normada e não-normada que a medida $\mu(A)$ sai nula, significativa, finita, infinita, normada ou não-normada simultâneamente com a função $\varphi(G)$ e que a medida $\mu(A)$ sai finita-σ se a função $\varphi(G)$ o for.

Admitamos agora que a medida $\mu(A)$ é finita-σ ou, equivalentemente, que existem conjuntos $A_p \in \mathfrak{A}$ $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ disjuntos dois a dois, de soma igual a Ω e tais que $\Phi(A_p) < +\infty$ para cada p. Então, a relação *a)* do enunciado faz corresponder a cada A_p conjuntos $G_{p,q} \in \mathfrak{G}$ $(q = 1, 2, 3, \ldots)$ que o cobrem e que satisfazem a $\sum_q \varphi(G_{p,q}) < +\infty$. Como a proposição N II, a renumeração dos $G_{p,q}$, a fórmula 1) e as propriedades dos corpos permitem escrever

$$\Omega = \sum_p A_p = \bigcup_{p,q} G_{p,q} = \bigcup_r G_r = \sum_r G'_r, \text{ com } G'_1 = G_1 \text{ e } G'_r =$$
$$= G_1^- \cap \cdots \cap G_{r-1}^- \cap G_r \in \mathcal{G} \text{ para } r > 1,$$

concluímos de N IV, de N 9 *a)* e de N XXXII *b)* que $\varphi(G'_r) < +\infty$ para cada r admissível. Logo a função $\varphi(G)$ sai finita-σ e fica completada a 3.ª fase da nossa demonstração.

4.ª fase. Seja μ^* uma medida definida no corpo-σ designado por $\mathcal{A}$, a qual partilha com a medida μ a propriedade de estender a função φ a $\mathcal{A}$.

Caso um certo conjunto A torne $\mu^*(A) > \mu(A)$, sai $\mu(A) < +\infty$ e podemos fixar um número positivo $\varepsilon < \mu^*(A) - \mu(A)$. Então, a definição da função μ, a relação *a)* do enunciado e a alínea *d)* de N XXXIII provam a existência de conjuntos $G_n \in \mathcal{G}$ que cobrem A e que verificam a desigualdade

$$\mu^*(A) > \Phi(A) + \varepsilon > \sum_n \mu^*(G_n) \geqq \mu^*(\bigcup_n G_n),$$

a qual é absurda em face da alínea *b)* de N XXXIII. Portanto, a relação *c)* do enunciado não pode deixar de ser correcta.

Suponhamos agora que a função $\varphi(G)$ é finita-σ ou, equivalentemente, que existem conjuntos $G_p \in \mathcal{G}$ disjuntos dois a dois, de soma igual a Ω e tais que $\varphi(G_p) = \mu(G_p) = \mu^*(G_p) < +\infty$ para cada p. Caso um certo conjunto A torne $\mu^*(A) < \mu(A)$, a propriedade N 9 *b)*, a igualdade N 14'), a aditividade-σ das medidas e a alínea *b)* de N XXXIII dão a relação

$$\mu^*(A) = \sum_p \mu^*(A \cap G_p) < \sum_p \mu(A \cap G_p),$$
$$\text{com } \mu(A \cap G_p) < +\infty \text{ para cada } p,$$

da qual concluímos que existe um conjunto G_p que satisfaz à desigualdade $\mu^*(A \cap G_p) < \mu(A \cap G_p)$ e que, portanto, conduz à nova desigualdade

$$+\infty > \mu^*(G_p - (A \cap G_p)) > \mu^*(G_p) - \mu(A \cap G_p) = \mu(G_p - (A \cap G_p)),$$

um resultado absurdo em face da relação *c)* do enunciado.

Portanto, sai $\mu^*(A) \geq \mu(A)$ para qualquer A e fica completada a 4.ª fase da nossa demonstração.

Acrescentamos um exemplo relativo à doutrina exposta.

Exemplo 38. Se Ω for o espaço dos números naturais, se $\mathcal{G}$ for o corpo-σ formado pelos dois conjuntos O e Ω e se φ for a medida completa definida em $(\Omega, \mathcal{G})$ pela igualdade $\varphi(\Omega) = +\infty$, então sai $\Phi(O) = \varphi(O) = 0$ e $\Phi(C) = +\infty$ para qualquer $C \neq O$, a classe $\mathcal{A}$ coincide com 2^{Ω} e a medida completa $\mu(A)$ identifica-se com a função $\Phi(C)$. Note-se que cada uma das funções $\varphi(G)$ e $\mu(A)$ é infinita e infinita-σ e que qualquer das funções $\varphi_p(A)$ referidas na observação anexa a N XXXVII' é uma medida completa, infinita e finita-σ, a qual estende $\varphi(G)$ a $\mathcal{A}$ e é distinta de $\mu(A)$.

* * *

Segue uma proposição que tem o seu interesse próprio e que vai facilitar algumas deduções posteriores.

VIII) «Atribua-se a cada um dos símbolos $\Omega, \mathcal{G}, \varphi(G), \mathcal{A}$ e $\mu(A)$ o mesmo significado que no enunciado de VII e suponha-se que $\mathcal{K}$ é um corpo-σ tal que $\mathcal{G} \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{A}$.

Nesta conformidade, seja qual for o conteúdo-σ designado por φ, cada conjunto A determina um conjunto $K \in \mathcal{K}$ com as propriedades $A \subset K$ e $\mu(A) = \mu(K)$. Se a função $\varphi(G)$ for finita-σ, então a cada A corresponde também um $K \in \mathcal{K}$ com as propriedades $A \supset K$ e $\mu(A) = \mu(K)$.»

Demonstração de VIII. Escolhido um conjunto A, as propriedades da medida μ, a relação *a)* de VII, a convenção que os conjuntos K_n pertencem a $\mathcal{K}$ e as propriedades dos ínfimos dão a desigualdade

$$\mu(A) = \inf_{\bigcup_n G_n \supset A} \sum_n \mu(G_n) \geq \inf_{\bigcup_n K_n \supset A} \sum_n \mu(K_n) \geq \inf_{\bigcup_n K_n \supset A} \mu(\bigcup_n K_n) \geq \mu(A),$$

da qual tiramos a igualdade $\mu(A) = \inf_{\bigcup_n K_n \supset A} \mu(\bigcup_n K_n)$, onde $\bigcup_n K_n$

pertence sempre a $\mathcal{K}$, isso por causa das propriedades dos corpos-σ. Então, dado um número $\varepsilon>0$, podemos fazer corresponder a cada inteiro positivo q um conjunto K'_q com as propriedades

$$35) \qquad A\subset K'_q \in \mathcal{K} \quad \text{e} \quad \mu(A)\leqq\mu(K'_q)\leqq\mu(A)+\varepsilon/q.$$

Daí e da relação

$$A\subset \bigcap_{1\leqq q<\infty} K'_q=K\in\mathcal{K}, \text{ com } K\subset K'_q \text{ para cada } q,$$

esta devida a 18 *c)*, a N IV e a N 9 *a)*, concluímos que é exacta a primeira afirmação feita no enunciado.

Posto isso, se a função $\varphi(G)$ for finita-σ, existem conjuntos $G_p\in\mathcal{G}\,(p=1,2,3,\ldots)$ tais que $\sum_p G_p=\Omega$ e $\mu(G_p)<+\infty$ para cada p. Então, escolhidos um conjunto A e um índice p, as convenções $G_p=(A\cap G_p)+A_p$ e $\mu(A\cap G_p)=\varepsilon_p$ e as propriedades das medidas dão a relação $\mu(A_p)\leqq\mu(G_p)\leqq\mu(A_p)+\varepsilon_p$, na qual a hipótese $\varepsilon_p=0$ força o sinal da igualdade e a hipótese $\varepsilon_p>0$ institui o caso particular de 35) que se obtém fazendo $q=1$, $A=A_p$, $\varepsilon=\varepsilon_p$ e $K'_1=G_p$; de qualquer modo, inferimos que existe um conjunto $K_p\in\mathcal{K}$ com as propriedades $A_p\subset K_p\subset G_p$ e $\mu(A_p)=\mu(K_p)$. Portanto, a relação óbvia $A=\sum_p(A\cap G_p)$, as propriedades das medidas e a convenção $\sum_p(G_p-K_p)=K$ permitem escrever a igualdade

$$\mu(A)=\sum_p\mu(A\cap G_p)=\sum_p[\mu(G_p)-\mu(A_p)]=\sum_p\mu(G_p-K_p)=\mu(K),$$

onde $K\in\mathcal{K}$, por causa das propriedades dos corpos-σ, e onde $K\subset A$, visto que $G_p-K_p\subset G_p-A_p=A\cap G_p$ para cada p. Fica assim completada a demonstração de VIII.

Passamos para um corolário de VIII, a saber:

VIII') «Seja K o conjunto genérico da classe $\mathcal{K}$ citada no enunciado de VIII. Então, a medida completiva de $\mu(K)$ sai uma restrição da medida $\mu(A)$, a qual restrição coincide com $\mu(A)$ se a função $\varphi(G)$ for finita-σ.»

Demonstração de VIII'. Vimos em VII que a medida $\mu(A)$ é completa e admitimos as hipóteses de VIII, pelo que $\mathcal{K}\subset\mathcal{A}$ é um corpo-σ ou, equivalentemente, $\mu(K)$ é uma medida restritiva de $\mu(A)$. Logo pertence a $\mathcal{A}$ qualquer subconjunto N dum conjunto $K'\in\mathcal{K}$ com a propriedade $\mu(K')=0$ e, portanto, é subclasse de $\mathcal{A}$ a classe $\mathcal{K}_\mu$ dos conjuntos $K\cup N$ ou seja o corpo-σ completivo de $\mathcal{K}$ com respeito à medida $\mu(K)$. Mas, a igualdade 28), as propriedades dos corpos-σ, as alíneas *b)* e *c)* de N XXXIII e a fórmula 1) mostram que a função $\tilde{\mu}$ completiva da medida $\mu(K)$ faz corresponder a cada conjunto $K\cup N$ o número dado pela igualdade

$$\tilde{\mu}(K\cup N)=\mu(K)+\mu(K^{-}\cap N)=\mu(K\cup N).$$

Consequentemente, a medida completiva de $\mu(K)$ é a restrição de $\mu(A)$ à classe $\mathcal{K}_\mu\subset\mathcal{A}$.

Suponhamos agora que a função $\varphi(G)$ é finita-σ, de modo que a proposição VII obriga a função $\mu(A)$ a sair também finita-σ. Então, escolhido um conjunto A, existem conjuntos $A_n\in\mathcal{A}(n=1,2,3,\ldots)$ tais que $\sum_n A_n=A$ e $\mu(A_n)<+\infty$ para cada n. Além disso, a proposição VIII faz corresponder a cada A_n dois conjuntos K_n e K_n', ambos pertencentes a $\mathcal{K}$, com as propriedades $K_n\subset A_n\subset K_n'$ e $\mu(K_n)=\mu(A_n)=\mu(K_n')<+\infty$. Logo a parte final de V e as propriedades dos corpos-σ dão $A\in\mathcal{K}_\mu$ ou, equivalentemente, $\mathcal{A}\subset\mathcal{K}_\mu$. Como $\mathcal{K}_\mu\subset\mathcal{A}$, vem $\mathcal{A}=\mathcal{K}_\mu$. Concluimos que a medida completiva de $\mu(K)$ coincide com $\mu(A)$, ficando assim terminada a demonstração de VIII'.

Observação. Se fizermos $\mathcal{G}=\mathcal{K}$ no exemplo 38, a medida $\mu(K)$ sai completa e, portanto, a sua medida completiva não coincide com $\mu(A)$.

* * *

Os resultados até agora alcançados nesta secção permitem resolver còmodamente o problema da extensão dum conteúdo-σ definido num corpo $\mathcal{G}$ a uma medida definida no corpo-σ gerado por $\mathcal{G}$. Com efeito, vale a proposição seguinte:

IX) «Atribua-se a cada um dos símbolos $\Omega, \mathcal{G}, \varphi(G), \mathcal{A}$ e $\mu(A)$ o mesmo significado que no enunciado de VII.

Então, se a classe $\mathcal{B}$ de conjunto genérico H for o corpo-σ gerado por $\mathcal{G}$, tem-se $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ e a função $\mu(H)$ não só sai uma medida que estende $\varphi(G)$ a $\mathcal{B}$, como também sai nula ou significativa, finita ou infinita, normada ou não-normada e finita-σ ou infinita-σ simultâneamente com a função φ. Mais, qualquer medida $\mu^*(H)$ que estenda $\varphi(G)$ a $\mathcal{B}$ verifica a relação

$$a) \qquad \mu^*(H) \leqq \mu(H) \text{ para cada } H;$$

em particular, se a função $\varphi(G)$ for finita-σ, então não pode haver duas medidas diferentes que estendam φ a $\mathcal{B}$. Finalmente, a medida completiva de $\mu(H)$ sai uma restrição da medida $\mu(A)$, a qual restrição coincide com $\mu(A)$ se a função φ for finita-σ.»

Demonstração de IX. Todas as deduções que vamos fazer são consequências muito simples das considerações produzidas a propósito de VII e de VIII'.

Para começar, a 2.ª fase da demonstração de VII e a definição que se deu para o corpo-σ gerado por $\mathcal{G}$ provam a relação de inclusão $\mathcal{G} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Logo a restrição da função $\mu(A)$ à classe $\mathcal{B}$ é uma medida que estende $\varphi(G)$ a $\mathcal{B}$. Depois, o mesmo processo usado na 3.ª fase da demonstração de VII leva à conclusão que a medida $\mu(H)$ sai nula, significativa, finita, infinita, normada ou não-normada simultâneamente com a função φ e que essa medida sai finita-σ se a função φ o for. Doutro lado, caso a medida $\mu(H)$ seja finita-σ, a alínea *c)* de N XXXV força a sua extensão $\mu(A)$ a sair finita-σ e, consequentemente, a proposição VII força a função $\varphi(G)$ a sair também finita-σ.

Mais, como a 4.ª fase da demonstração de VII se aplica, em particular, aos conjuntos $A \in \mathcal{B}$, a relação *a)* do enunciado é certamente correcta e, no caso duma função $\varphi(G)$ finita-σ, a função $\mu(H)$ não pode deixar de ser a única medida que estende φ a $\mathcal{B}$.

Finalmente, a parte do enunciado que diz respeito à completação da medida $\mu(H)$ reduz-se ao caso particular de VIII' que se obtém fazendo $\mathcal{K}=\mathcal{B}$. Está pois terminada a demonstração de IX.

Observação. Guardamos para mais tarde a apresentação dum exemplo em que o conteúdo-σ, definido em $\mathcal{G}$ e designado por φ, é infinito-σ e admite várias extensões, diferentes umas das outras, a uma medida definida em $\mathcal{B}$.

* * *

Fechamos esta secção com uma proposição que permite tratar o problema da extensão dum conteúdo-σ finito-σ e significativo a uma medida, reduzindo-o ao problema análogo relativo a certos conteúdos-σ finitos especiais. Ei-la:

X) «Atribua-se a cada um dos símbolos $\Omega, \mathcal{G}, \varphi(G), \mathcal{A}$ e $\mu(A)$ o mesmo significado que no enunciado de VII, suponha-se que $\varphi(G)$ é um conteúdo-σ finito-σ e significativo e estabeleça-se a igualdade entre funções

$$a) \qquad \varphi(G)=c_1\cdot\varphi_1(G)+c_2\cdot\varphi_2(G)+\cdots+c_p\cdot\varphi_p(G)+\cdots,$$

onde cada símbolo c_p representa uma constante positiva, onde cada símbolo $\varphi_p(G)$ significa um conteúdo-σ normado e onde o número de parcelas do segundo membro iguala 1 ou ∞, conforme a função $\varphi(G)$ for finita ou infinita. Então, verifica-se a igualdade entre funções

$$b) \qquad \mu(A)=c_1\cdot\mu_1(A)+c_2\cdot\mu_2(A)+\cdots+c_p\cdot\mu_p(A)+\cdots,$$

onde, dado p, o símbolo $\mu_p(A)$ representa a (única) medida que estende a função $\varphi_p(G)$ à classe $\mathcal{A}$.»

Demonstração de X. Antes de mais nada, a proposição N XXXV' garante que existem constantes c_p e funções $\varphi_p(G)$ com as propriedades descritas no enunciado. Depois, escolhida uma das funções $\varphi_p(G)$, a proposição VII faz corresponder uma e só uma medida $\mu_p(A)$, a qual estende $\varphi_p(G)$ a $\mathcal{A}$ (e sai completa e normada). Em seguida, a proposição N XXXIV mostra que o segundo membro da igualdade *b)* é uma medida definida em $\mathcal{A}$, a qual se reduz a $\varphi(G)$ para qualquer conjunto G, isso por causa da igualdade *a)*. Finalmente, a última parte de VII prova que a medida $\sum_p c_p \cdot \mu_p(A)$ não pode deixar de coincidir com a medida $\mu(A)$, ficando assim terminada a demonstração de X.

Observação. Se a classe $\mathcal{K}$ de conjunto genérico K for um corpo-σ tal que $\mathcal{G} \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{A}$, então basta restringir a $\mathcal{K}$ cada uma das medidas $\mu(A)$ e $\mu_p(A)$ da igualdade *b)* de X para que saia a nova igualdade

$$\mu(K) = c_1 \cdot \mu_1(K) + c_2 \cdot \mu_2(K) + \cdots + c_p \cdot \mu_p(K) + \cdots.$$

Esta conclusão vale, em particular, quando se substitui K por H, o conjunto genérico de $\mathcal{H}$ ou seja do corpo-σ gerado por $\mathcal{G}$.

30. Restrição dum espaço de medida a um subespaço mensurável. Seja $[\Omega(\omega), \mathcal{A}(A), \mu(A)]$ um espaço de medida e consideremos o conjunto *mensurável* $\Omega' \neq O$ como subespaço de Ω. Então, as relações $\mu(O \cap \Omega') = 0 < +\infty$, $A \cap \Omega' \subset \Omega \cap \Omega' = \Omega'$ e 18 *a)* mostram que a restrição da medida $\mu(A)$ à classe dos conjuntos $A \cap \Omega'$ é uma função aferidora aditiva-σ em todos os casos e é uma medida quando e só quando $\Omega' = \Omega$.

A função $\mu|\Omega'$ ou (abreviadamente) μ' determinada, para qualquer restrição $A|\Omega'$, pela igualdade

$$36) \qquad \mu'(A|\Omega') = \mu(A \cap \Omega')$$

faz corresponder um e um só número não-negativo, finito ou infinito, a toda a restrição dum conjunto A a Ω'(*). Esta função sai uma medida, pois a restrição da classe $\mathcal{A}$ a Ω' é um corpo-σ, a relação 36) e a alínea *a)* de N XXXIII dão $\mu'(O|\Omega') = 0 < +\infty$ e 5 *a)*, 36), N 14) e N XXXIII *c)* mostram que quaisquer conjuntos $A_n|\Omega' \in \mathcal{A}|\Omega' (n = 1, 2, 3, \ldots)$ disjuntos dois a dois satisfazem à igualdade(**)

$$\mu'(\sum_n (A_n|\Omega')) = \mu'((\bigcup_n A_n)|\Omega') = \mu(\sum_n (A_n \cap \Omega')) = \sum_n \mu'(A_n|\Omega').$$

(*) Atenda-se a 4 *a)*.

(**) As considerações feitas no exemplo 6 mostram que a seguir é necessário pôr o símbolo $\cup$ no segundo membro.

Posto isso, representamos o espaço de medida $(\Omega|\Omega', \mathcal{A}|\Omega', \mu')$ também pelo símbolo abreviado $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)|\Omega'$ e chamamos-lhe *restrição do espaço de medida* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ao subespaço mensurável* Ω' ou *(espaço de medida)* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *dado* Ω' ou $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *na hipótese* (de se verificar) Ω' ou ainda $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *sob a condição* (de se verificar) Ω'. Quanto à medida $\mu'(A|\Omega')$, designamo-la por *restrição da medida* $\mu(A)$ *ao subespaço mensurável* Ω' ou por *(medida)* $\mu(A)$ *dado* Ω' ou por $\mu(A)$ *na hipótese* Ω' ou ainda por $\mu(A)$ *sob a condição* Ω'. Note-se que são bem distintos, pelo menos em geral, os conceitos de restrição duma medida $\mu(A)$ a um subespaço mensurável Ω' e de restrição dessa medida a uma classe de conjuntos, mesmo que esta tenha $A \cap \Omega'$ por conjunto genérico.

*
* *

A proposição seguinte relaciona, em certos casos, o comportamento duma medida com o da sua restrição a um subespaço mensurável.

XI) «Dados o espaço de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ e um subespaço mensurável de Ω, digamos Ω', então a restrição da medida μ a Ω' herda de μ qualquer das propriedades de ser nula, finita, finita-σ ou completa.»

Demonstração de XI. A alínea *b)* de N XXXIII implica a desigualdade $\mu(A \cap \Omega') \leq \mu(A)$ para qualquer $A \in \mathcal{A}$. Daí, de N XXXV, de 36) e do exemplo 6 resultam todas as afirmações feitas no enunciado, salvo aquela que diz respeito a medidas completas.

Suponhamos agora que a medida μ é completa ou, equivalentemente, que $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}$ (veja-se o texto anterior ao exemplo 36). Se extrairmos do espaço $\Omega|\Omega'$ qualquer conjunto $N|\Omega'$ com as propriedades $N|\Omega' \subset A|\Omega' \in \mathcal{A}|\Omega'$ e $\mu'(A|\Omega')=0$, a relação 36) e a relação óbvia $N \cap \Omega' \subset A \cap \Omega'$ dão $N \cap \Omega' \in \mathcal{A}$, donde(*) $N|\Omega' \in \mathcal{A}|\Omega'$. Concluimos que a medida $\mu'(A|\Omega')$ é completa e fica assim terminada a nossa demonstração.

Por fim, vamos vêr dois exemplos.

(*) Atenda-se a 4 *b)*.

Exemplo 39. Retomemos a medida μ do exemplo 36, a qual é significativa e incompleta. A sua restrição a $\Omega' = \{3,4\}$ sai nula e incompleta, enquanto a sua restrição a $\Omega' = \{1, 2, 5\}$ sai significativa e completa.

Exemplo 40. Retomemos a medida μ do exemplo 35, a qual é infinita e infinita-σ. A sua restrição a $\Omega' = \{3\}$ sai finita-σ e até finita.

Observação. O leitor reconhece, fàcilmente, que a operação de restrição a um subespaço mensurável escusa de conservar a propriedade duma medida de ser normada e a de ser não-normada.

31. Marginação dum espaço de medida com espaço marginal de valor prefixado. Seja $(\Omega, \mathcal{Cl}, \mu)$ um espaço de medida e suponhamos que Ω é o produto dum número finito ou duma infinidade numerável de espaços $\Omega_n (n = 1, 2, 3, \cdots)$. Fixado um número finito $\alpha > 0$ e repartida a colecção dos números n por duas colecções não-vazias, a primeira constituída pelos números $h, i > h, j > i, \cdots$ e a outra constituída pelos números $r, s > r, t > s, \cdots$ (*), podemos considerar o espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{Cl})_{(h,i,j,\ldots)} = (\Omega, \mathcal{Cl})_{r,s,t,\ldots}$ que se obtém marginando $(\Omega, \mathcal{Cl})$ com respeito a $\Omega_h \times \Omega_i \times \Omega_j \times \cdots$ e podemos definir aí uma função ${}_{\alpha}\mu_{(h,i,j,\ldots)}$ ou ${}_{\alpha}\mu_{r,s,t,\ldots}$ através da relação

$$37) \qquad {}_{\alpha}\mu_{(h,i,j,\ldots)}\,(C_{(h,i,j,\ldots)}) = \mu\,(C)/\alpha,$$

onde C representa qualquer cilindro situado em $\mathcal{Cl}$ e de geratrizes paralelas a $\Omega_h, \Omega_i, \Omega_j, \cdots$ e onde $C_{(h,i,j,\ldots)} = C_{r,s,t,\ldots}$ significa a base de C em $\Omega_{(h,i,j,\ldots)} = \Omega_r \times \Omega_s \times \Omega_t \times \cdots$. (**)

A função definida por meio de 37) faz corresponder um e um só número não-negativo, finito ou infinito, a cada con-

(*) Repete-se a nota *) à página 35.

(**) Talvez valha a pena notar que a relação 37) não consente a escolha $\alpha = 0$. Caso se tenha $\mu(\Omega) < +\infty$, a escolha $\alpha = +\infty$ é possível, mas destituída de interesse.

junto situado na classe $\mathcal{C}_{(h,i,\ldots)}=\mathcal{C}_{r,s,\ldots}$ ou seja no corpo-σ que é a base de $\mathcal{O}$ em $\Omega_{(h,i,\ldots)}$, toma o valor 0 se pusermos $C=O$ ou, equivalentemente, se igualarmos $C_{(h,i,\ldots)}$ ao conjunto vazio de $\Omega_{(h,i,\ldots)}$ e sai aditiva-σ porque, dados os conjuntos $C_{(h,i,\ldots)}$, $C'_{(h,i,\ldots)},\cdots \in \mathcal{C}_{(h,i,\ldots)}$, disjuntos dois a dois e formando uma colecção finita ou numerável, a propriedade 12' *b)*, a relação 37) e a aditividade-σ da medida μ impõem a igualdade

$$
{}_{\alpha}\mu_{(h,i,\ldots)}(C_{(h,i,\ldots)}+C'_{(h,i,\ldots)}+\cdots)=
$$
$$
={}_{\alpha}\mu_{(h,i,\ldots)}(C_{(h,i,\ldots)})+{}_{\alpha}\mu_{(h,i,\ldots)}(C'_{(h,i,\ldots)})+\cdots .
$$

Portanto, a função referida é uma medida definida no espaço mensurável $(\Omega_{(h,i,\ldots)},\ \mathcal{C}_{(h,i,\ldots)})$, com a propriedade ${}_{\alpha}\mu_{(h,i,\ldots)}(\Omega_{(h,i,\ldots)})=\mu(\Omega)/\alpha$; a essa medida corresponde o espaço de medida $(\Omega_{(h,i,\ldots)}, \mathcal{C}_{(h,i,\ldots)}, {}_{\alpha}\mu_{(h,i,\ldots)})$ ou, usando uma notação abreviada, ${}_{\alpha}(\Omega, \mathcal{O}, \mu)_{(h,i,\ldots)}={}_{\alpha}(\Omega, \mathcal{O}, \mu)_{r,s,\ldots}$.

As considerações que acabamos de produzir tornam plausível o costume de chamar à função ${}_{\alpha}\mu_{(h,i,\ldots)}$ *medida marginal de* μ e de chamar ao ente representado pelo símbolo ${}_{\alpha}(\Omega, \mathcal{O}, \mu)_{(h,i,\ldots)}$ *espaço de medida marginal de* $(\Omega, \mathcal{O}, \mu)$, sendo qualquer deles *marginal no espaço* $\Omega_{(h,i,\ldots)}$ *de valor prefixado igual a* $\mu(\Omega)/\alpha$. Nesta conformidade, a operação que transforma μ em ${}_{\alpha}\mu_{(h,i,\ldots)}$ ou $(\Omega, \mathcal{O}, \mu)$ em ${}_{\alpha}(\Omega, \mathcal{O}, \mu)_{(h,i,\ldots)}$ recebe o nome de *marginação de* μ *ou de* $(\Omega, \mathcal{O}, \mu)$ *com respeito ao espaço* $\Omega_h \times \Omega_i \times \cdots$ *e ao factor de escala* α.

Se tomarmos números positivos $\alpha_h, \alpha_i, \cdots$ tais que *o produto* $\alpha_h \cdot \alpha_i \cdot \cdots$ *sai absolutamente convergente* e de valor igual a α, então as propriedades dos produtos absolutamente convergentes e as da marginação de espaços mensuráveis não só mostram que a marginação de $(\Omega, \mathcal{O}, \mu)$ com respeito ao espaço $\Omega_h \times \Omega_i \times \cdots$ e ao factor α é equivalente a uma sucessão de operações simples do mesmo género tais que a primeira elimina o espaço-factor Ω_h e faz dividir por α_h, a segunda elimina o espaço-factor Ω_i e faz dividir por α_i, etc., como mostram também que as operações simples mencionadas gozam das propriedades comutativa e associativa.

Observação. Se mudarmos μ para r em 37), então considerações muito semelhantes às acima feitas permitem estabelecer que a função $r(C)$ sai uma medida, sob a condição de se fixar α e de se escolher uma medida para a função do primeiro membro. Nesta conformidade, a correspondência biunívoca estabelecida na observação final da secção n.º 9 (desprovida de qualquer interferência nas bases dos cilindros envolvidos) permite igualar $\mu(C)$ à expressão

$$\alpha \cdot {}_{\alpha}\mu_{(h,i,\ldots)}(C_{(h,i,\ldots)}) = r(C_{(h,i,\ldots)} \times (\Omega_h \times \Omega_i \times \cdots)),$$

a qual se afigura, de certo modo, análoga à regra elementar que identifica o volume dum cilindro recto vulgar com o produto da altura pela área da base. Veremos mais tarde (digamos no exemplo 72) que tal analogia passa a ser, pràticamente, uma identidade se partirmos do espaço de Borel a 3 dimensões, dotado da medida de Lebesgue, se $(\Omega, \mathcal{Q}, \mu)$ for a restrição desse espaço de medida ao subespaço Ω confundido com o produto de duas rectas reais multiplicado por um intervalo linear fechado Ω_3, se escolhermos para C um cilindro recto vulgar de geratrizes paralelas a Ω_3 e se α for o valor que a medida de Lebesgue linear atribui a Ω_3.

* * *

A proposição seguinte relaciona, em muitos casos, o comportamento duma medida com o da sua marginal.

XII) «São dados o número finito e positivo α e o espaço de medida $(\Omega, \mathcal{Q}, \mu)$, onde Ω coincide com o produto dos espaços $\Omega_n (n=1,2,3,\cdots)$. Se a medida μ for nula, significativa, finita, infinita, infinita-σ ou completa, o mesmo sucede à sua marginal no espaço $\Omega_{(h,i,j,\ldots)}$ de valor prefixado igual a $\mu(\Omega)/\alpha$.»

Demonstração de XII. Para obter a parte da tese que diz respeito a medidas nulas, significativas, finitas ou infinitas, basta fazer $C=\Omega$ em 37) e atender às alíneas *a)* e *b)* de N XXXV.

Se a função ${}_{\alpha}\mu_{(h,i,\ldots)}$ for finita-σ, a alínea *c)* de N XXXV e a propriedade aditiva-σ das medidas permitem escrever a igualdade

$${}_{\alpha}\mu_{(h,i,\ldots)}(\Omega_{(h,i,\ldots)}) = {}_{\alpha}\mu_{(h,i,\ldots)}(C_{(h,i,\ldots)}) + {}_{\alpha}\mu_{(h,i,\ldots)}(C'_{(h,i,\ldots)}) + \cdots,$$

onde as parcelas do segundo membro são todas finitas e onde $\Omega_{(h,i,\ldots)} = C_{(h,i,\ldots)} + C'_{(h,i,\ldots)} + \cdots$. Portanto, a relação 37) e a propriedade 12' *b)* dão a igualdade

$$\mu(\Omega) = \mu(C) + \mu(C') + \cdots,$$

onde as parcelas do segundo membro são todas finitas e onde $\Omega = C + C' + \cdots$, ficando assim provado que a função μ sai finita-σ. Consequentemente, se a medida μ for infinita-σ, o mesmo sucede à medida ${}_{\alpha}\mu_{(h,i,\ldots)}$.

Suponhamos, finalmente, que a medida μ é completa. Então, as hipóteses

$$N_{(h,i,\ldots)} \subset C_{(h,i,\ldots)} \in \mathcal{C}_{(h,i,\ldots)} \text{ e } {}_{\alpha}\mu_{(h,i,\ldots)}(C_{(h,i,\ldots)}) = 0,$$

juntamente com 12' *a)* e com 37), impõem as relações $N \subset C$ e $N \in \mathcal{C}$, donde $N_{(h,i,\ldots)} \in \mathcal{C}_{(h,i,\ldots)}$. Quer dizer, se a medida μ for completa, o mesmo sucede à medida ${}_{\alpha}\mu_{(h,i,\ldots)}$. Fica assim terminada a nossa demonstração.

Seguem dois exemplos.

Exemplo 41. Tomemos para Ω o produto de $\Omega_1 = \{1, 2\}$ por $\Omega_2 = \Omega_1$, para $\mathcal{Q}$ o corpo-σ formado pelos quatro conjuntos $O, \Omega, A = \{(1, 1)\}$ e A^- e para μ a medida definida em $(\Omega, \mathcal{Q})$ pelas igualdades $\mu(A) = 1/2$ e $\mu(A^-) = 0$. Sai $\Omega_{(2)} = \Omega_1$, $\mathcal{C}_1 = \{O_1, \Omega_1\}$, ${}_{1/2}\mu_1(O_1) = 0$ e ${}_{1/2}\mu_1(\Omega_1) = 1$. Note-se que a medida μ é incompleta e não-normada, enquanto a medida ${}_{1/2}\mu_1$ resulta completa e normada.

Exemplo 42. Tomemos para espaço Ω o produto de $\Omega_1 = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ por $\Omega_2 = \Omega_1$, consideremos o espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{Q})$ provido da decomposição irredutível infinita $\mathfrak{D}$ cujo conjunto número m $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ é formado por todos os pontos de Ω que têm uma ou duas coordenadas iguais a m e não têm nenhuma coordenada superior a m e instituamos em $(\Omega, \mathcal{A})$ a única medida μ que estende a $\mathcal{A}$ a função ψ dotada do valor 1 em qualquer conjunto extraído de $\mathcal{D}$. Sai $\Omega_{(1)}=\Omega_2$, $\mathcal{C}_2=\{O_2, \Omega_2\}$, ${}_1\mu_2(O_2)=0$ e ${}_1\mu_2(\Omega_2)=+\infty$. Neste caso, a medida μ é finita-σ e a medida ${}_1\mu_2$ sai infinita-σ.

* * *

Fechamos esta secção tratando dum caso especial da marginação de medidas que foi o primeiro a ser abordado e que pode resolver-se por uma técnica elementar, a qual torna plausível o nome atribuído à operação em estudo.

Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida *finita e significativa,* suponhamos que Ω é o produto dos dois espaços Ω_1 e Ω_2 e designemos por $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ os corpos-σ constituídos pelos cilindros que pertencem à classe $\mathcal{A}$ e que têm geratrizes paralelas a Ω_2 e a Ω_1, respectivamente. Então, dadas duas decomposições de $(\Omega, \mathcal{A})$, a primeira formada por conjuntos $B, B', B'', \ldots$, situados em $\mathcal{B}$, e a outra formada por conjuntos $C, C', C'', \ldots$, situados em $\mathcal{C}$, qualquer delas finita ou infinita, dadas essas decomposições, a propriedade 18 *c)*, a definição de decomposição e a igualdade N 14') mostram que a classe

$$\mathcal{D}=\{B\cap C, B\cap C', B\cap C'', \ldots, B'\cap C, B'\cap C', B'\cap C'', \ldots$$
$$\ldots, B''\cap C, B''\cap C', B''\cap C'', \ldots\}^{(*)},$$

uma classe de intersecções òbviamente não-vazias, é também uma decomposição de $(\Omega, \mathcal{A})$.

Posto isso, passamos a trabalhar com a restrição da medida μ à classe $\mathcal{S}$ das somas extraídas de $\mathcal{D}$. Nesta conformidade, a aditividade-σ da função μ, a igualdade N 14'), a propriedade N 9 *b)* e a relação 37) fazem corresponder a

---

(*) A fórmula 10) permite pôr a igualdade do texto sob a forma equivalente

$$\mathcal{D}=\{B_1\times C_2, B_1\times C_2', B_1\times C_2'', \cdots, B_1'\times C_2, B_1'\times C_2', B_1'\times C_2'', \cdots$$
$$\cdots, B_1''\times C_2, B_1''\times C_2', B_1''\times C_2'', \cdots\}.$$

todo o número finito e positivo β as igualdades

$$\mu(B \cap C) + \mu(B \cap C') + \mu(B \cap C'') + \cdots = \beta \cdot {}_{\beta}\mu_1(B_1),$$
$$\mu(B' \cap C) + \mu(B' \cap C') + \mu(B' \cap C'') + \cdots = \beta \cdot {}_{\beta}\mu_1(B'_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Semelhantemente, a todo o número finito e positivo γ correspondem as igualdades

$$\mu(B \cap C) + \mu(B' \cap C) + \mu(B'' \cap C) + \cdots = \gamma \cdot {}_{\gamma}\mu_2(C_2),$$
$$\mu(B \cap C') + \mu(B' \cap C') + \mu(B'' \cap C') + \cdots = \gamma \cdot {}_{\beta}\mu_2(C'_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Além disso, verifica-se a igualdade

$$\beta \cdot {}_{\beta}\mu_1(B_1) + \beta \cdot {}_{\beta}\mu_1(B'_1) + \cdots = \mu(\Omega) = \gamma \cdot {}_{\gamma}\mu_2(C_2) + \gamma \cdot {}_{\gamma}\mu_2(C'_2) + \cdots,$$

a qual pode servir para controlar os cálculos anteriores.

Segue um quadro sinóptico do estudo que acabamos de fazer.

$\mathscr{B}$ \ $\mathscr{C}$	B	B'	B''	$\cdots \xrightarrow{\text{so-}}_{\text{ma}}$	Ω
C	$\mu(B \cap C)$	$\mu(B' \cap C)$	$\mu(B'' \cap C)$	$\cdots \xrightarrow{\text{so-}}_{\text{ma}}$	$\gamma \cdot {}_{\gamma}\mu_2(C_2)$
C'	$\mu(B \cap C')$	$\mu(B' \cap C')$	$\mu(B'' \cap C')$	$\cdots \xrightarrow{\text{so-}}_{\text{ma}}$	$\gamma \cdot {}_{\gamma}\mu_2(C'_2)$
C''	$\mu(B \cap C'')$	$\mu(B' \cap C'')$	$\mu(B'' \cap C'')$	$\cdots \xrightarrow{\text{so-}}_{\text{ma}}$	$\gamma \cdot {}_{\gamma}\mu_2(C''_2)$
$\cdots$ so- $\downarrow$ ma	$\cdots$ so- $\downarrow$ ma	$\cdots$ so- $\downarrow$ ma	$\cdots$ so- $\downarrow$ ma	$\cdots \xrightarrow{\text{so-}}_{\text{ma}}$ so- $\downarrow$ ma	$\cdots$ so- $\downarrow$ ma
Ω	$\beta \cdot {}_{\beta}\mu_1(B_1)$	$\beta \cdot {}_{\beta}\mu_1(B'_1)$	$\beta \cdot {}_{\beta}\mu_1(B''_1)$	$\cdots \xrightarrow{\text{so-}}_{\text{ma}}$	$\mu(\Omega)$

A linha inferior ou «*marginal*» do quadro contém os produtos do factor de escala β pelas medidas marginais ${}_\beta\mu_1(B_1)$, ${}_\beta\mu_1(B_1')$, ${}_\beta\mu_1(B_1'')$,... e a coluna direita ou «*marginal*» contém os produtos do factor de escala γ pelas medidas marginais ${}_\gamma\mu_2(C_2)$, ${}_\gamma\mu_2(C_2')$, ${}_\gamma\mu_2(C_2'')$, $\cdots$.

A proposição N XXII esclarece que $\mathcal{D}_1 = \{B_1, B_1', B_1'', \cdots\}$ é uma decomposição do espaço mensurável marginal $(\Omega, \mathcal{A})_1$ e que $\mathcal{D}_2 = \{C_2, C_2', C_2'', \cdots\}$ é uma decomposição do espaço mensurável marginal $(\Omega, \mathcal{A})_2$. Em particular, se $\mathcal{D}_1$ [ou $\mathcal{D}_2$] for uma decomposição irredutível, as considerações feitas à volta da igualdade 29) provam que o conhecimento de β [ou γ] e dos números da linha [ou coluna] marginal do quadro é inteiramente suficiente para definir a medida marginal de μ no espaço Ω_1 [ou Ω_2] de valor prefixado igual a $\mu(\Omega)/\beta$ [ou $\mu(\Omega)/\gamma$]. Claro que o caso particular referido pode alcançar-se todas as vezes que $(\Omega, \mathcal{A})$ admitir uma decomposição irredutível.(*)

Observação. Se tomarmos a convenção $\mu(\Omega) = {}_\beta\mu_1(\Omega_1) \cdot {}_\gamma\mu_2(\Omega_2)$, sugerida pelas reflexões feitas na observação que precede a proposição XII, então a igualdade $\mu(\Omega) = \beta \cdot {}_\beta\mu_1(\Omega_1) = \gamma \cdot {}_\gamma\mu_2(\Omega_2)$, imposta por 37), mostra que Ω_1 fica com o valor prefixado γ e que Ω_2 fica com o valor prefixado β.

32. A multiplicação de espaços de medida. Dada uma colecção finita ou numerável composta dos espaços de medida $[\Omega_n(\omega_n), \mathcal{A}_n(A_n), \mu_n(A_n)]$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$, põe-se, muitas vezes, o problema de construir uma medida μ_0 que deve ficar definida no espaço mensurável $[\Omega(\omega), \mathcal{A}(A)] = \prod_n [\Omega_n(\omega_n), \mathcal{A}_n(A_n)]$ e que, escolhido qualquer conjunto A com a forma dum produto de conjuntos A_n, deve atribuir-lhe um valor igual ao produto das medidas μ_n dos conjuntos-factores. Depois levantam-se as questões suplementares de averiguar se μ_0 é a única me-

(*) Tudo quanto se disse da página 138 para cá é extensivo ao caso em que $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sai um espaço de medida infinita. Outro tanto já não sucede com a observação seguinte.

dida nas condições referidas e de relacionar as propriedades mais relevantes de μ_0 com as das medidas μ_n.

Quando uma medida $\mu_0(A)$ resolve o problema posto, diz-se que ela se obtém por **multiplicação** *dos factores* $\mu_n(A_n)$ ou que ela é igual a um **produto** *das medidas* $\mu_n(A_n)$ e escreve-se a igualdade simbólica

$$38) \quad \mu_0(A)=\mu_1(A_1)\times\mu_2(A_2)\times\cdots\times\mu_n(A_n)\times\cdots,$$

a qual pode abreviar-se para

$$38') \quad \mu_0(A)=\prod_n \mu_n(A_n) \quad \text{ou} \quad \mu_0=\mu_1\times\mu_2\times\cdots\times\mu_n\times\cdots$$

$$\text{ou ainda} \quad \mu_0=\prod_n \mu_n.$$

Nesta conformidade, o espaço de medida $[\Omega(\omega), \mathcal{A}(A), \mu_0(A)]$, abreviadamente $(\Omega, \mathcal{A}, \mu_0)$, interpreta-se como o resultado duma *multiplicação dos factores* $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mu_n)$ ou como um *produto dos espaços de medida* $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mu_n)$ e escreve-se a nova igualdade simbólica

$$39) \quad (\Omega, \mathcal{A}, \mu_0)=(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)\times(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)\times\cdots$$
$$\cdots\times(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mu_n)\times\cdots=\prod_n(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mu_n).$$

Vistos esses preliminares, vamos apresentar uma proposição que contém os esclarecimentos essenciais relativos à multiplicação dum número finito de espaços de medida.

XIII) «Escolhidos quaisquer espaços de medida $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mu_n)$, com o índice n a correr de 1 até um número natural N, é sempre possível multiplicá-los, desde que se isente a multiplicação (ordinária) dos valores das funções μ_n de indeterminações eventuais mediante a convenção $0\cdot\infty=\infty\cdot 0=0$. Além disso, se A for o conjunto genérico da classe $\prod_{1\leqq n\leqq N}\mathcal{A}_n$ e se, dado n, todo o símbolo $A_{m,n}$ de primeiro índice (natural) m representar um conjunto situado em $\mathcal{A}_n$, então a função μ determinada pela relação

$$a) \quad \mu(A)=\inf_{\bigcup_m(\prod_{1\leqq n\leqq N} A_{m,n})\supset A} \sum_m \Big[\prod_{1\leqq n\leqq N}\mu_n(A_{m,n})\Big],$$

onde o ínfimo se refere a todas as colecções finitas ou numeráveis de produtos do tipo indicado tais que a sua união contém A,

sai um produto das medidas μ_n, caracterizado pelo facto que qualquer outro produto μ^* das mesmas medidas satisfaz à relação

$$b)\quad \mu^*(A) \leqq \mu(A);$$

em particular, se a função μ for finita-σ, então ela sai a única medida que pode obter-se por multiplicação dos factores μ_n.

A medida μ supracitada resulta nula se algum factor μ_n for nulo. Nos demais casos, a medida μ sai sempre significativa, sai finita se cada um dos factores μ_n for finito, sai infinita se houver um factor μ_n infinito, sai normada se e só se $\prod_{1 \leqq n \leqq N} \mu_n(\Omega_n) = 1$ e sai finita-σ na hipótese de cada uma das medidas μ_n ser finita-σ e só nessa hipótese.

Finalmente, a medida μ resulta incompleta se existir um factor μ_n incompleto.»

Demonstração de XIII. Representemos o conjunto genérico de $\mathcal{A}_n$ pelo símbolo A_n ou, caso haja necessidade de fazer distinção, pelo mesmo símbolo acrescentado de quaisquer sinais que se afigurem convenientes. Então, podemos definir uma função aferidora Θ pela igualdade

$$40)\quad \Theta(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_N) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2) \cdot \cdots \cdot \mu_N(A_N),$$

onde a convenção feita no enunciado evita indeterminações eventuais do segundo membro. Doutro lado, vimos, em N XXVIII, que a classe $\mathcal{G}$ constituida pelas somas dum número finito de conjuntos da forma $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_N$ é um *corpo* gerador do corpo-σ igual a $\prod_n \mathcal{A}_n = \mathcal{A}$. Portanto, qualquer medida que estenda a função Θ a $\mathcal{A}$, quer dizer, que seja um produto das medidas μ_n, deve admitir uma restrição a $\mathcal{G}$, a qual sai um conteúdo-σ definido em $\mathcal{G}$ e sai também uma extensão de Θ a $\mathcal{G}$.

Posto isso, dividiremos a nossa demonstração em *quatro fases:* Primeiro, vamos construir o único conteúdo, seja φ, que estende Θ a $\mathcal{G}$; depois, vamos provar que a função φ é um conteúdo-σ; em seguida, vamos usar o processo referido na proposição IX para estender φ à medida μ que verifica a relação *a)*; finalmente, vamos deduzir as propriedades que os últimos períodos do enunciado atribuem a essa medida μ.

1.ª fase. Designemos por $\mathfrak{M}$ a classe dos produtos em que se encontra definida a função aferidora Θ da igualdade 40), consideremos um número natural arbitrário P e escolhamos quaisquer conjuntos $A_{1,p}\times A_{2,p}\times\cdots\times A_{N,p}=M_p\in\mathfrak{M}$ $(p=0,1,2,\ldots,P)$ tais que $M_0=M_1+M_2+\cdots+M_P$. Então, a proposição N VII, a fórmula N 15') (devidamente adaptada), a convenção $2^P-1=Q$, as propriedades dos corpos-σ e a igualdade 8') conduzem à relação

$$\sum_{1\leqq p\leqq P} M_p=\prod_{1\leqq n\leqq N}\Big(\bigcup_{1\leqq p\leqq P} A_{n,p}\Big)=\prod_{1\leqq n\leqq N}\Big(\sum_{1\leqq q\leqq Q} A^0_{n,q}\Big)=$$

$$=\sum_{1\leqq q_1,q_2,\ldots,q_N\leqq Q}\Big(\prod_{1\leqq n\leqq N} A^0_{n,q_n}\Big)=$$

$$=\sum_{1\leqq p\leqq P}\Big[\sum_{A^0_{1,q_1}\subset A_{1,p},\,A^0_{2,q_2}\subset A_{2,p},\ldots,\,A^0_{N,q_N}\subset A_{N,p}}\Big(\prod_{1\leqq n\leqq N} A^0_{n,q_n}\Big)\Big],$$

onde a igualdade final resulta do facto que, dado p, os correspondentes produtos do último membro saem disjuntos dois a dois, estão todos contidos em M_p [veja-se N VI] e têm uma soma que não deixa de fora nenhum ponto de M_p [compare-se com as considerações feitas nas linhas 9 a 14 da página 23]. Portanto, a igualdade 40), a aditividade-σ de cada uma das medidas μ_n, as propriedades elementares dos produtos e das somas de números e a circunstância que qualquer factor A^0_{n,q_n} vazio tem medida μ_n nula(*), tudo isso permite escrever(**)

(*) Esta circunstância implica que o último membro da última igualdade do texto faz corresponder um produto (ordinário) de medidas μ_n nulo a qualquer produto de conjuntos repetido.

(**) Aqui usaremos o símbolo Π para referir a multiplicação ordinária de valores das funções μ_n, salvo no caso em que pode haver confusão com 38') ou seja em que cada factor tem por argumento o conjunto mensurável genérico.

$$\Theta(\sum_{1\leqq p\leqq P} M_p) = \prod_{1\leqq n\leqq N} \mu_n(\sum_{1\leqq q_n\leqq Q} A^0_{n,q_n}) =$$
$$= \sum_{1\leqq q_1, q_2,\ldots, q_N\leqq Q} [\prod_{1\leqq n\leqq N} \mu_n(A^0_{n,q_n})] =$$
$$= \sum_{1\leqq p\leqq P} \{ \sum_{A^0_{1,q_1}\subset A_{1,p},\, A^0_{2,q_2}\subset A_{2,p},\ldots,\, A^0_{N,q_N}\subset A_{N,p}} [\prod_{1\leqq n\leqq N} \mu_n(A^0_{n,q_n})]\} =$$
$$= \sum_{1\leqq p\leqq P} \{\prod_{1\leqq n\leqq N} [\mu_n(\sum_{A^0_{n,q_n}\subset A_{n,p}} A^0_{n,q_n})]\} = \sum_{1\leqq p\leqq P} \Theta(M_p).$$

Em face do exposto, concluímos que *a função aferidora* Θ *é finitamente aditiva na classe* $\mathfrak{M}$.

Tomemos agora um conjunto qualquer $G \in \mathcal{G}$ [veja-se o texto a seguir a 40)] e suponhamos que se tem a fórmula

$$41) \quad M_1 + \cdots + M_p + \cdots + M_P = G = M'_1 + \cdots + M'_{p'} + \cdots + M'_{P'},$$

onde os conjuntos $M_p = A_{1,p}\times\cdots\times A_{N,p}$ e $M'_{p'} = A'_{1,p'}\times\cdots\times A'_{N,p'}$ se situam todos em $\mathfrak{M}$. Ora, como 10) e 18 *c)* impõem a relação $M_p \cap M'_{p'} \in \mathfrak{M}$ para cada par de índices p e p', reconhecemos que N 14'), N 9 *b)* e *c)* e a aditividade finita da função Θ dão

$$\sum_p \Theta(M_p) = \sum_p \Theta(\sum_{p'} (M_p \cap M'_{p'})) = \sum_{p,p'} \Theta(M_p \cap M'_{p'}) =$$
$$= \sum_{p'} \Theta(\sum_p (M_p \cap M'_{p'})) = \sum_{p'} \Theta(M'_{p'}).$$

Em conclusão, se considerarmos variáveis o número natural P e os conjuntos $M_p \in \mathfrak{M}\,(p = 1, 2, \ldots, P)$, então a igualdade (de definição)

$$42) \quad \varphi(M_1 + M_2 + \cdots + M_P) = \Theta(M_1) + \Theta(M_2) + \cdots + \Theta(M_P)$$

faz corresponder a cada conjunto $G \in \mathcal{G}$ *um e um só número* $\varphi \geqq 0$, *o qual coincide com* $\Theta(G)$ *na hipótese* $G \in \mathfrak{M}$.

Posto isso, escolhamos um número natural arbitrário H e quaisquer conjuntos $G_h \in \mathcal{G}$ $(h = 1, 2, \ldots, H)$ que sejam disjuntos dois a dois. Então, pode estabelecer-se a fórmula

$$41') \quad G_h = M_{h,1} + \cdots + M_{h,p_h} + \cdots + M_{h,P_h} \quad (h = 1, 2, \ldots, H),$$

onde os conjuntos M_{h,p_h} se situam todos em $\mathfrak{M}$. Portanto, a proposição N II' e a igualdade 42) mostram que se tem

$$\varphi(\sum_h G_h)=\varphi(\sum_{h,p_h} M_{h,p_h})=\sum_h[\sum_{p_h}\Theta(M_{h,p_h})]=\sum_h\varphi(G_h).$$

Concluímos que a *função* φ, *definida por* 42), *é um conteúdo que estende a função* Θ *ao corpo* $\mathcal{G}$.

Admitamos agora que φ^* é também um conteúdo que estende Θ a $\mathcal{G}$. Seja qual for G, tiramos de 41) e de 42) que $\varphi^*(G)=\sum_p\varphi^*(M_p)=\sum_p\Theta(M_p)=\varphi(G)$. Consequentemente, *a função* φ *é o único conteúdo que estende* Θ *a* $\mathcal{G}$ e está terminada a primeira fase da nossa demonstração.

2.ª *fase.* O nosso objectivo é mostrar que qualquer colecção numerável de conjuntos $G_h\in\mathcal{G}(h=1,2,3,\ldots)$, disjuntos dois a dois e de soma G situada em $\mathcal{G}$, verifica necessàriamente a igualdade $\varphi(G)=\sum_{1\leqq h<+\infty}\varphi(G_h)$, onde o primeiro membro vale $\sum_{1\leqq p\leqq P}\varphi(M_p)$, isso em virtude de 41), e onde a parcela genérica do segundo membro vale $\sum_{1\leqq p_h\leqq P_h}\varphi(M_{h,p_h})$, isso em virtude da fórmula 41'), suposta válida para qualquer h natural. Atendendo à proposição IV, a prova que desejamos fazer compreenderá duas partes bem distintas, uma correspondente à hipótese $\varphi(G)=+\infty$ e a outra correspondente à hipótese $\varphi(G)<+\infty$.

1.ª parte da 2.ª fase. Partimos da hipótese $\varphi(G)=+\infty$, com $\varphi(G_h)<+\infty$ para cada h. De acordo com a proposição IV e com as considerações feitas na introdução a esta fase, é suficiente mostrar que qualquer conjunto M_p ou, com omissão do índice p, qualquer conjunto M sujeito a $\varphi(M)=+\infty$ pode decompor-se na soma duma infinidade numerável de conjuntos $J_t\in\mathcal{M}(t=1,2,3,\ldots)$ tais que $\varphi(M)=\sum_t\varphi(J_t)$ e $\varphi(J_t)<+\infty$ para cada t.

Ora bem, fixado o conjunto M de valor infinito, ele está certamente contido em G e, portanto, sai a igualdade $M=M\cap(\sum_h G_h)=\sum_{h,p_h}(M\cap M_{h,p_h})$, onde cada conjunto $M\cap M_{h,p_h}=$ $=I_{h,p_h}$ fica situado em $\mathcal{M}$ e satisfaz à desigualdade $\varphi(I_{h,p_h})\leqq$ $\leqq\varphi(M_{h,p_h})\leqq\varphi(G_h)<+\infty$. Por outras palavras, M será a soma duma infinidade numerável de conjuntos $I_r = A_{1,r} \times \cdots \times A_{N,r}$[*] $(r = 1, 2, 3, \ldots)$ tais que $\varphi(I_r) < +\infty$ para cada r. Apesar desta conclusão, não podemos dar por terminada a parte da demonstração que está correndo, pois não sabemos, presentemente, se a igualdade $\varphi(M) = \sum_r \varphi(I_r)$ é correcta ou falsa.

Mas, a proposição N VII, a fórmula 1), as propriedades dos corpos-σ e a igualdade 8') dão a relação

43) $M = \prod_{1 \leqq n \leqq N} \left(\bigcup_{1 \leqq r < +\infty} A_{n,r} \right) = \prod_{1 \leqq n \leqq N} \left(\sum_{1 \leqq r < +\infty} A'_{n,r} \right) =$
$= \sum_{1 \leqq r_1, r_2, \ldots, r_N < +\infty} (A'_{1,r_1} \times A'_{2,r_2} \times \cdots \times A'_{N,r_N})$, com $A'_{n,1} =$
$= A_{n,1}$ para qualquer n e com $A'_{n,r_n} = A^-_{n,1} \cap \cdots$
$\cdots \cap A^-_{n,r_n-1} \cap A_{n,r_n} \subset A_{n,r_n}$ para quaisquer valores de n e de $r_n > 1$.

Doutro lado, as igualdades 40) e 42), a propriedade aditiva-σ de cada uma das medidas μ_n, a proposição N VI e a alínea *b)* de N XXXII permitem deduzir de 43) a nova relação

43') $\varphi(M) = \prod_{1 \leqq n \leqq N} \left[\sum_{1 \leqq r < +\infty} \mu_n(A'_{n,r}) \right] =$
$= \sum_{1 \leqq r_1, r_2, \ldots, r_N < +\infty} \varphi(A'_{1,r_1} \times A'_{2,r_2} \times \cdots \times A'_{N,r_N})$, com
$\varphi(A'_{1,r_1} \times A'_{2,r_2} \times \cdots \times A'_{N,r_N}) \leqslant \varphi(A_{1,r_1} \times A_{2,r_2} \times \cdots \times A_{N,r_N})$
para quaisquer valores de $r_1, r_2, \ldots, r_N$.

Se o conteúdo φ atribuir o valor $+\infty$ a uma das parcelas do último somatório de 43'), então haverá valores particulares dos índices n e r_n, suponhamos η e ρ (respectivamente), tais que $\mu_\eta(A_{\eta,\rho}) = +\infty$, facto este que obrigará o valor *finito* $\varphi(I_\rho)$ a sair nulo. Consequentemente, *se* $\varphi(I_r) > 0$ *para cada* r, as relações 43) e 43') e a proposição N II' mostram que *os conjuntos* J_t $(t = 1, 2, 3, \ldots)$, *obtidos por renumeração conveniente dos conjuntos* $J_{r_1, r_2, \ldots, r_N} = A'_{1,r_1} \times A'_{2,r_2} \times \cdots \times A'_{N,r_N}$, *são tais que*

$$J_t \in \mathfrak{M} \text{ e } \varphi(J_t) < +\infty \text{ para cada } t, \; M = \sum_{1 \leqq t < +\infty} J_t \text{ e } \varphi(M) = \sum_{1 \leqq t < +\infty} \varphi(J_t).$$

---

[*] Como se suprimiu o índice p de M, não pode haver confusão entre os nossos conjuntos $A_{n,r}$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$ e os conjuntos $A_{n,p}$ considerados no princípio da 1.ª fase.

Vamos agora provar que existem conjuntos J_t com as propriedades indicadas, mesmo que se tenha $\varphi(I_r)=0$ para algum r.

Seja qual for n, representemos por $r(n)$ o elemento genérico do conjunto formado por aqueles valores de r que tornam $\mu_n(A_{n,r})=0$, donde, atendendo às alíneas *a)* e *d)* de N XXXIII, a igualdade $\mu_n(\bigcup\limits_{r(n)} A_{n,r})=0$, válida quer a união saia vazia quer não saia. Pondo agora a fórmula

$$44)\quad \bigcup_{1\leqq r<+\infty} A_{n,r}=U_n\,,\quad \bigcup_{r=r(n)} A_{n,r}=U_{n,1}$$
$$\text{e } U_n-U_{n,1}=U_{n,2}\,,\ \text{com } n=1\,,2\,,\ldots,N,$$

a primeira igualdade da relação 43) e a igualdade 8') permitem escrever a relação

$$44')\quad M=\prod_{1\leqq n<+\infty}(U_{n,1}+U_{n,2})=$$
$$=\sum_{1\leqq p_1,p_2,\ldots,p_N\leqq 2}(U_{1,p_1}\times U_{2,p_2}\times\cdots\times U_{N,p_N})\,,$$

onde o conteúdo φ atribui o valor zero a qualquer parcela do último somatório que tenha (pelo menos) um factor com segundo índice igual a 1. Logo a aditividade finita da função φ dá

$$\varphi(M)=\sum_{1\leqq p_1,\ldots,p_N\leqq 2}\varphi(U_{1,p_1}\times\cdots\times U_{N,p_N})=\varphi(\prod_{1\leqq n\leqq N}U_{n,2})$$

e a parte da demonstração que está correndo ficará concluída se conseguirmos decompor o produto $\prod\limits_n U_{n,2}$ (de valor infinito) numa soma de conjuntos pertencentes a $\mathfrak{M}$ e tais que φ atribui um valor *finito e positivo* a cada um deles. Pois, tal decomposição permitirá tratar $\prod\limits_n U_{n,2}$ do mesmo modo que tratámos M na hipótese $\varphi(I_r)>0$ para cada r.

Se r for um dos números $r(1),r(2),\cdots,r(N)$, a fórmula 44) faz corresponder (pelo menos) um índice n tal que $A_{n,r}$ fica disjunto de $U_{n,2}$, donde concluímos que I_r sai disjunto de $\prod\limits_n U_{n,2}$. Este facto e a relação 44') envolvem a nova relação $\sum\limits_{r\neq r(1),\ldots,r(N)} I_r\supset\prod\limits_n U_{n,2}$; portanto, as propriedades N 9), a igualdade N 14'), a igualdade 10), a fórmula 44) e a propriedade N 13 *b)* permitem escrever a sucessão de igualdades

$$44'')\qquad \prod_n U_{n,2} = \sum_{r \neq r(1),\ldots,r(N)} [(\prod_n U_{n,2}) \cap I_r] =$$
$$= \sum_{r \neq r(1),\ldots,r(N)} \{\prod_n [(U_n - U_{n,1}) \cap A_{n,r}]\} =$$
$$= \sum_{r \neq r(1),\ldots,r(N)} \{\prod_n [A_{n,r} - (U_{n,1} \cap A_{n,r})]\},$$

onde as propriedades dos conjuntos I_r, dos corpos-σ e da função φ, juntamente com a alínea *b)* de N XXXIII, sujeitam cada parcela do último somatório à desigualdade

$$+\infty > \varphi(I_r) \geqq \varphi(\prod_n [A_{n,r} - (U_{n,1} \cap A_{n,r})]) = \prod_n \mu_n(A_{n,r}) > 0.$$

Consequentemente, encontra-se realizada uma decomposição de $\prod_n U_{n,2}$ do tipo que desejávamos alcançar.

2.ª *parte da* 2.ª *fase.* Como não há nada para deduzir no caso $\varphi(G) = 0$, partimos da hipótese $0 < \varphi(G) < +\infty$ e pretendemos mostrar, de acordo com IV, que a sucessão decrescente formada pelos números finitos $\varphi(G_h + G_{h+1} + \cdots)$ tem limite nulo quando $h \uparrow \infty$. Se atendermos à relação $\bigcap_{1 \leqq h < +\infty} (G_h + G_{h+1} + \cdots) = O$, vista na observação anexa a IV, torna-se suficiente provar o seguinte: Escolhida qualquer sucessão (infinita) descendente formada por conjuntos não-vazios $F_i \in \mathcal{G}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ tais que $F_1 \subset G$, então a hipótese $F = \bigcap_{1 \leqq i < +\infty} F_i = O$ implica que a sucessão decrescente formada pelos números finitos $\varphi(F_i)$ tem limite nulo quando $i \uparrow +\infty$ ou, seguindo uma ideia de Andersen e Jessen, a hipótese $\varphi(F_i) \downarrow \delta > 0$ implica a desigualdade entre conjuntos $F \neq O$.

Vamos deduzir a última implicação no caso da função φ *atribuir a cada um dos conjuntos* M_p *da fórmula* 41) *um valor* $\varphi(M_p) > 0$, valor esse que a igualdade 42) obriga a ser *finito.* Neste caso, a relação $G \subset \prod_{1 \leqq n \leqq N} (\bigcup_{1 \leqq p \leqq P} A_{n,p})$, imposta por 8), juntamente com as propriedades da função φ e com a alínea *d)* de N XXXIII, justifica as desigualdades

$$0<\mu_n(\bigcup_{1\leqq p\leqq P} A_{n,p})\leqq \sum_{1\leqq p\leqq P} \mu_n(A_{n,p})<+\infty \qquad (n=1,2,\ldots,N),$$

das quais tiramos a relação

$$45)\quad 0<\sup_{1\leqq n\leqq N} \mu_n(\bigcup_{1\leqq p\leqq P} A_{n,p})=\alpha<+\infty,$$

esta destinada a definir o número α e a enquadrá-lo convenientemente.

Dado um número natural m tal que $1\leqq m\leqq N$, representemos pelo símbolo ${}_m\mathcal{G}$ a classe dos conjuntos que podem obter-se, somando um número finito de produtos da forma $A_m\times A_{m+1}\times\cdots\times A_N$, e representemos por ${}_m\varphi$ o conteúdo definido sobre o corpo ${}_m\mathcal{G}$ do mesmo modo que se definiu o conteúdo φ sobre o corpo $\mathcal{G}$. Nestas condições, se ${}_mG\in{}_m\mathcal{G}$ for um conjunto sujeito à relação de inclusão ${}_mG\subset \prod_{m\leqq n\leqq N}(\bigcup_{1\leqq p\leqq P} A_{n,p})$, as propriedades da função ${}_m\varphi$ e a relação 45) conduzem à desigualdade

$$46)\quad {}_m\varphi({}_mG)\leqq \prod_{m\leqq n\leqq N} \mu_n(\bigcup_{1\leqq p\leqq P} A_{n,p})\leqq\alpha^{N-m+1}.$$

Escolhamos agora, de qualquer modo, um número natural i. Então, a definição da classe $\mathcal{G}$ permite igualar o conjunto F_i, mencionado no princípio desta parte, à soma dum número finito J_i de produtos não-vazios da forma $\prod_{1\leqq n\leqq N} A^*_{n,i,j_i}$ $(j_i=1,2,\ldots,J_i)$. Doutro lado, a fórmula N 15') e as considerações anexas, juntamente com as propriedades dos corpos-σ, mostram que toda a união $\bigcup_{j_i} A^*_{m,i,j_i}$ é decomponível numa soma de $K_i(1\leqq K_i\leqq 2^{J_i}-1)$ conjuntos não-vazios $A^0_{m,i,k}$ $(k_i=1,2,\ldots,K_i)$ tais que cada um deles pertence a $\mathcal{C}_m$ e que qualquer conjunto da união ao longo dos j_i pode obter-se pela adição de certos elementos da decomposição. Portanto, se substituirmos cada conjunto A^*_{m,i,j_i} pela soma dos conjuntos A^0_{m,i,k_i} a que ele é igual, se usarmos depois a igualdade 8') e se aplicarmos ainda a proposição N II', logo reconhecemos que existe um número natural $L_i\geqq J_i$ o qual permite escrever a relação

47) $F_i = \sum_{1 \leqq l_i \leqq L_i} (\prod_{1 \leqq n \leqq N} A_{n,i,l_i})$, com parcelas todas não-vazias, saindo disjuntos ou coincidentes quaisquer dois conjuntos A_{m,i,l_i} que só difiram pelos valores l_i.

Ora bem, escolhamos m por forma que $1 \leqq m \leqq N-1$, consideremos i arbitrário, façamos a convenção ${}_1F_i = F_i$ e designemos por ${}_{m+1}F_i$ o corte feito em F_i por um ponto fixo $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m) \in \prod_{1 \leqq n \leqq m} \Omega_n$(*). Como vale a relação

47') $\prod_{1 \leqq n \leqq N} A_{n,i,l_i} \subset F_i \subset G \subset \prod_{1 \leqq n \leqq N} (\bigcup_{1 \leqq p \leqq P} A_{n,p})$,

seja qual for o índice l_i, resulta $A_{m,i,l_i} \subset \bigcup_{1 \leqq p \leqq P} A_{m,p}$ para cada l_i, isso por causa da proposição N VI, e resulta mais ${}_{m+1}F_i \subset \prod_{m+1 \leqq n \leqq N} (\bigcup_{1 \leqq p \leqq P} A_{n,p})$, isso por causa da propriedade 15 *a)* e da observação posterior a 14'). Doutro lado, o texto intercalado entre 14) e N IX, a relação 47), a propriedade 15 *b)* e a observação citada mostram que ${}_{m+1}F_i$ sai igual a ${}_mF_i / \omega_m$ e também sai igual à soma (eventualmente vazia) daqueles produtos $\prod_{m+1 \leqq n \leqq N} A_{n,i,l_i}$ cujos índices l_i são tais que $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m) \in \prod_{1 \leqq n \leqq m} A_{n,i,l_i}$; portanto, não só ${}_{m+1}F_i$ pertence a ${}_{m+1}\mathcal{G}$ e não varia quando ω_m, suposto variável, percorre um qualquer dos conjuntos A_{m,i,l_i}, como também, fazendo $\delta = \delta_1$ e considerando ω_m variável, o conjunto dos pontos ω_m que tornam ${}_{m+1}\varphi({}_mF_i/\omega_m) \geqq \delta_1 \cdot (2^m+1)/(\alpha^m \cdot 2^{m+1}) = \delta_{m+1}$, seja o conjunto $H_{m,i}$, resulta igual à soma de determinados conjuntos A_{m,i,l_i}, soma essa que tem uma medida $\mu_m(H_{m,i})$. Se designarmos agora por ${}_mF_i / A_{m,i,l_i}$ o corte feito em ${}_mF_i$ por um ponto *qualquer* $\omega_m \in A_{m,i,l_i}$, tiramos primeiro, com o auxílio de N I, de N II' e de N IX e tomando em conta que $(\omega_m, \omega_{m+1}, \ldots, \omega_N) \in {}_mF_i$ implica $\omega_m \in A_{m,i,l_i}$ para algum valor de l_i, a igualdade

$$48) \quad {}_mF_i = \{\sum_{A_{m,i,l_i} \subset H_{m,i}} [A_{m,i,l_i} \times ({}_mF_i / A_{m,i,l_i})]\} + \\ + \{\sum_{A_{m,i,l_i} \subset H_{m,i}^-} [A_{m,i,l_i} \times ({}_mF_i / A_{m,i,l_i})]\}$$

(*) O símbolo ${}_{m+1}F_i$ do texto encurta o símbolo $F_i / (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)$ definido na secção n.º 10.

e tiramos em seguida, atendendo à igualdade 48), às propriedades das funções ${}_m\varphi$, ${}_{m+1}\varphi$ e μ_m, às fórmulas 46) e 45) e às considerações feitas à volta de 47'), o resultado

$$48')\qquad {}_m\varphi({}_mF_i)=\sum_{A_{m,i,l_i}\subset H_{m,i}}[\mu_m(A_{m,i,l_i})\cdot{}_{m+1}\varphi({}_mF_i/A_{m,i,l_i})]+$$
$$+\sum_{A_{m,i,l_i}\subset H^-_{m,i}}[\mu_m(A_{m,i,l_i})\cdot{}_{m+1}\varphi({}_mF_i/A_{m,i,l_i})]\leqq$$
$$\leqq\mu_m(H_{m,i})\cdot\alpha^{N-m}+\alpha\cdot\delta_{m+1}.$$

Posto isso, caso $m=1$, *sabemos que, escrevendo* ${}_1F_i={}_1F_i^0$ $(i=1,2,3,\dots)$, *a função* $\varphi={}_1\varphi$ *atribui a cada conjunto* ${}_1F_i^0$ *um valor pelo menos igual a* δ_1 *e,* caso $m>1$, *vamos admitir que existe um ponto* $(\omega_1^0,\omega_2^0,\dots,\omega_{m-1}^0)\in\Omega_1\times\Omega_2\times\cdots\times\Omega_{m-1}$ *tal que a função* ${}_m\varphi$ *atribui a cada corte* $F_i/(\omega_1^0,\omega_2^0,\dots,\omega_{m-1}^0)={}_mF_i^0$ *um valor pelo menos igual a* δ_m. Então, se aplicarmos 48') ao caso ${}_mF_i={}_mF_i^0$, se representarmos por $H^0_{m,i}$ o conjunto $H_{m,i}$ correspondente a ${}_mF_i^0$ e se tomarmos em conta a igualdade $\delta_m-\alpha\cdot\delta_{m+1}=\delta_1/(2^{m+1}\cdot\alpha^{m-1})$, se fizermos isso tudo, reconhecemos que não pode ter-se $\mu_m(H^0_{m,i})=0$ e que se verifica a desigualdade $\varepsilon_m=\delta_1/(2^{m+1}\cdot\alpha^{N-1})\leqq\mu_m(H^0_{m,i})\leqq\alpha$, isso seja qual for i. Doutro lado, fizemos a hipótese $F_i\downarrow$ (quando $i\uparrow+\infty$), a qual implica, sucessivamente, ${}_mF_i^0/\omega_m\downarrow$ e $H^0_{m,i}\downarrow$. Logo a proposição II e a convenção $H^0_m=\bigcap_{1\leqq i<+\infty}H^0_{m,i}$ dão $\mu_m(H^0_m)\geqq\varepsilon_m$, donde $H^0_m\neq O_m\subset\Omega_m$. Portanto, existe um ponto $\omega^0_m\in\Omega_m$ situado em todos os conjuntos $H^0_{m,i}$ ou, por outras palavras, *o ponto* $(\omega_1^0,\omega_2^0,\dots,\omega_m^0)$ *é tal que a função* ${}_{m+1}\varphi$ *atribui a cada corte* $F_i/(\omega_1^0,\omega_2^0,\dots,\omega_m^0)={}_{m+1}F_i^0$ *um valor pelo menos igual a* δ_{m+1}.

Do que precede, inferimos, por via indutiva, que existe um ponto $(\omega_1^0,\omega_2^0,\dots,\omega_{N-1}^0)$ que torna $\delta_N\leqq{}_N\varphi({}_NF_i^0)=\mu_N({}_NF_i^0)\leqq\alpha$, isso para cada i. Logo a relação ${}_NF_i^0\downarrow$ e a convenção ${}_NF^0=\bigcap_{1\leqq i<+\infty}{}_NF_i^0$ arrastam $\mu_N({}_NF^0)\geqq\delta_N$, donde ${}_NF^0\neq O_N\subset\Omega_N$. Consequentemente, existe um ponto $\omega_N^0\in\Omega_N$ tal que $\omega_N^0\in{}_NF_i^0$, seja qual for i, ou, por causa de N IX, tal que $(\omega_1^0,\omega_2^0,\dots,\omega_N^0)\in F_i$, seja qual for i. Em suma, *sai* $F\neq O$, *conforme desejávamos provar.*

Para terminar esta 2.ª parte da 2.ª fase da nossa demonstração, só falta deduzir que as hipóteses $G=\sum_{1\leqq h<+\infty}G_h$ *e* $0<\varphi(G)<+\infty$

implicam $\lim_{h\uparrow+\infty} \varphi(G_h+G_{h+1}+\cdots)=0$, *mesmo que* φ *atribua o valor zero a alguns conjuntos* M_p *da fórmula* 41)(*). Nesta conformidade, designemos por G_0 a soma de todos os conjuntos M_p tais que $\varphi(M_p)=0$ e ponhamos $G=G_0+G_+$. Então, não só a aditividade finita do conteúdo φ dá a igualdade numérica $\varphi(G)=\varphi(G_+)$, como também as propriedades N 9) e a fórmula N 14') dão as igualdades entre conjuntos $G_+=\sum_{1\leq h<+\infty}(G_+\cap G_h)$ e $G_h+G_{h+1}+\cdots=[G_0\cap(G_h+G_{h+1}+\cdots)]+$ $+[(G_+\cap G_h)+(G_+\cap G_{h+1})+\cdots]$. Portanto, obtemos a relação pretendida se tomarmos em conta que a demonstração feita para o caso $G_0=O$ garante a igualdade

$$\lim_{h\uparrow+\infty} \varphi((G_+\cap G_h)+(G_+\cap G_{h+1})+\cdots)=0$$

e que a alínea *b)* de N XXXII e, mais uma vez, a aditividade finita de φ arrastam a igualdade

$$\varphi(G_h+G_{h+1}+\cdots)=\varphi((G_+\cap G_h)+(G_+\cap G_{h+1})+\cdots).$$

3.ª fase. Vimos, nas duas fases anteriores, que a função φ, definida em 42), é o único conteúdo-σ que estende a função Θ, definida em 40), ao corpo $\mathcal{G}$ de conjunto genérico G, corpo esse que é gerador da classe $\mathcal{A}(A)=\prod_{1\leq n\leq N}\mathcal{A}_n(A_n)$. Doutro lado, a proposição IX (com a letra $\mathcal{A}$ em lugar de $\mathcal{B}$) esclarece que é extensão de $\varphi(G)$ a $\mathcal{A}$ a medida $\mu(A)$ definida pela relação

49) $\mu(A)=\inf_{\bigcup_m G_m\supset A} \sum_m \varphi(G_m)$, onde o ínfimo se refere a todas as colecções finitas ou numeráveis de conjuntos $G_m\in\mathcal{G}$ tais que $\bigcup_m G_m\supset A$,

ou, equivalentemente, definida pela relação *a)* do enunciado. Além disso, a proposição IX mostra que qualquer medida $\mu^*(A)$ extensiva de $\varphi(G)$ a $\mathcal{A}$ verifica a relação *b)* do enunciado, na

(*) Ou seja mesmo que a desigualdade final de 45) tenha possibilidade de falhar.

qual não pode aparecer o sinal $<$ se a função $\mu(A)$ for finita-σ. Portanto, tiramos *as duas conclusões seguintes:*

A medida $\mu(A)$ referida em 49) é um produto das medidas $\mu_n(A_n)$ $(n=1, 2, \ldots, N)$ e qualquer outro produto dessas medidas não pode exceder $\mu(A)$ em nenhum conjunto A. Mais, se a medida $\mu(A)$ for finita-σ, então ela sai o único produto das medidas $\mu_n(A_n)$.

4.ª fase. Se pusermos $\prod_{1 \leqq n \leqq N} \Omega_n = \Omega$, a primeira das conclusões alcançadas na fase anterior dá $\prod_{1 \leqq n \leqq N} \mu_n(\Omega_n) = \mu(\Omega)$. Este resultado, as duas primeiras alíneas de N XXXV e a definição de medida normada provam que a medida $\mu(A)$, definida por 49), sai nula, significativa, finita, infinita ou normada nas condições referidas no enunciado.

Posto isso, suponhamos que as medidas-factores $\mu_n(A_n)$ $(n=1, 2, \ldots, N)$ são todas *significativas* e façamos corresponder a cada n certos conjuntos $A'_{n,u_n} \in \mathfrak{A}_n$ $(u_n = 1, 2, 3, \ldots)$ tais que $\sum_{u_n} A'_{n,u_n} = A'_n$ e $\mu_n(A'^{-}_n) = 0$. Então, a igualdade 8'), a definição da função φ e a propriedade aditiva-σ de cada uma das medidas μ_n conduzem à relação

50) $\prod_{1 \leqq n \leqq N} A'_n = \sum_{u_1, u_2, \ldots, u_N} (A'_{1,u_1} \times A'_{2,u_2} \times \cdots \times A'_{N,u_N})$, onde $\varphi(\prod_{1 \leqq n \leqq N} A'_{n,u_n}) = \prod_{1 \leqq n \leqq N} \mu_n(A'_{n,u_n})$ para quaisquer valores de $u_1, u_2, \ldots, u_N$ e onde, dado n, existe (pelo menos) um valor de u_n que torna $\mu_n(A'_{n,u_n}) > 0$.

Pois bem, das duas uma: Ou cada uma das medidas μ_n é finita-σ, a hipótese $A'_n = \Omega_n$ para cada n e a alínea *c)* de N XXXV permitem escolher os conjuntos A'_{n,u_n} por forma tal que $\mu_n(A'_{n,u_n}) < +\infty$ para todo o par de índices n e u_n, cada um dos valores da função φ referidos em 50) sai finito e, portanto, o conteúdo φ resulta finito-σ; ou uma certa medida μ_n é infinita-σ e a alínea *c)* de N XXXV faz corresponder a *qualquer* escolha dos conjuntos A'_{n,u_n} (pelo menos) uma igualdade $\mu_n(A'_{n,u_n}) = +\infty$, *saindo infinito* um ou mais dos valores da função φ referidos em 50). Doutro lado, caso alguma medida μ_n

fosse infinita-σ e, simultâneamente, a função φ fosse finita-σ, bastava pôr $\Omega = G = M$ na primeira parte da segunda fase da nossa demonstração para que saísse $\varphi(M) = +\infty$, isso por causa de $\mu_n(\Omega_n) = +\infty$ para certo n, e para que pudéssemos escolher $\varphi(G_h) < +\infty$ para cada h, isso por causa da alínea *c)* de N XXXV; nesta conformidade, se tivéssemos $\varphi(I_r) > 0$ para cada r, a hipótese $\prod_n A'_n = \Omega$ fazia colidir 50) com a finititude de todas as parcelas do último somatório de 43') e, se tivéssemos $\varphi(I_r) = 0$ para algum r, a hipótese $\prod_n A'_n = \prod_n U_{n,2}$ [veja-se 44)] conduzia a uma incompatibilidade semelhante, desde que substituíssemos os conjuntos I_r pelas parcelas do último somatório de 44''). Os factos expostos e o segundo período de IX provam que a medida μ sai finita-σ, quando e só quando cada uma das medidas μ_n for finita-σ.

Suponhamos agora que uma certa medida μ_n é *incompleta;* por outras palavras, existe um conjunto (não-vazio) $C_n \in \mathcal{C}\!\!\mathcal{l}_n^-$ tal que $C_n \subset A_n^0$ e $\mu_n(A_n^0) = 0$. Ora bem, se a medida μ fosse completa, a igualdade

$$\mu(\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{n-1} \times A_n^0 \times \Omega_{n+1} \times \cdots \times \Omega_N) = 0$$

e a proposição N VI davam

$$\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{n-1} \times C_n \times \Omega_{n+1} \times \cdots \times \Omega_N \in \mathcal{C}\!\!\mathcal{l},$$

quer dizer, davam uma conclusão incompatível com a proposição N XXVII'. Portanto, a medida μ sai incompleta e está terminada a quarta e última fase da nossa demonstração.

Exemplo 43. São dados os espaços de medida $(\Omega_1, \mathcal{C}\!\!\mathcal{l}_1, \mu_1)$ e $(\Omega_2, \mathcal{C}\!\!\mathcal{l}_2, \mu_2)$, onde $\Omega_1 = \{1, 2\} = \Omega_2$, $\mathcal{C}\!\!\mathcal{l}_1 = \{O_1, \{1\}, \{2\}, \Omega_1\}$, $\mathcal{C}\!\!\mathcal{l}_2 = \{O_2, \Omega_2\}$, $\mu_1(\Omega_1) = 0$ e $\mu_2(\Omega_2) = +\infty$. Neste caso, as duas medidas completas μ_1 e μ_2 têm um produto μ nulo, o qual resulta *incompleto,* pois há conjuntos contidos em $\Omega_1 \times \Omega_2$ que não pertencem ao corpo-σ designado por $\mathcal{C}\!\!\mathcal{l}_1 \times \mathcal{C}\!\!\mathcal{l}_2$. Mas, se substituirmos a medida μ_1 por outra μ_1^*, definida pelas igualdades $\mu_1^*(\{1\}) = 1/2$ e $\mu_1^*(\Omega_1) = 1$, o único produto das duas medidas completas μ_1^* e μ_2 sai infinito, infinito-σ e *completo.*

Observação. Dado o produto $[X(x), \mathcal{B}(B)]$ das duas rectas de Borel $[X_n(x_n), \mathcal{B}_n(B_n)]$ $(n=1, 2)$, tomem-se as medidas $\mu_n(B_n)$ iguais a $+\infty$ ou a 0, conforme B_n for ou deixar de ser um conjunto infinito não-numerável, e considere-se a medida $\mu^*(B)$ igual a $+\infty$ ou a 0, conforme B for ou deixar de ser um conjunto de pontos $x=(x_1, x_2)$ tais que apresentam uma infinidade não-numerável de coordenadas x_1 diferentes a cada uma das quais corresponde uma infinidade não-numerável de coordenadas x_2 diferentes. Então, μ^* é um produto $\mu_1 \times \mu_2$ e sai diferente do produto μ definido pela relação homóloga de *a)* do enunciado de XIII, pois, se escolhermos B igual à recta de equação $x_1=x_2$ [veja-se o exemplo 32], resulta $\mu^*(B)= =0<+\infty=\mu(B)$ [é impossível *cobrir* B com, quanto muito, uma infinidade numerável de conjuntos contidos em rectas com equações onde se anula ou o coeficiente de x_1 ou o de x_2]. Evidentemente, ambas as medidas μ^* e μ estendem a $\mathcal{B}$ o mesmo conteúdo-σ definido no corpo formado pelas somas dum número finito de parcelas do tipo $B_1 \times B_2$ [compare-se com a observação posta a seguir à demonstração de IX].

* * *

A proposição XIII e o texto que a precede permitem-nos afirmar o seguinte: Dados quaisquer espaços de medida, em número finito, existe sempre um *produto maximal*(*) desses espaços ou das medidas correspondentes, quer dizer, um produto que atribui ao conjunto mensurável genérico uma medida pelo menos igual a cada uma das medidas atribuídas pelos produtos restantes (se os houver). Nesta conformidade, é natural chamar-se *multiplicação maximal*(*) à multiplicação especial de medidas ou de espaços de medida que conduz ao produto maximal respectivo.

As duas proposições seguintes referem propriedades complementares interessantes da multiplicação maximal que acabamos de definir.

(*) A designação *maximal* foi-nos sugerida pelo Prof. Doutor J. Tiago de Oliveira.

XIV) «Quando se trabalha com um número finito de factores, a propriedade associativa da multiplicação de conjuntos transmite-se à multiplicação maximal de medidas e de espaços de medida.»

Demonstração de XIV. Se tomarmos em conta N XXVI, podemos limitar-nos a deduzir a associatividade da multiplicação maximal das medidas μ_n do segundo membro de 40).

Admitamos que $1 \leqq \alpha < \beta \leqq N$, façamos $\mathcal{C}' = \prod_{\alpha \leqq n \leqq \beta} \mathcal{C}_n$ e $\mathcal{C} = \prod_{1 \leqq n \leqq N} \mathcal{C}_n$, designemos por μ e μ' os produtos maximais de todas as medidas μ_n e das medidas $\mu_\alpha, \mu_{\alpha+1}, \ldots, \mu_\beta$, respectivamente, e representemos por μ'' o produto maximal das medidas $\mu_1, \ldots, \mu_{\alpha-1}, \mu', \mu_{\beta+1}, \ldots, \mu_N$. Nesta conformidade, a igualdade $\mathcal{C}_1 \times \cdots \times \mathcal{C}_{\alpha-1} \times \mathcal{C}' \times \mathcal{C}_{\beta+1} \times \cdots \times \mathcal{C}_N = \mathcal{C}$ mostra que μ'' é uma medida definida em $\mathcal{C}$, a qual sai produto de todas as medidas μ_n e, portanto, satisfaz à relação

51) $\mu''(A) \leqq \mu(A)$ para qualquer $A \in \mathcal{C}$.

Doutro lado, se A' for o conjunto genérico de $\mathcal{C}'$ e se fizermos corresponder a A' um conjunto $A'' = A_1 \times \cdots \times A_{\alpha-1} \times \times A' \times A_{\beta+1} \times \cdots \times A_N$, onde supomos fixados arbitràriamente os factores sem plicas, então a definição de μ, a hipótese da associatividade da multiplicação de conjuntos, a igualdade 8), a proposição N VI, as propriedades dos ínfimos e da função μ' e a definição de μ'' dão a desigualdade

$$\mu(A'') = \inf_{\bigcup_m (A_{m,1} \times \cdots \times A_{m,N}) \supset A''} \sum_m [\mu_1(A_{m,1}) \cdots \mu_N(A_{m,N})] \leqq$$

$$\leqq \inf_{\bigcup_m (A_{m,\alpha} \times \cdots \times A_{m,\beta}) \supset A'} \sum_m [\mu_1(A_1) \cdots \mu_{\alpha-1}(A_{\alpha-1}) \cdot \quad \text{(continua)}$$

$$\cdot \mu_\alpha(A_{m,\alpha}) \cdots \mu_\beta(A_{m,\beta}) \cdot \mu_{\beta+1}(A_{\beta+1}) \cdots \mu_N(A_N)] =$$

$$= [\mu_1(A_1) \cdots \mu_{\alpha-1}(A_{\alpha-1})] \cdot \mu'(A') \cdot [\mu_{\beta+1}(A_{\beta+1}) \cdots \mu_N(A_N)] = \mu''(A''),$$

a qual prova, juntamente com 51), que as funções μ e μ'' têm a mesma restrição à classe dos conjuntos A'' possíveis. Concluimos que μ é um produto das medidas $\mu_1, \ldots, \mu_{\alpha-1}, \mu'$, $\mu_{\beta+1}, \ldots, \mu_N$, donde a relação $\mu(A) \leqq \mu''(A)$ para qualquer A. Daí e de 51) inferimos a nova relação $\mu(A) = \mu''(A)$ para qualquer A, ficando assim completada a nossa demonstração.

XV) «Dado um número finito N de espaços de medida $(\Omega_n, \mathcal{C}_n, \mu_n)(n=1, 2, \ldots, N)$, considerem-se quaisquer $N' < N$ índices $h, i > h, j > i, \ldots$, extraídos da coleccção dos valores n possíveis, e admita-se a desigualdade

$$0 < \mu_h(\Omega_h) \cdot \mu_i(\Omega_i) \cdot \mu_j(\Omega_j) \cdots = \alpha < +\infty.$$

Então, a marginação do produto maximal de todas as medidas μ_n [de todos os espaços de medida $(\Omega_n, \mathcal{C}_n, \mu_n)$] com respeito ao espaço $\Omega_h \times \Omega_i \times \Omega_j \times \cdots$ e ao factor de escala α dá o produto maximal daquelas medidas μ_n [daqueles espaços de medida $(\Omega_n, \mathcal{C}_n, \mu_n)$] para as [os] quais $n \neq h, i, j, \ldots$.»

Demonstração de XV. Seja $(\Omega, \mathcal{C}, \mu)$ o produto maximal dos N espaços de medida dados e seja $(\Omega', \mathcal{C}', \mu')$ o produto maximal dos $N - N'$ espaços de medida referidos no fim do enunciado. Como a proposição N XXVII'' faz coincidir o espaço mensurável (produto) $(\Omega', \mathcal{C}')$ com o espaço mensurável marginal $(\Omega, \mathcal{C})_{(h,i,\ldots)}$, reconhecemos que só falta provar a identidade entre o produto maximal μ' e a medida marginal ${}_\alpha\mu_{(h,i,\ldots)}$, esta introduzida através da relação 37).

Para começar, suponhamos que os índices $h, i, \ldots$ são os N' primeiros números naturais. Nesta conformidade, se A' for o conjunto genérico de $\mathcal{C}'$, a relação 37), a proposição XIV e a definição da grandeza α dão a igualdade

$$\alpha \cdot {}_\alpha\mu_{(1,\ldots,N')}(A') = \mu(\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{N'} \times A') = \alpha \cdot \mu'(A'),$$

a qual prova a identidade desejada.

Finalmente, o caso de índices $h, i, \ldots$ quaisquer pode reduzir-se ao caso particular que acabamos de analisar, isso porque a observação final da secção n.º 9 permite estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots)$ e os pontos $((\omega_h, \omega_i, \ldots), \omega_{(h,i,\ldots)})$, a qual se estende a conjuntos, a conjuntos disjuntos, a cilindros, a bases de cilindros, a classes de conjuntos, a corpos-σ e à geração de corpos-σ a partir de classes e a qual resolve o assunto, desde que se atribuam *medidas* numèricamente iguais a conjuntos mensuráveis transformados um do outro(*).

* * *

Por motivos vários, vamos limitar o estudo da multiplicação duma infinidade numerável de espaços de medida ao caso especial em que os factores são todos *normados*. Para começar, temos a proposição seguinte, semelhante a XIII.

XVI) «Dada uma infinidade numerável de espaços de medida normados, estes admitem um e um só produto, o qual é também normado. O produto referido sai incompleto se algum dos seus factores for imcompleto.»

Demonstração de XVI. Consideremos os espaços de medida normados $(\Omega_n, \mathfrak{A}_n, \mu_n)$ $(n=1,2,3,\ldots)$, em número infinito, e representemos o conjunto genérico de $\mathfrak{A}_n$ pelo símbolo A_n ou, caso haja necessidade de fazer distinções, pelo mesmo símbolo acrescentado de quaisquer sinais que se afigurem convenientes. Então, podemos definir uma função aferidora Θ pela igualdade

$$52)\quad \Theta\Big(\prod_{1\leqq n<+\infty} A_n\Big)=\mu_1(A_1)\cdot\mu_2(A_2)\cdots\mu_n(A_n)\cdots,$$

onde cada factor do segundo membro é limitado pelo número 1 e onde qualquer das duas multiplicações goza da propriedade associativa. Doutro lado, vimos em N XXIX o seguinte: Se considerarmos os conjuntos que podem obter-se, formando as somas dum número finito de produtos $\prod\limits_{1\leqq n<+\infty} A_n$ tais que cada parcela tem quando muito um número finito de factores $A_n \neq \Omega_n$, esses conjuntos constituem uma classe, digamos

(*) Assim, corresponder-se-ão medidas marginais e produtos maximais, conforme se reconhece através das definições respectivas.

$\mathcal{G}$, a qual é corpo gerador de $\mathcal{A} = \prod_{1 \leq n < +\infty} \mathcal{A}_n$. Portanto, qualquer produto de todas as medidas μ_n deve ter uma restrição a $\mathcal{G}$ que sai um conteúdo-σ definido em $\mathcal{G}$ e que também sai uma extensão a $\mathcal{G}$ de certa restrição de Θ.

Posto isso, usaremos um método decalcado do usado em XIII, isto é, dividiremos a nossa demonstração em *quatro fases:* Primeiro, vamos construir o único conteúdo, seja φ, que estende a $\mathcal{G}$ certa restrição de Θ; depois, vamos provar que a função φ é um conteúdo-σ; em seguida, vamos estender φ à única medida μ igual a um produto das medidas μ_n, a qual sai normada; finalmente, vamos mostrar que essa medida μ satisfaz ao período final do enunciado.

1.ª fase. Representemos por $\mathcal{M}$ a classe formada pelos produtos $\prod_{1 \leq n < +\infty} A_n$ que contêm quando muito um número finito de factores $A_n \neq \Omega_n$, consideremos um número natural arbitrário P e escolhamos quaisquer conjuntos $M_p \in \mathcal{M}$ $(p = 0, 1, 2, \ldots, P)$ tais que $M_0 = M_1 + M_2 + \cdots + M_P$. Como vimos, no decurso da demonstração de N XXIX, a existência dum número N que torna $M_p = A_{1,p} \times \cdots \times A_{N-1,p} \times (\prod_{N \leq n < +\infty} \Omega_n)$ para qualquer p, podemos retomar o cálculo feito no princípio da 1.ª fase da demonstração de XIII, com $\prod_{N \leq n < +\infty} \Omega_n$ em lugar de cada um dos $A_{N,p}$ e do único $A^0_{N,q}$ não-vazio e com $\prod_{N \leq n < +\infty} \mu_n(\Omega_n) = 1$ em lugar do único número $\mu_N(A^0_{N,q})$ não-nulo, para concluirmos, como anteriormente, que a função aferidora Θ, definida em 52), é finitamente aditiva na classe $\mathcal{M}$. Depois, aplica-se a parte restante da 1.ª fase da demonstração de XIII, isso porque subsiste a propriedade que afirma pertencer a $\mathcal{M}$ a intersecção de dois quaisquer conjuntos situados em $\mathcal{M}$. Portanto, a função φ, definida pela igualdade 42), é o único conteúdo que estende a $\mathcal{G}$ a função Θ, quando tomada em $\mathcal{M}$. Este conteúdo sai normado, visto que atribui o valor 1 ao conjunto $\Omega = \prod_{1 \leq n < +\infty} \Omega_n$.

2.ª fase. Pretendemos deduzir a igualdade $\varphi(G) = \sum_{1 \leq h < +\infty} \varphi(G_h)$, onde G é qualquer soma dum número finito de conjuntos $M_p \in \mathfrak{M}(p=1,2,\ldots,P)$ e onde os G_h são quaisquer conjuntos situados em $\mathcal{G}$, disjuntos dois a dois e de soma igual a G. Como a igualdade $\varphi(G)=+\infty$ está fora de causa, podemos limitar-nos a adaptar a 2.ª parte da 2.ª fase da demonstração de XIII, quer dizer, basta provar o seguinte: Escolhida qualquer sucessão descendente formada por conjuntos $F_i \in \mathcal{G}(i=1,2,3,\ldots)$, a hipótese $\varphi(F_i)\downarrow\delta>0$ obriga a ser não-vazia a intersecção F de todos os F_i. A prova a fazer não tem necessidade de distinguir entre o caso $\varphi(M_p)>0$, seja qual for p, e o caso contraditório e tornar-se-á mais cómoda, se fizermos corresponder a cada número natural m o corpo $_m\mathcal{G}$, definido no espaço $\prod\limits_{m\leq n<+\infty}\Omega_n$ do mesmo modo que definimos $\mathcal{G}$ em Ω, e se representarmos por $_m\varphi$ o conteúdo, definido no corpo $_m\mathcal{G}$ do mesmo modo que definimos φ em $\mathcal{G}$.

Posto isso, retomemos o texto entre 46) e 48′) e introduzamos nele as adaptações ligeiras seguintes: O número m supõe-se arbitràriamente escolhido na sucessão dos números naturais, admite-se a desigualdade $N>m$, substitui-se cada um dos conjuntos A^*_{N,i,j_i} por $\prod\limits_{N\leq n<+\infty}\Omega_n$, suprimem-se (por serem desnecessárias) as relações de inclusão que enquadram os conjuntos F_i e $_{m+1}F_i$, põe-se o número 1 em lugar de α e omite-se a referência (supérflua) às fórmulas 46) e 45). Se procedermos do modo indicado, o resultado 48′) ficará com o aspecto simplificado $_m\varphi(_mF_i)\leq\mu_m(H_{m,i})+\delta\cdot(2^m+1)/2^{m+1}$, donde tiramos, pela repetição do raciocínio feito a seguir a 48′), que existe uma sucessão de pontos $\omega^0_n\in\Omega_n$ tal que, seja qual for m, o conteúdo $_{m+1}\varphi$ atribui a cada um dos infinitos cortes $F_i/(\omega^0_1,\omega^0_2,\ldots,\omega^0_m)$ um valor pelo menos igual a $\delta\cdot(2^m+1)/2^{m+1}>\delta/2$.

Escolhido, de qualquer modo, o valor do índice i, é possível, por causa de N VIII, tomar um N que faça de F_i um cilindro com base situada em $\Omega_1\times\Omega_2\times\cdots\times\Omega_{N-1}$ e com geratrizes paralelas a cada um dos factores restantes de Ω. Sabemos que a função $_N\varphi$ correspondente a esse N dá um valor superior a $\delta/2$ quando se iguala o seu argumento ao corte $F_i/(\omega^0_1,\omega^0_2,\ldots,\omega^0_{N-1})$. Portanto, o corte referido não pode ser vazio, a proposição N IX impõe a existência de pontos

$(\omega_1^0, \ldots, \omega_{N-1}^0, \omega_N, \ldots) \in F_i$ e a definição de cilindro obriga o ponto $\omega^0 = (\omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0, \ldots) \in \Omega$ a situar-se em F_i. Concluímos que $\omega^0 \in F$ e fica terminada a 2.ª fase da nossa demonstração.

3.ª fase. Vimos, nas duas fases anteriores, que a função φ aí considerada é um conteúdo-σ normado e é o único conteúdo-σ que estende a função Θ, tomada em $\mathcal{M}$, ao corpo $\mathcal{G}$ gerador do corpo-σ designado por $\mathcal{A}$. Então, se A for o conjunto genérico de $\mathcal{A}$, os factos aqui apontados e a proposição IX não só fazem da função $\mu(A)$, definida pela relação 49), a única medida que estende a $\mathcal{A}$ a função Θ, tomada em $\mathcal{M}$, como também obrigam essa medida a sair *normada.*

Escolhamos agora um conjunto *qualquer* $\prod\limits_{1 \leqq n < +\infty} A_n$ e consideremos a sucessão (infinita) formada pelos cilindros

$$C_m = A_1 \times \cdots \times A_m \times (\prod_{m+1 \leqq n < +\infty} \Omega_n) \in \mathcal{M} \; (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ora, a proposição N VI mostra que $C_m \downarrow$ a igualdade 10) mostra que $\bigcap\limits_{1 \leqq m < +\infty} C_m = \prod\limits_{1 \leqq n < +\infty} A_n$. Portanto, se tomarmos a medida μ acima referida, a proposição II e a igualdade 52) dão a relação

$$\mu(\prod_{1 \leqq n < +\infty} A_n) = \lim_{m \uparrow +\infty} \Theta(C_m) = \lim_{m \uparrow +\infty} [\mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2) \cdots \mu_m(A_m)] =$$
$$= \Theta(\prod_{1 \leqq n < +\infty} A_n),$$

a qual prova que μ é a única medida que estende a $\mathcal{A}$ a função Θ, quando tomada no seu campo pleno. Logo a medida normada μ é o único produto de todas as medidas μ_n.

4.ª fase. Finalmente, se existir uma medida μ_n incompleta, o produto μ sai também incompleto, conforme mostra o último trecho da demonstração de XIII, desde que nele substituamos o factor Ω_N por $\prod\limits_{N \leqq p < +\infty} \Omega_p$. Fica assim concluída a demonstração de XVI.

Posto isso, duas proposições complementares, concebidas no estilo de XIV e de XV, vão fechar o estudo presente.

XVII) «Quando se trabalha com uma infinidade numerável de factores, a propriedade associativa da multiplicação de conjuntos transmite-se à multiplicação de medidas normadas e de espaços de medida normados.»

Demonstração de XVII. Em atenção a N XXVI, é suficiente deduzir a associatividade da multiplicação das medidas normadas $\mu_n(A_n)$ do segundo membro de 52). Para este efeito, acompanhamos a demonstração de XIV até à relação 51) exclusive, fazendo, porém, as pequenas adaptações seguintes: Primeiro, β é finito ou infinito e os índices para além de β podem formar uma sucessão sem fim; depois, os produtos maximais μ, μ' e μ'' passam a ser os únicos produtos possíveis. Concluímos, como anteriormente, que μ'' é um produto de todas as medidas μ_n. Consequentemente, a medida μ'' coincide com μ e está terminada a nossa demonstração.

XVIII) «Dada uma infinidade numerável de espaços de medida normados $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mu_n)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, considere-se qualquer colecção de números naturais $h, i>h, j>i, \ldots$ que seja distinta da colecção de todos os valores n possíveis. Então, a marginação do (único) produto de todas as medidas μ_n [de todos os espaços de medida $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mu_n)$] com respeito ao espaço $\Omega_h \times \Omega_i \times \Omega_j \times \cdots$ e ao factor de escala 1 dá o (único) produto daquelas medidas μ_n [daqueles espaços de medida $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mu_n)$] para as [os] quais $n \neq h, i, j, \ldots$.»

Demonstração de XVIII. Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ o (único) produto dos infinitos espaços de medida dados e seja $(\Omega', \mathcal{A}', \mu')$ o (único) produto dos espaços de medida referidos no fim do enunciado. Nesta conformidade, podemos aproveitar os elementos da demonstração de XV, desde que façamos as adaptações ligeiras seguintes: Deve admitir-se a eventualidade de ser infinito o número dos índices $h, i, \ldots$, deve atribuir-se o valor 1 à grandeza α e deve ler-se XVII em lugar de XIV.

d) Medidas definidas em espaços de Borel com um número finito de dimensões

33. **Funções de intervalo e medidas definidas num espaço de Borel com um número finito de dimensões.** Dado um número finito $N \geqq 1$ de rectas de Borel $[X_n(x_n), \mathcal{B}_n(B_n)]$ $(n=1,2,\ldots,N)$, consideremos o seu produto $[X(x), \mathcal{B}(B)]$ ou seja o espaço de Borel a N dimensões e chamemos *subclasse principal de* $\mathcal{B}$ à classe $\mathcal{C}$ formada por todos os intervalos da forma $\prod\limits_{1 \leqq n \leqq N} \{a_n \leqq x_n < b_n\}$, onde, escolhido n, os números a_n e $b_n \geqq a_n$ podem tomar-se reais finitos arbitrários(*). Então, fixada uma função aferidora Θ definida em $\mathcal{C}$, ela diz-se *quase-contínua no intervalo vazio* se existir $\lim\limits_{a_m \uparrow b_m} \Theta(\prod\limits_{1 \leqq n \leqq N} \{a_n \leqq x_n < b_n\})$ para $m=1,2,\ldots,N$ e se este limite vier a tomar apenas os valores $\Theta(O)$ ou $+\infty$. A mesma função Θ diz-se *parcialmente aditiva-σ em* $\mathcal{C}$ se aí for finitamente aditiva e se, além disso, gozar da propriedade seguinte: Escolhida qualquer colecção numerável de conjuntos $C_p \in \mathcal{C}$ $(p=1,2,3,\ldots)$, disjuntos dois a dois, de soma igual a $C \in \mathcal{C}$ e tais que $\Theta(C)=+\infty$ e $\Theta(C_p)<+\infty$ para cada p, escolhida uma colecção nessas condições (se a houver), correspondem sempre conjuntos $C'_q \in \mathcal{C}$ $(q=1,2,3,\ldots)$, disjuntos dois a dois, de soma também igual a C e tais que $\sum\limits_q \Theta(C'_q)=+\infty$ e $\Theta(C'_q)<+\infty$ para cada q.

Posto isso, vejamos uma proposição que nos oferece o primeiro ensejo de usar as definições acima dadas.

XIX) «Se μ for uma medida definida no espaço de Borel $(X, \mathcal{B})$ com um número finito de dimensões, então a restrição de μ à classe $\mathcal{C}$ coincidente com a subclasse principal de $\mathcal{B}$ sai uma função aferidora parcialmente aditiva-σ em $\mathcal{C}$ e quase-contínua no intervalo vazio.»

Demonstração de XIX. Servimo-nos da notação introduzida no começo desta secção.

(*) O caso $a_n=b_n$, para algum n, corresponde a um intervalo vazio.

Ora bem, se Θ for a restrição referida no enunciado, a igualdade $\Theta(O)=\mu(O)=0$ e a propriedade aditiva-σ das medidas provam todas as propriedades de Θ afirmadas no enunciado, com excepção da quase-continuidade no intervalo vazio. Mas, seja qual for o inteiro m entre 1 e N, extremos incluidos, se escolhermos *arbitràriamente* uma sucessão crescente de números reais finitos $a_{m,p}(p=1,2,3,\ldots)$ com limite finito b_m e tais que $a_{m,p}<b_m$ para cada p, a continuidade superior de μ, afirmada em II, assegura que existe

$$\lim_{p\uparrow\infty}\Theta(\cdots\times\{a_{m-1}\leqq x_{m-1}<b_{m-1}\}\times\{a_{m,p}\leqq x_m<b_m\}\times \quad \textit{(continua)}$$
$$\times\{a_{m+1}\leqq x_{m+1}<b_{m+1}\}\times\cdots)$$

e que este limite é igual a $\Theta(O)=0$ ou a $+\infty$, conforme houver ou deixar de haver um número positivo ε que torne

$$\Theta(\cdots\times\{a_{m-1}\leqq x_{m-1}<b_{m-1}\}\times\{b_m-\varepsilon\leqq x_m<b_m\}\times \quad \textit{(continua)}$$
$$\times\{a_{m+1}\leqq x_{m+1}<b_{m+1}\}\times\cdots)<+\infty.$$

Concluímos, do exposto, que a função Θ sai quase-contínua no intervalo vazio e fica assim terminada a demonstração de XIX.

* * *

A proposição XIX prova a ocorrência de casos em que uma função aferidora Θ definida na classe $\mathcal{C}$, parcialmente aditiva-σ nesta classe e quase-contínua no intervalo vazio pode estender-se a uma medida definida em $\mathcal{B}$. Convém agora indagar se tal extensão é praticável em todos os casos e, na hipótese duma resposta afirmativa, se entre as medidas μ^* possíveis existe uma *medida maximal* μ, por outras palavras, uma medida μ tal que $\mu^*(B)\leqq\mu(B)$ para qualquer B e para qualquer μ^*. Além disso, se a medida maximal μ existir, interessa saber relacionar as suas propriedades relevantes com as da função Θ.

As questões aqui postas são resolvidas pela proposição que passamos a enunciar.

XX) «Dado um espaço de Borel $[X(x), \mathscr{B}(B)]$ com um número finito de dimensões, designe-se por $\mathscr{C}$ a subclasse principal de $\mathscr{B}$ e considere-se uma função aferidora Θ definida e parcialmente aditiva-σ em $\mathscr{C}$ e quase-contínua no intervalo vazio. Então, existe uma medida maximal μ que estende Θ a $\mathscr{B}$ e que é determinada, para qualquer B, pela relação

a) $\mu(B) = \inf\limits_{\bigcup\limits_m C_m \supset B} \sum\limits_m \Theta(C_m)$, onde o ínfimo se refere a todas as colecções finitas ou numeráveis de conjuntos $C_m \in \mathscr{C}$ tais que $\bigcup\limits_m C_m \supset B$.

Esta medida μ não só resulta nula ou significativa e finita-σ ou infinita-σ simultâneamente com Θ, como também atribui ao espaço X um valor igual ao supremo de Θ. Em complemento, μ é a única medida definida em $\mathscr{B}$ que estende a função Θ, se esta for finita-σ.»

Demonstração de XX. Conservemos a notação apresentada no princípio desta secção e vamos repartir a nossa demonstração por *quatro* fases: Primeiro, vamos construir a única função aferidora finitamente aditiva ζ que estende Θ à classe $\mathscr{D}$ formada por todos os conjuntos que podem obter-se somando um número finito de intervalos situados em $\mathscr{C}$ ou seja na subclasse principal de $\mathscr{B}$; depois, vamos provar que a função ζ é aditiva-σ em $\mathscr{D}$; em seguida, vamos definir o único conteúdo-σ, seja φ, que estende ζ ao *corpo* $\mathscr{G}$ formado por todos os conjuntos que podem obter-se somando um número finito de intervalos especiais a N dimensões tais que cada factor linear de qualquer um deles é diferente do seu espaço e igual a um intervalo aberto do lado direito e fechado ou infinito do lado esquerdo (se $N=1$, veja-se 5.º no fim da secção n.º 15 e, se $N>1$, veja-se 4.º quase no fim da secção n.º 20); em último lugar, vamos passar para a medida maximal μ que estende Θ a $\mathscr{G}^* = \mathscr{B}$ e vamos verificar as propriedades que o enunciado atribui à função μ.

1.ª fase. Serve a parte da 1.ª fase da demonstração de XIII que vai de 41), incluído, até ao fim, se mudarmos as letras G, $\mathcal{G}$, M, $\mathcal{M}$ e φ respectivamente para D, $\mathfrak{D}$, C, $\mathcal{C}$ e ζ e se substituirmos o recurso a 18 *c)* pela afirmação que a intersecção dum factor dum conjunto C_p com o factor homólogo (que tem o mesmo primeiro índice) dum conjunto $C'_{p'}$ é um conjunto da mesma natureza que a de qualquer dos conjuntos secantes. Nesta conformidade, podemos tirar as conclusões seguintes:

Caso consideremos variáveis o número natural P e os conjuntos $C_p \in \mathcal{C}$ $(p=1,2,\ldots,P)$, a igualdade (de definição)

$$53) \quad \zeta(C_1+C_2+\cdots+C_P)=\Theta(C_1)+\Theta(C_2)+\cdots+\Theta(C_P)$$

faz corresponder a cada conjunto $D \in \mathfrak{D}$ um e *só um* número $\zeta \geqq 0$, o qual coincide com $\Theta(D)$ na hipótese $D \in \mathcal{C}$. Mais, *a função* ζ, *definida por* 53), *é a única função aferidora finitamente aditiva que estende* Θ *a* $\mathfrak{D}$.

2.ª *fase.* Para começar, dados os conjuntos $D \in \mathfrak{D}$ e $D' \in \mathfrak{D}$, a relação $\mathfrak{D} \subset \mathcal{G}$ e as propriedades dos corpos mostram que se verificam as três relações $D \cup D' \in \mathcal{G}$, $D \cap D' \in \mathcal{G}$ e $D-D' \in \mathcal{G}$. Como não pode haver subconjuntos de $D \cup D'$ que contenham intervalos infinitos, concluímos que as três relações citadas admitem o reforço $D \cup D' \in \mathfrak{D}$, $D \cap D' \in \mathfrak{D}$ e $D-D' \in \mathfrak{D}$. Nesta conformidade, escolhida qualquer colecção finita de conjuntos $D_h \in \mathfrak{D}$ $(h=1,2,\ldots,H)$, a sua união U pertence a $\mathfrak{D}$, de modo que a fórmula 1), a relação óbvia $D_h^- = U^- + (U-D_h)$ e a fórmula N 14') permitem escrever a igualdade entre conjuntos

$$D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_H = D_1 + [(U-D_1) \cap D_2] + \cdots + \\ +[(U-D_1) \cap \cdots \cap (U-D_{H-1}) \cap D_H],$$

onde cada parcela do segundo membro é um conjunto situado em $\mathfrak{D}$. Mais, escolhida qualquer colecção numerável de conjuntos $D_h \in \mathfrak{D}$ $(h=1,2,3,\ldots)$, disjuntos dois a dois e de soma igual a D, tem-se $D-(D_1+D_2+\cdots+D_H) \in \mathfrak{D}$ para qualquer H.

Em face do exposto, a alínea *b)* de N XXXI prova, primeiro, a relação

$$54) \quad \zeta(D) \leqq \zeta(D'), \text{ se } D \in \mathfrak{D} \text{ e se } D \subset D' \in \mathfrak{D},$$

e prova, em seguida, a relação

$$55)\quad \zeta(\bigcup_{1\leqq h\leqq H} D_h)\leqq \sum_{1\leqq h\leqq H}\zeta(D_h),\quad \text{se cada } D_h \in \mathfrak{D}.$$

Além disso, a alínea *c)* de N XXXI, com as letras h, D, $\mathfrak{D}$ e ζ respectivamente em lugar de n, A, $\mathfrak{A}$ e φ, dá a relação

$$56)\quad \sum_{1\leqq h<\infty}\zeta(D_h)\leqq\zeta(\sum_{1\leqq h<\infty} D_h),\quad \text{se cada } D_h\in\mathfrak{D}$$
$$\text{e se } \sum_{1\leqq h<\infty} D_h\in\mathfrak{D}.$$

Posto isso, consideremos qualquer conjunto não-vazio $C=\prod_n\{a_n\leqq x_n<b_n\}\in\mathfrak{C}$ tal que $0<\zeta(C)<+\infty$ e consideremos ainda qualquer colecção numerável de conjuntos $C_h=\prod_n\{a_{n,h}\leqq x_n<b_{n,h}\}\in\mathfrak{C}(h=1,2,3,\ldots)$, disjuntos dois a dois e de soma igual a C. Então, se ε for um número arbitrário, contanto que $0<\varepsilon<\inf_n(b_n-a_n)$, vamos definir os conjuntos $C'=\prod_n\{a_n\leqq x_n<b_n-\varepsilon\}$ e $F=\prod_n\{a_n\leqq x_n\leqq b_n-\varepsilon\}$, donde, atendendo a N VI, as relações $C'\subset F\subset C$ e $C=C'+(C-C')$. Mais, escolhido qualquer h, façamos corresponder uma grandeza $\delta_h>0$, a determinar oportunamente em função de ε, ponhamos $C'_h=\prod_n\{a_{n,h}-\delta_h\leqq x_n<b_{n,h}\}$ e $C''_h=C'_h\cap C$ e igualemos $a''_{n,h}$ a a_n ou a $a_{n,h}-\delta_h$, conforme a_n exceder ou deixar de exceder $a_{n,h}-\delta_h$. Então, tiramos, por causa de N 9 *a)*, de 10) e de N VI, a relação $C\supset C''_h=\prod_n\{a''_{n,h}\leqq x_n<b_{n,h}\}\supset C_h$, donde $C''_h=C_h+(C''_h-C_h)$.

Ora bem, qualquer ponto do intervalo *fechado* F pertence a um dos conjuntos C_h e, portanto, é *interior* ao intervalo C'_h correspondente. Sendo assim, o lema de Heine-Borel, também conhecido pelo nome de lema de Borel-Lebesgue, assegura a existência dum número natural H tal que $F\subset C'_1\cup\cdots\cup C'_H$. Logo a igualdade N 14) e a propriedade N 9 *b)* dão a relação $C'\subset C''_1\cup\cdots\cup C''_H$ ou seja, por causa de N II, a relação

$$C\subset C_1\cup\cdots\cup C_H\cup(C''_1-C_1)\cup\cdots\cup(C''_H-C_H)\cup(C-C').$$

Consequentemente, 54) e 55) conduzem à desigualdade

$$57)\quad \zeta(C) \leqq \sum_{1\leqq h\leqq H} \zeta(C_h) + \sum_{1\leqq h\leqq H} \zeta(C''_h - C_h) + \zeta(C - C').$$

Ora, a fórmula 9) mostra que, seja qual for h, sai

$$C''_h - C_h \subset \bigcup_{1\leqq m\leqq N} (\cdots \times \{a''_{m-1,h} \leqq x_{m-1} < b_{m-1,h}\} \times \quad \textit{(continua)}$$

$$\times \{a''_{m,h} \leqq x_m < a_{m,h}\} \times \{a''_{m+1,h} \leqq x_{m+1} < b_{m+1,h}\} \times \cdots) \subset C''_h \subset C.$$

Portanto, não só a relação 54), a hipótese da continuidade de Θ no vazio e a alínea *a)* de N XXXI permitem fazer corresponder a cada h um δ_h tal que a função Θ fique com um valor inferior a $(\varepsilon/N)\cdot 2^{-h}$ em qualquer das parcelas da última união, como também as relações 54) e 55) levam à desigualdade

$$\sum_{1\leqq h\leqq H} \zeta(C''_h - C_h) < \varepsilon \cdot \sum_{1\leqq h\leqq H} 2^{-h} < \varepsilon,$$

a qual, juntamente com 57), arrasta

$$57')\quad \zeta(C) \leqq \sum_{1\leqq h<+\infty} \zeta(C_h) + \varepsilon + \zeta(C - C').$$

Por outro lado, a relação

$$C - C' \subset \bigcup_{1\leqq m\leqq N} (\cdots \times \{a_{m-1} \leqq x_{m-1} < b_{m-1}\} \times \quad \textit{(continua)}$$

$$\times \{b_m - \varepsilon \leqq x_m < b_m\} \times \{a_{m+1} \leqq x_{m+1} < b_{m+1}\} \times \cdots)$$

e, mais uma vez, as propriedades da função ζ mostram que $\zeta(C - C') \longrightarrow 0$ quando $\varepsilon \downarrow 0$. Nestas condições, concluimos primeiro, de 57'), que se verifica a desigualdade $\zeta(C) \leqq \sum_{1\leqq h<\infty} \zeta(C_h)$ e concluimos depois, de 56), que se verifica a igualdade $\zeta(C) = \sum_{1\leqq h<\infty} \zeta(C_h)$, a qual se aplica, òbviamente, também ao caso $\zeta(C) = 0$. Este resultado permite-nos acompanhar o caso 3.º da demonstração de IV, com os conjuntos A_n e A'_p substituídos pelos conjuntos C_p e C'_q que aparecem na definição da aditividade-σ parcial, com a função φ alterada para ζ e com supressão da passagem $\zeta((C'_q \cap C_{p+1}) + (C'_q \cap C_{p+2}) + \cdots) \downarrow 0$, por ser desnecessária. Logo *fica provada a aditividade-σ da função ζ, quando tomada na classe $\mathcal{C}$.*

Consideremos agora um conjunto $D = C_1 + \cdots + C_p + \cdots \cdots + C_P$, com $C_p \in \mathcal{C}$ para qualquer p, e suponhamos que $D = \sum_{1 \leq h < \infty} D_h$, onde, escolhido h, se tem $D_h = C_{h,1} + \cdots \cdots + C_{h,p_h} + \cdots + C_{h,P_h}$, com $C_{h,p_h} \in \mathcal{C}$ para cada p_h. Então, seja qual for p, as propriedades N 9), a fórmula N 14') e a proposição N II' dão a igualdade $C_p = \sum_{h,p_h} (C_p \cap C_{h,p_h})$, a qual implica $\zeta(C_p) = \sum_{h,p_h} \zeta(C_p \cap C_{h,p_h})$, isso por causa da aditividade-σ de ζ em $\mathcal{C}$. Portanto, a aditividade finita de ζ em $\mathcal{D}$ permite escrever

$$\zeta(D) = \sum_p \zeta(C_p) = \sum_{h,p_h} \zeta(\sum_p (C_p \cap C_{h,p_h})) = \sum_{h,p_h} \zeta(C_{h,p_h}) = \sum_h \zeta(D_h).$$

Concluimos assim que a função aferidora ζ é aditiva-σ em $\mathcal{D}$.

3.ª fase. Vimos, nas duas fases precedentes, que a função ζ, definida por 53), é a única função aferidora aditiva-σ que estende Θ a $\mathcal{D}$.

Seja agora $\mathcal{E}$ a classe dos conjuntos E que podem obter-se somando um número finito ou uma infinidade numerável de conjuntos situados em $\mathcal{D}$. Nesta conformidade, vamos retomar a parte da 1.ª fase da demonstração de XIII que vai de 41), incluído, até ao fim e vamos introduzir nela as alterações seguintes: Mudamos G, $\mathcal{G}$, M, $\mathcal{M}$, Θ e φ respectivamente para E, $\mathcal{E}$, D, $\mathcal{D}$, ζ e η, consentimos que qualquer dos índices p, p', h e p_h possa correr desde 1 até um número natural arbitrário *ou* até $+\infty$, substituímos o recurso a 10) e a 18*c)* pela propriedade (vista na 2.ª fase desta demonstração), segundo a qual a intersecção de dois conjuntos situados em $\mathcal{D}$ ainda é um conjunto situado em $\mathcal{D}$, e ampliamos a aditividade simples da função ζ para a sua aditividade-σ. Se procedermos do modo indicado, tiramos as conclusões que passamos a referir.

Seja qual for a colecção finita ou numerável de conjuntos $D_p \in \mathcal{D}$ $(p = 1, 2, 3, \ldots)$, disjuntos dois a dois, a igualdade (de definição)

58) $\eta(D_1+D_2+\cdots+D_p+\cdots)=\zeta(D_1)+\zeta(D_2)+\cdots+\zeta(D_p)+\cdots$
faz corresponder a cada conjunto $E \in \mathcal{E}$ um e *só um* número $\eta \geqq 0$, o qual coincide com $\zeta(E)$ na hipótese $E \in \mathfrak{D}$. Mais, *a função η, definida por* 58), é *a única função aferidora aditiva-σ que estende ζ (e o Θ do nosso enunciado) à classe $\mathcal{E}$.*

Posto isso, podemos terminar a 3.ª fase da nossa demonstração como segue:

Escolhida, de qualquer modo, uma recta-factor $(X_n, \mathcal{B}_n)$, designemos por k_n o termo genérico da colecção de todos os números inteiros, dispostos por ordem, e representemos por i_n o maior inteiro contido no número finito (arbitrário) b_n. Então, valem as igualdades

$$\{-\infty<x_n<b_n\}=\sum_{-\infty<k_n\leqq i_n}\{k_n-1\leqq x_n<k_n\}+\{i_n\leqq x_n<b_n\}$$

e $$\{b_n\leqq x_n<+\infty\}=\{b_n\leqq x_n<i_n+1\}+\sum_{i_n\leqq k_n<\infty}\{k_n+1\leqq x_n<k_n+2\},$$

as quais, juntamente com 8'), provam a relação de inclusão $\mathcal{G}\subset\mathcal{E}$. Claro que $\mathcal{C}\subset\mathcal{G}$. Consequentemente, se pusermos

59) $$\varphi(G)=\eta(G), \text{ para qualquer } G \in \mathcal{G},$$

a restrição $\varphi(G)$ de η a $\mathcal{G}$ sai um conteúdo-σ que estende a função Θ do nosso enunciado ao corpo $\mathcal{G}$ e sai ainda o único conteúdo-σ nessas condições.

4.ª fase. Vejamos como as propriedades da função Θ se refletem no comportamento da sua extensão designada por φ e definida através de 59).

Primeiro, se Θ tomar um valor positivo nalgum conjunto $C \in \mathcal{C}$, o conjunto C^- pertence ao corpo $\mathcal{G}$ e, portanto, $\varphi(X)=\Theta(C)+\varphi(C^-)>0$. Mais, se a função Θ for nula, a proposição N I e a alínea *d)* de N XXXII obrigam os infinitos conjuntos $\prod_n\{-h\leqq x_n<h\}=C_h\ (h=1,2,3,\ldots)$ a serem tais que $X=\bigcup_h C_h$ e que $0\leqq\varphi(X)\leqq\sum_h\Theta(C_h)=0$. Daí e da alínea *a)* de N XXXV concluímos que a função φ sai nula ou significativa simultâneamente com a função Θ.

Ora bem, a proposição N VI mostra que os conjuntos C_h ùltimamente mencionados formam uma sucessão ascendente e mostra ainda que, seja qual for $C \in \mathcal{C}$, resulta $C_h \supset C$ para todo o h suficientemente grande. Logo a proposição II dá $\Theta(C_h) \uparrow \varphi(X)$ e, se designarmos por S o supremo da função Θ, a relação 54) dá $\Theta(C_h) \uparrow S$. Concluímos que S coincide com o valor atribuido a X pela função φ ou por qualquer das suas extensões.

A relação de inclusão $\mathcal{G} \subset \mathcal{E}$, apresentada no texto anterior a 59), permite-nos afirmar que X pode ser igualado à soma duma infinidade numerável de conjuntos $C'_h \in \mathcal{C}$. Então, se a função Θ for finita-σ, sai, seja qual for h, a relação $C'_h = \sum_{p_h} C'_{h,p_h}$, com $C'_{h,p_h} \in \mathcal{C} \subset \mathcal{G}$ e com $\Theta(C'_{h,p_h}) = \varphi(C'_{h,p_h}) < +\infty$ para cada p_h, e, portanto, a igualdade $X = \sum_{h,p_h} C'_{h,p_h}$ e a alínea *c)* de N XXXV provam que a função φ resulta finita-σ.

Suponhamos agora que a função φ é finita-σ. Nesta conformidade, escolhido qualquer $C \in \mathcal{C}$, há conjuntos $G_p \in \mathcal{G}$ tais que $C = \sum_p G_p$ e $\varphi(G_p) < +\infty$ para cada p. Mas, seja qual for p, tem-se $G_p \subset C$, donde $G_p \in \mathcal{D}$ ou, equivalentemente, G_p é a soma dum número finito de conjuntos situados em $\mathcal{C}$. Portanto, N II' e a alínea *b)* de N XXXII provam que a função Θ resulta finita-σ.

Em face do exposto, as proposições VII e IX permitem terminar a 4.ª e última fase da nossa demonstração, se tomarmos para a função μ referida no enunciado a função definida pela relação

60) $\mu(B) = \inf_{\bigcup_m G_m \supset B} \sum_m \varphi(G_m)$, onde o ínfimo se refere a todas as colecções finitas ou numeráveis de conjuntos $G_m \in \mathcal{G}$ tais que $\bigcup_m G_m \supset B$,

ou, equivalentemente, definida pela relação *a)* do enunciado.

Observação. Podemos substituir, de acordo com VII, os símbolos B e μ de 60) e de *a)* respectivamente pelos símbolos Q e Φ, onde Q significa um subconjunto arbitrário de X e onde Φ significa uma função aferidora definida em 2^X, cuja restrição a $\mathcal{B}$ coincide com μ. Então, se $\mathcal{A}$ for a classe dos conjuntos $A \subset X$ que tornam $\Phi(Q) \geqq \Phi(A \cap Q) + \Phi(A^- \cap Q)$ para qualquer Q, a restrição da função $\Phi(Q)$ à classe $\mathcal{A}$ sai uma medida completa. Além disso, a proposição IX ensina que $\mathcal{A}$ contém o corpo-σ completivo de $\mathcal{B}$ com respeito à medida μ e ensina mais que $\mathcal{A}$ coincide com esse corpo-σ completivo se a função φ for finita-σ ou, dito doutra maneira, se a função Θ for finita-σ.

Segue um exemplo destinado a ilustrar que a medida maximal μ do enunciado de XX não é necessàriamente a única extensão da função Θ a uma medida definida em $\mathcal{B}$.

Exemplo 44. Seja Q o subconjunto genérico de X e consideremos as duas funções aferidoras $\Phi(Q)$ e $\Phi^*(Q)$, a primeira nula para $Q=O$ e infinita para $Q \neq O$ e a outra tal que atribui a qualquer Q um valor igual ao número de pontos situados em Q. Como as duas funções Φ e Φ^* são ambas medidas definidas em 2^X, saiem também medidas as suas restrições a $\mathcal{B}$, restrições essas que vamos representar por μ e μ^*, respectivamente. Embora μ e μ^* sejam funções distintas, elas admitem a mesma restrição Θ à subclasse principal de $\mathcal{B}$. O leitor fàcilmente se convence que a medida μ do texto coincide com a medida maximal μ definida por *a)* de XX.

* * *

Vejamos agora uma proposição inspirada no estilo de X da secção n.º 29.

XXI) «São dados um espaço de Borel $[X(x), \mathcal{B}(B)]$ com um número finito de dimensões, a classe $\mathcal{C}$ de conjunto genérico C que é a subclasse principal de $\mathcal{B}$ e uma função aferidora $\Theta(C)$ que tem supremo $S>0$ e que é *finita-σ*, parcialmente aditiva-σ em $\mathcal{C}$ e quase-contínua no intervalo vazio. Nestas condições, é possível determinar constantes $c_p>0$ e funções aferidoras $\Theta_p(C)$ finitamente aditivas, quase-contínuas no intervalo vazio e de supremos todos iguais a 1, por forma tal que tenha lugar a igualdade entre funções

$$a) \quad \Theta(C) = c_1 \cdot \Theta_1(C) + c_2 \cdot \Theta_2(C) + \cdots + c_p \cdot \Theta_p(C) + \cdots,$$

onde o segundo membro apresenta um número de parcelas igual a 1 ou a $+\infty$, conforme S for finito ou infinito. Além disso, uma vez escolhidas as grandezas c_p e $\Theta_p(C)$, verifica-se a igualdade entre funções

$$b) \qquad \mu(B)=c_1\cdot\mu_1(B)+c_2\cdot\mu_2(B)+\cdots+c_p\cdot\mu_p(B)+\cdots,$$

onde o símbolo $\mu(B)$ representa a única medida que estende a função Θ à classe $\mathscr{B}$ e onde, fixado p, o símbolo $\mu_p(B)$ representa a única medida que estende a função Θ_p à classe $\mathscr{B}$.»

Demonstração de XXI. A proposição XX não só assegura que existe uma única medida $\mu(B)$ que estende $\Theta(C)$ a $\mathscr{B}$, como também obriga essa medida a ser significativa e finita-σ em todos os casos e a tomar em X um valor que é finito ou infinito simultâneamente com S. Logo a proposição N XXXV' e a alínea *b)* de N XXXV provam que se verifica a igualdade *b)* com certas constantes positivas c_p, com certas medidas *normadas* $\mu_p(B)$ e com p a tomar o único valor 1 ou a correr de 1 a $+\infty$, conforme S for finito ou infinito. Por outro lado, fixado p, primeiro a proposição XIX mostra que a restrição $\Theta_p(C)$ da medida finita $\mu_p(B)$ à classe $\mathscr{C}$ é uma função aferidora finita, finitamente aditiva e quase-contínua no intervalo vazio e depois a proposição XX esclarece que a única extensão de Θ_p a uma medida definida em $\mathscr{B}$ coincide com μ_p e que o supremo S_p da função Θ_p vale $\mu_p(X)=1$. Está pois completada a nossa demonstração.

* * *

Vamos acrescentar um teorema destinado a esclarecer como pode fazer-se a multiplicação de medidas definidas em corpos de Borel com o auxílio das suas restrições às subclasses principais respectivas.

XXII) «Dado o produto $[X(x),\mathscr{B}(B)]$ das $N>1$ rectas de Borel $[X_n(x_n),\ \mathscr{B}_n(B_n)](n=1,\ 2,\ldots,\ N)$, tomem-se arbitràriamente números naturais $N',N''>N',\ldots,N$, formem-se os corpos de Borel $\mathscr{B}'(B') = \prod_{1 \leqq n \leqq N'} \mathscr{B}_n(B_n)$, $\mathscr{B}''(B'') = \prod_{N'+1 \leqq n \leqq N''} \mathscr{B}_n(B_n)$, etc., representem-se por $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$, $\mathscr{C}''$, etc. as subclasses principais de $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$, $\mathscr{B}''$, etc., respectivamente, e admita-se que Θ', Θ'', etc. são funções aferidoras, parcialmente aditivas-σ e quase-contínuas no intervalo vazio, a primeira em relação a $\mathscr{C}'$, a segunda em relação a $\mathscr{C}''$, etc. Então, a função Θ determinada, para quaisquer 2 N grandezas reais finitas a_n e $b_n \geqq a_n$, pela relação

$$a) \qquad \Theta\left(\prod_{1 \leqq n \leqq N} \{a_n \leqq x_n < b_n\}\right) =$$

$$= \Theta'\left(\prod_{1 \leqq n \leqq N'} \{a_n \leqq x_n < b_n\}\right) \cdot \Theta''\left(\prod_{N'+1 \leqq n \leqq N''} \{a_n \leqq x_n < b_n\}\right) \cdot \ldots$$

sai uma função aferidora parcialmente aditiva-σ em $\mathscr{C}$ e quase-contínua no intervalo vazio e sai também igual à restrição a $\mathscr{C}$ de todo o produto de medidas μ', μ'', etc. tais que μ' estende Θ' a $\mathscr{B}'$, que μ'' estende Θ'' a $\mathscr{B}''$, etc.

Em particular, se as funções Θ', Θ'', etc. forem finitas-σ, há uma e só uma medida que estende Θ a $\mathscr{B}$, a qual resulta finita-σ e idêntica ao (único) produto das (únicas) medidas μ', μ'', etc.»

Demonstração de XXII. Sejam quais forem as medidas μ', μ'', etc. tais que μ' estende Θ' a $\mathscr{B}'$, que μ'' estende Θ'' a $\mathscr{B}''$, etc., a proposição XIII e (eventualmente) a propriedade associativa da multiplicação de conjuntos provam que existem sempre produtos $\mu' \times \mu'' \times \cdots$ e que, escolhido um qualquer desses produtos, a sua restrição a $\mathscr{C}$ coincide com a função Θ. Logo a proposição XIX institui Θ em função aferidora parcialmente aditiva-σ em $\mathscr{C}$ e quase-contínua no intervalo vazio. Fica assim demonstrada a primeira parte da nossa proposição.

Suponhamos agora que as funções Θ', Θ'' etc. são finitas-σ. Então, qualquer intervalo de $\mathscr{C}'$ (de $\mathscr{C}''$, etc.) é uma soma quando muito numerável de intervalos de $\mathscr{C}'$ (de $\mathscr{C}''$, etc.) tais que Θ' (Θ'', etc.) atribui um valor finito a cada um deles. Logo a igualdade 8') e a relação *a)* do enunciado provam a finitude-σ de Θ e, portanto, a proposição XX impõe uma só extensão de Θ a uma medida definida em $\mathscr{B}$, a qual sai finita-σ. Este facto, a proposição XIII e a unicidade das extensões μ', μ'', etc. terminam a demonstração de XXII.

Observação. A proposição XXII pode adaptar-se ao caso em que os factores de $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$, etc. não se sucedem pela ordem natural recorrendo, para o efeito, à correspondência biunívoca existente entre X e o espaço que resulta de X por uma permutação das coordenadas (do ponto genérico) convenientemente escolhida.

Por fim, vamos apresentar dois exemplos destinados a ilustrar algumas das situações que podem surgir quando o segundo membro de *a)* de XXII compreender factores infinitos-σ.

Exemplo 45. Façamos $N=2$ e suponhamos que qualquer das duas funções aferidoras Θ_1 e Θ_2, definidas a primeira na subclasse principal de $\mathcal{B}_1$ e a outra na subclasse principal de $\mathcal{B}_2$, atribui o valor 0 ao intervalo vazio e o valor $+\infty$ a todo o intervalo não-vazio. Neste caso, a função Θ determinada por *a)* de XXII sai também infinita em todo o intervalo não-vazio e pode estender-se à medida μ definida em $\mathcal{B}$ como segue: $\mu(\{(1,1)\})=\mu(\{(2,2)\})=1$ e $\mu(B)=+\infty$ para cada B a que pertençam pontos distintos de $(1,1)$ e de $(2,2)$. A medida μ considerada encontra-se impossibilitada de ficar igual a um produto duma medida μ_1 definida em $\mathcal{B}_1$ por uma medida μ_2 definida em $\mathcal{B}_2$, porque a isso se opõe a incompatibilidade das igualdades $\mu_1(\{1\})\cdot\mu_2(\{1\})=\mu_1(\{2\})\cdot\mu_2(\{2\})=1$ e $\mu_1(\{1\})\cdot\mu_2(\{2\})=+\infty$. Quer dizer, *uma extensão de Θ a uma medida definida em $\mathcal{B}$ escusa de ser um produto duma medida definida em $\mathcal{B}_1$ por uma medida definida em $\mathcal{B}_2$.*

Exemplo 46. Façamos $N=3$, suponhamos que as funções Θ_1 e Θ_2 são as mesmas do exemplo anterior, consideremos a função Θ_3 que atribui o valor $b_3^3-a_3^3$ a qualquer intervalo da forma $\{a_3\leqq x_3<b_3\}$ e representemos, para cada n, por μ_n a medida maximal que estende Θ_n a $\mathcal{B}_n$. Neste caso, a função Θ determinada por *a)* de XXII sai infinita em qualquer intervalo não-vazio e, portanto, a medida maximal que estende Θ a $\mathcal{B}$ atribui o valor $+\infty$ ao conjunto elementar $\{(0,0,0)\}$, ao qual o produto maximal das medidas μ_n confere o valor zero. Quer dizer, *existem conjuntos de* Borel *em que a medida maximal*

obtida por extensão da função Θ ao corpo $\mathcal{B}$ resulta maior do que o produto maximal das medidas maximais obtidas por extensão das funções Θ_n aos corpos $\mathcal{B}_n$.

34. Novas propriedades das funções aferidoras especiais tratadas na secção anterior. Seja $[X(x), \mathcal{B}(B)]$ o produto das N rectas de Borel $[X_n(x_n), \mathcal{B}_n(B_n)]$ $(n=1, 2, \ldots, N<+\infty)$, indiquemos por $\prod_n \{a_n \leqq x_n < b_n\}$ o conjunto genérico da classe $\mathcal{C}$ que é a subclasse principal de $\mathcal{B}$, tomemos em $\mathcal{C}$ uma função aferidora Θ parcialmente aditiva-σ que seja quase-contínua no intervalo vazio, consideremos o conteúdo-σ designado por φ na fase 3.ª da demonstração de XX, fixemos arbitràriamente N números c_n, qualquer deles finito ou igual a $+\infty$ ou igual a $-\infty$, e representemos por ψ a restrição de φ à classe $\mathcal{C}(c_1, c_2, \ldots, c_N)$ formada pelos produtos $\prod_n I_n$, onde cada factor I_n significa um intervalo linear arbitrário, contanto que tenha uma das três formas $\{-\infty < x_n < b_n\}$, $\{c_n \leqq x_n < b_n\}$ ou $\{a_n \leqq x_n < c_n\}$, a primeira no caso $c_n = -\infty$ e a segunda ou a terceira no caso $c_n > -\infty$. Notemos, de passagem, que $\mathcal{C}(c_1, c_2, \ldots, c_N) \subset \mathcal{C}$, quando e só quando todos os N números c_n forem finitos.

Sejam quais forem os 2 N números a_n e b_n, designemos por α, $\beta > \alpha$, $\gamma > \beta, \ldots$ os valores de n tais que $a_n \leqq c_n < b_n$ e designemos por $\rho, \sigma > \rho, \tau > \sigma, \ldots$ os restantes valores de n. Nesta conformidade, propomo-nos deduzir a igualdade

$$\text{61)} \qquad \Theta\Big(\prod_{1 \leqq n \leqq N} \{a_n \leqq x_n < b_n\}\Big) =$$
$$= \sum_{1 \leqq p_1, p_2, \ldots, p_N \leqq 2} \Big[(-1)^{p_\rho + p_\sigma + p_\tau + \cdots} \cdot \psi\Big(\prod_{1 \leqq n \leqq N} \{a_{n, p_n} \leqq x_n < b_{n, p_n}\}\Big)\Big],$$

onde valem as regras seguintes: Caso a colecção $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ seja não-vazia e n lhe pertença, põe-se $a_{n,1} = a_n$, $a_{n,2} = b_{n,1} = c_n$ e $b_{n,2} = b_n$; caso a colecção $\rho, \sigma, \tau, \ldots$ seja não-vazia e n lhe pertença, põe-se $a_{n,1} = a_{n,2} = c_n$, $b_{n,1} = a_n$ e $b_{n,2} = b_n$ ou $a_{n,1} = b_n$, $a_{n,2} = a_n$ e $b_{n,1} = b_{n,2} = c_n$, conforme for $c_n < a_n$ ou $c_n \geqq b_n$; caso seja $c_n = -\infty$, substitui-se a desigualdade $c_n \leqq x_n$ por $-\infty < x_n$; caso a colecção $\rho, \sigma, \tau, \ldots$ seja vazia, toma-se a convenção $p_\rho + p_\sigma + p_\tau + \cdots = 0$; caso a colecção $\rho, \sigma, \tau, \ldots$ seja não-vazia, admite-se a finitude de ψ em todo o produto de intervalos lineares para o qual pelo menos um dos índices $p_\rho, p_\sigma, p_\tau, \ldots$ seja igual a 1.

Dedução de 61). Como $\{a_n \leqq x_n < b_n\} = \{a_n \leqq x_n < c_n\} + \{c_n \leqq x_n < b_n\}$ para $n = \alpha, \beta, \ldots$, a fórmula 8') e a aditividade de ψ dão a igualdade

$$62) \qquad \Theta(\prod_n \{a_n \leqq x_n < b_n\}) = \sum_{1 \leqq p_\alpha, p_\beta, \ldots \leqq 2;\, p_\rho, p_\sigma, \ldots = 1} \psi(\prod_n \{a_{n,p_n} \leqq x_n < b_{n,p_n}\}),$$

onde valem as regras seguintes: Caso a colecção $\alpha, \beta, \ldots$ seja não-vazia e n lhe pertença, põe-se $a_{n,1} = a_n$, $a_{n,2} = b_{n,1} = c_n$ e $b_{n,2} = b_n$; caso a colecção $\rho, \sigma, \ldots$ seja não-vazia e n lhe pertença, põe-se $a_{n,1} = a_n$ e $b_{n,1} = b_n$. Este resultado confunde-se com 61) se a colecção complementar de $\alpha, \beta, \ldots$ for uma colecção vazia.

Suponhamos agora que a colecção complementar de $\alpha, \beta, \ldots$ compreende pelo menos um número. Nesta hipótese, sai $\{a_\rho \leqq x_\rho < b_\rho\}$ igual a $\{-\infty < x_\rho < b_\rho\} - \{-\infty < x_\rho < a_\rho\}$ ou igual a $\{c_\rho \leqq x_\rho < b_\rho\} - \{c_\rho \leqq x_\rho < a_\rho\}$ ou igual a $\{a_\rho \leqq x_\rho < c_\rho\} - \{b_\rho \leqq x_\rho < c_\rho\}$, conforme for $c_\rho = -\infty$ ou $-\infty < c_\rho < a_\rho$ ou $c_\rho \geqq b_\rho$. Portanto, a propriedade associativa da multiplicação de conjuntos, as fórmulas 7), a proposição N VI e a alínea *b*) de N XXXI transformam 62) na nova igualdade

$$62') \qquad \Theta(\prod_n \{a_n \leqq x_n < b_n\}) = \sum_{1 \leqq p_\rho, p_\alpha, p_\beta, \ldots \leqq 2;\, p_\sigma, \ldots = 1} [(-1)^{p_\rho} \cdot \psi(\prod_n \{a_{n,p_n} \leqq x_n < b_{n,p_n}\})],$$

onde valem as regras seguintes: Caso seja $n \neq \rho$, os números a_{n,p_n} e b_{n,p_n} obedecem às regras explicadas a propósito de 62); caso seja $n = \rho$, põe-se $a_{\rho,1} = a_{\rho,2} = c_\rho$, $b_{\rho,1} = a_\rho$ e $b_{\rho,2} = b_\rho$ ou $a_{\rho,1} = b_\rho, a_{\rho,2} = a_\rho$ e $b_{\rho,1} = b_{\rho,2} = c_\rho$, conforme for $c_\rho < a_\rho$ ou $c_\rho \geqq b_\rho$; caso seja $c_\rho = -\infty$, substitui-se a desigualdade $c_\rho \leqq x_\rho$ por $-\infty < x_\rho$; admite-se a finitude de ψ em todo o produto de intervalos lineares para o qual o índice p_ρ seja igual a 1.

Este resultado confunde-se com 61) se a colecção complementar de $\alpha, \beta, \ldots$ compreender o único número ρ.

Passemos a supor que a colecção complementar de $\alpha, \beta, \ldots$ compreende pelo menos dois números. Nesta hipótese, podemos imitar a transformação que nos levou de 62) para 62'), procedendo com respeito a σ do mesmo modo que acabamos de proceder com respeito a ρ. Sai a igualdade

$$62'') \qquad \Theta(\prod_n \{ a_n \leqq x_n < b_n \}) =$$
$$= \sum_{1 \leqq p_\rho, p_\sigma, p_\alpha, \ldots \leqq 2;\, p_\tau, \ldots = 1} [(-1)^{p_\rho + p_\sigma} \cdot \psi(\prod_n \{ a_{n,p_n} \leqq x_n < b_{n,p_n} \})],$$

onde valem as regras seguintes: Caso seja $n \neq \sigma$, os números a_{n,p_n} e b_{n,p_n} obedecem às regras explicadas a propósito de 62'); caso seja $n = \sigma$, põe-se $a_{\sigma,1} = a_{\sigma,2} = c_\sigma$, $b_{\sigma,1} = a_\sigma$ e $b_{\sigma,2} = b_\sigma$ ou $a_{\sigma,1} = b_\sigma$, $a_{\sigma,2} = a_\sigma$ e $b_{\sigma,1} = b_{\sigma,2} = c_\sigma$, conforme for $c_\sigma < a_\sigma$ ou $c_\sigma \geqq b_\sigma$; caso seja $c_\sigma = -\infty$, substitui-se a desigualdade $c_\sigma \leqq x_\sigma$ por $-\infty < x_\sigma$; admite-se a finitude de ψ em todo o produto de intervalos lineares para o qual pelo menos um dos dois índices p_ρ e p_σ seja igual a 1. Este resultado confunde-se com 61) se a colecção complementar de $\alpha, \beta, \ldots$ compreender sòmente os dois números ρ e σ.

Claro que a colecção complementar de $\alpha, \beta, \ldots$ pode compreender mais do que dois números. Neste caso itera-se o processo de dedução que viemos seguindo, até alcançar a igualdade 61). Fica assim completada a nossa demonstração.

Observação. Façamos $N = 1$ em 61) e simplifiquemos aí a escrita, suprimindo o índice $n = 1$. Então, sai $\Theta(\{a \leqq x < b\})$ igual a $\psi(\{a \leqq x < c\}) + \psi(\{c \leqq x < b\})$ se $a \leqq c < b$, igual a $\psi(\{-\infty < x < b\}) - \psi(\{-\infty < x < a\})$ se $c = -\infty$ e o termo subtractivo for finito, igual a $\psi(\{c \leqq x < b\}) - \psi(\{c \leqq x < a\})$ se $-\infty < c < a$ e o termo subtractivo for finito e igual a $\psi(\{a \leqq x < c\}) - \psi(\{b \leqq x < c\})$ se $c \geqq b$ e o termo subtractivo for finito.

* * *

Sejam quais forem os 2 N números reais $u_n (n = 1, 2, \ldots, N)$ e v_n, qualquer deles finito arbitrário ou infinito com sinal qualificado, vamos pôr, para cada n, as relações $i_n = \inf(u_n, v_n)$

e $s_n = \sup(u_n, v_n)$. Então, podemos retomar a função aferidora aditiva φ, considerada no princípio desta secção, e podemos introduzir uma função T das $2N$ variáveis u_n e v_n, simétrica em cada par de variáveis u_n e v_n, através da igualdade de definição

$$63) \quad T(u_1, u_2, \ldots, u_N, v_1, v_2, \ldots, v_N) = \varphi\Big(\prod_{1 \leqq n \leqq N} \{i_n \leqq x_n < s_n\}\Big),$$

onde deve substituir-se a desigualdade $i_n \leqq x_n$ por $-\infty < x_n$, caso se tenha $i_n = -\infty$. Se atribuirmos agora às N variáveis v_n os valores numéricos c_n, estes determinam uma função $T_{c_1, c_2, \ldots, c_N}$ das N variáveis u_n, a qual é definida pela igualdade

$$63') \quad T_{c_1, c_2, \ldots, c_N}(u_1, u_2, \ldots, u_N) = \varphi\Big(\prod_{1 \leqq n \leqq N} \{i_n \leqq x_n < s_n\}\Big),$$

onde vale a convenção explicada a propósito de 63) e onde, dado n, uma das grandezas i_n e s_n sai necessàriamente igual a c_n.

Ora bem, escolhidos arbitràriamente os números reais finitos a_n e $b_n \geqq a_n$, as igualdades 63) e 63') permitem dar a 61) o aspecto

$$61') \quad T(a_1, a_2, \ldots, a_N, b_1, b_2, \ldots, b_N) = \\ = \sum_{1 \leqq p_1, \ldots, p_N \leqq 2} [(-1)^{p_\rho + p_\sigma + \cdots} . T_{c_1, \ldots, c_N}(u_{1,p_1}, \ldots, u_{N,p_N})]$$

ou ainda o aspecto

$$61'') \quad T(a_1, a_2, \ldots, a_N, b_1, b_2, \ldots, b_N) = \\ = \sum_{1 \leqq p_1, \ldots, p_N \leqq 2} [(-1)^{p_\rho + p_\sigma + \cdots} . T_{u_{1,p_1}, \ldots, u_{N,p_N}}(c_1, \ldots, c_N)],$$

em relação a ambos os quais valem as regras seguintes: Caso a colecção $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ seja não-vazia e n lhe pertença, põe-se $u_{n,1} = a_n$ e $u_{n,2} = b_n$; caso a colecção $\rho, \sigma, \tau, \ldots$ seja não-vazia e n lhe pertença, põe-se $u_{n,1} = a_n$ e $u_{n,2} = b_n$ ou $u_{n,1} = b_n$ e $u_{n,2} = a_n$, conforme for $c_n < a_n$ ou $c_n \geqq b_n$; caso a colecção $\rho, \sigma, \tau, \ldots$ seja vazia, toma-se a convenção $p_\rho + p_\sigma + p_\tau + \cdots = 0$; caso a colecção $\rho, \sigma, \tau, \ldots$ seja não-vazia, admite-se a finitude de todo o termo da soma do segundo membro para o qual pelo menos um dos índices $p_\rho, p_\sigma, p_\tau, \ldots$ seja igual a 1.

Posto isso, se fixarmos arbitràriamente as grandezas c_n, então, sejam quais forem os argumentos a_n e b_n que pusermos na função T, o segundo membro da igualdade 61'), suposto válido, constitui-se em combinação linear e homogénea de certos valores (em número de 2^N) da função $T_{c_1, c_2, \dots, c_N}$ de N variáveis. Por outro lado, se fixarmos arbitràriamente os argumentos a_n e b_n da função T, então, sejam quais forem as grandezas c_n, o segundo membro de 61''), suposto válido, constitui-se em combinação linear e homogénea das 2^N funções $T_{u_{1,p_1}, u_{2,p_2}, \dots, u_{N,p_N}}$, todas elas tomadas nas grandezas c_n consideradas.

Observação. Façamos $N=1$ em 61') e em 61'') e simplifiquemos aí a escrita, suprimindo o índice $n=1$. Então, sai $T(a, b)$ igual a $T_c(a)+T_c(b)=T_a(c)+T_b(c)$ se $a \leqq c < b$, igual a $-T_c(a)+T_c(b)=-T_a(c)+T_b(c)$ se $c<a$ e o termo subtractivo for finito e igual a $-T_c(b)+T_c(a)=-T_b(c)+T_a(c)$ se $c \geqq b$ e o termo subtractivo for finito.

Vejamos agora dois exemplos.

Exemplo 47. Se pusermos $c_1=\cdots=c_N=-\infty$, então 61') e 63') dão

$$T(a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N) =$$
$$= \sum_{1 \leqq p_1, \dots, p_N \leqq 2} [(-1)^{p_1+\cdots+p_N} . T_{-\infty, \dots, -\infty}(u_{1,p_1}, \dots, u_{N,p_N})],$$

com

$$T_{-\infty, \dots, -\infty}(u_{1,p_1}, \dots, u_{N,p_N}) = \psi\Big(\prod_{1 \leqq n \leqq N} \{-\infty < x_n < u_{n,p_n}\}\Big),$$

onde $u_{n,1}=a_n$ e $u_{n,2}=b_n$, para qualquer n, e onde se admite a finitude de todos os termos do somatório, com excepção possível do termo para o qual $p_1=\cdots=p_N=2$. Semelhantemente, se pusermos $c_1=\cdots=c_N=+\infty$, então sai

$$T(a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N)=$$
$$= \sum_{1 \leqq p_1, \dots, p_N \leqq 2} [(-1)^{p_1+\cdots+p_N} . T_{+\infty, \dots, +\infty}(u_{1,p_1}, \dots, u_{N,p_N})],$$

com

$$T_{+\infty, \dots, +\infty}(u_{1,p_1}, \dots, u_{N,p_N}) = \psi\Big(\prod_{1 \leqq n \leqq N} \{u_{n,p_n} \leqq x_n < +\infty\}\Big),$$

onde $u_{n,1}=b_n$ e $u_{n,2}=a_n$, para qualquer n, e onde se faz a mesma hipótese de finitude acima explicada.

Exemplo 48. Suponhamos que c_n é infinito para $n=q$, onde q percorre os valores $r, s>r, t>s, \ldots$, e que c_n é finito ou infinito para os restantes valores de n que houver. Então, se substituirmos cada um dos números c_n por uma grandeza v_n, igual a c_n para $n \neq q$ e finita e do mesmo sinal que c_n para $n=q$, se fizermos isso, quaisquer valores das variáveis u_n tais que $u_q \neq c_q$, para todo o q admissível, verificam a relação

$$\lim_{v_r \to c_r,\, v_s \to c_s, \ldots;\, |v_r| = |v_s| = \cdots} T_{v_1, v_2, \ldots, v_N}(u_1, u_2, \ldots, u_N) =$$
$$= T_{c_1, c_2, \ldots, c_N}(u_1, u_2, \ldots, u_N).$$

Com efeito, basta fazer tender uma das grandezas v_q para c_q ao longo duma sucessão monótona *arbitrária*, formada por números $v_{q,l}$ $(l=1, 2, 3, \ldots)$, para que a igualdade 63′), a propriedade da função φ de ser um conteúdo-σ e a parte de II respeitante à continuidade inferior forcem $T_{v_1, v_2, \ldots, v_N}$ a tender para $T_{c_1, c_2, \ldots, c_N}$, quando $l \uparrow +\infty$.

35. Relações entre medidas definidas em espaços de Borel com um número finito N de dimensões e funções medidoras associadas a uma colecção de N números ordenados. Considerem-se N variáveis reais finitas u_n $(n=1, 2, \ldots, N)$, fixem-se arbitràriamente N números reais c_n, qualquer deles finito ou igual a $+\infty$ ou ainda igual a $-\infty$, e faça-se corresponder a esses números uma função real finita $F_{c_1, c_2, \ldots, c_N}$, abreviadamente F_c, das variáveis u_n. Tal função pode depender das grandezas c_n e u_n de muitos modos, dos quais só indicaremos os que mais interessam ao estudo subsequente.

A função $F_c(u_1, u_2, \ldots, u_N)$ diz-se *não-decrescente com respeito a cada um dos números* c_n se (e só se), escolhidos arbitràriamente um número natural $m \leq N$ e valores η_n das variáveis u_n de índices $n \neq m$ (caso haja tais índices), a desigualdade

$$F_c(\ldots, \eta_{m-1}, u'_m, \eta_{m+1}, \ldots) \leq F_c(\ldots, \eta_{m-1}, u''_m, \eta_{m+1}, \ldots)$$

tiver lugar todas as vezes que u'_m e u''_m forem quaisquer valores de u_m sujeitos a uma das duas desigualdades $u''_m \leqq u'_m \leqq c_m$ ou $c_m < u'_m \leqq u''_m$.

Ampliando agora ligeiramente um conceito referido no tratado de RICHTER, dizemos que a função F_c, associada aos números $c_1, c_2, \ldots, c_N$, é *privilegiada com respeito ao ponto* $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N)$ do espaço X a N dimensões se (e só se) ela possuir a propriedade seguinte: Seja qual for o número natural $K \leqq N$ e sejam quais forem os inteiros $n_k (k = 1, 2, \ldots, K)$ sujeitos à relação $1 \leqq n_1 < n_2 < \cdots < n_K \leqq N$, o segundo membro de 61'), adaptado ao caso dos K índices p_n tais que $n = n_k$ com algum k, passa a tomar um valor não-negativo para qualquer escolha dos $2K$ números reais finitos a_{n_k} e $b_{n_k} \geqq a_{n_k}$, isto se nele substituirmos a função $T_{c_{n_1}, \ldots, c_{n_K}}(u_{n_1}, \ldots, u_{n_K})$ pela função $F_{\eta, c_{n_1}, \ldots, c_{n_K}}(u_{n_1}, \ldots, u_{n_K})$ que se obtém a partir da função $F_{c_1, \ldots, c_N}(u_1, \ldots, u_N)$ quando se iguala a η_n cada uma das (eventuais) grandezas u_n de índices $n \neq n_1, \ldots, n_K$. Talvez valha a pena notar que a hipótese $K = N$ faz coincidir a (única) função $F_{\eta, c_{n_1}, \ldots, c_{n_N}}$ com a função F_c. Mais, *sai não--decrescente com respeito a cada* c_n *uma função* F_c *dotada das condições de privilégio correspondentes ao caso* $K = 1$, *isto com respeito a todo o ponto do espaço* X, porque, para tal função, qualquer escolha de η, de $m \leqq N$ e do par de números reais finitos a_m e $b_m \geqq a_m$, não sujeito à relação $a_m \leqq c_m < b_m$, permite escrever $\sum_{1 \leqq p_m \leqq 2} (-1)^{p_m} \cdot F_{\eta, c_m}(u_{m, p_m}) \geqq 0$, onde podemos pôr $u_{m,1} = a_m = u'_m$ e $u_{m,2} = b_m = u''_m$ ou $u_{m,1} = b_m = u'_m$ e $u_{m,2} = a_m = u''_m$, conforme for $c_m < a_m$ ou $c_m \geqq b_m$.

Finalmente, diz-se que $F_{c_1, c_2, \ldots, c_N}(u_1, u_2, \ldots, u_N)$ é uma *função medidora associada aos números* $c_1, c_2, \ldots, c_N$ se (e só se) ela possuir as quatro propriedades seguintes: 1.ª A função existe e é finita para quaisquer valores das variáveis u_n. 2.ª Em qualquer ponto do seu campo de existência a função sai semicontínua do lado esquerdo com respeito a cada uma das suas variáveis. 3.ª Seja qual for o número natural $m \leqq N$ e sejam quais forem os valores atribuídos às variáveis u_n de índices $n \neq m$ (se os houver), a função tem valor nulo quando $u_m = c_m \neq \infty$ e tem limite nulo quando $u_m \downarrow c_m = -\infty$

ou quando $u_m \uparrow c_m = +\infty$. 4.ª Se substituirmos T por F no segundo membro de 61'), este fica com valor não-negativo para qualquer escolha dos $2N$ números reais finitos a_n e $b_n \geqq a_n$.

Observação. Façamos $N=1$ na definição de função medidora associada aos números c_n e simplifiquemos a notação, suprimindo o (único) índice $n=1$. Então, a observação posta a seguir a 61'') mostra que $F_c(u)$ é *uma função medidora associada ao número c* se (e só se) ela possuir as quatro propriedades seguintes: 1.ª A função existe e é finita para qualquer valor de u. 2.ª A função sai semicontínua do lado esquerdo em qualquer ponto do seu campo de existência. 3.ª A função tem valor nulo quando $u=c\neq\infty$ e tem limite nulo quando $u\downarrow c=-\infty$ ou quando $u\uparrow c=+\infty$. 4.ª Sejam quais forem os números reais finitos a e $b\geqq a$, a função torna não-negativa uma das expressões $F_c(a)+F_c(b)$, $-F_c(a)+F_c(b)$ e $-F_c(b)+F_c(a)$, a primeira se $a\leqq c<b$, a segunda se $c<a$ e a terceira se $c\geqq b$.

*
* *

As duas primeiras definições acima dadas encontram-se, de certo modo, subordinadas à última. Com efeito, vale a proposição seguinte:

XXIII) «Dados N números reais $c_n\,(n=1,2,\ldots,N)$, qualquer deles finito ou igual a $+\infty$ ou ainda igual a $-\infty$, uma função medidora associada a $c_1, c_2, \ldots, c_N$ só pode assumir valores não-negativos, sai não-decrescente com respeito a cada c_n e fica privilegiada com respeito a todo o ponto do espaço real a N dimensões.»

Demonstração de XXIII. Consideremos N variáveis reais finitas u_n e uma função $F_{c_1,c_2,\ldots,c_N}(u_1, u_2, \ldots, u_N)$, abreviadamente F_c, que seja medidora associada a $c_1, c_2, \ldots, c_N$.

Comecemos por supor que $c_n\neq\infty$ para cada n, fixemos arbitràriamente um ponto $\eta=(\eta_1,\ldots,\eta_N)$ no espaço real a N dimensões, tomemos qualquer número natural $J\leqq N$, escolhamos quaisquer J índices n, diferentes uns dos outros, designemos por r o elemento genérico dos índices escolhidos e introduzamos no segundo membro de 61'), com F em lugar de T, as $3J$ igualdades $u_r = \eta_r$, $a_r = \inf(c_r, \eta_r)$ e $b_r = \sup(c_r, \eta_r)$. Então, por um lado, a terceira propriedade das funções medidoras *impõe valor nulo* a toda a parcela $\pm F_{c_1,\dots,c_N}(u_{1,p_1},\dots,u_{N,p_N})$ tal que $u_{r,p_r} = c_r$, para algum r, e, por outro lado, cada relação $u_{r,p_r} = \eta_r$ permite pôr $p_r = 2$, isto seja qual for a posição de η_r. Daí e da quarta propriedade das funções medidoras inferimos primeiro, fazendo $J = N$, que a função F_c não pode assumir valores negativos, inferimos depois, atendendo a todos os casos em que $J < N$ (se houver tais casos), que F_c é uma função privilegiada com respeito a todo o ponto η e inferimos ainda, tomando em conta o comentário feito ao conceito de função privilegiada, que F_c sai não-decrescente com respeito a cada c_n.

Em face do exposto, a nossa tese está demonstrada, no caso de ser $c_n \neq \infty$ para cada n. O caso $c_n = \infty$, para algum n, obtém-se a partir do anterior, substituindo em F_c qualquer grandeza $\inf(c_r, \eta_r)$ infinita negativa [$\sup(c_r, \eta_r)$ infinita positiva] por outra finita menor [maior] do que η_r, fazendo tender *consecutivamente* cada grandeza substituinte para $-\infty$ [$+\infty$], ao longo duma sucessão monótona, e lendo «impõe limite nulo» na parte do texto em que se lia «impõe valor nulo».

A proposição XXIII torna oportuno que apresentemos um exemplo destinado a ilustrar o facto seguinte: Dados o número natural $N > 1$ e os N números reais c_n, qualquer deles finito ou igual a $+\infty$ ou ainda igual a $-\infty$, e dada a função $F_{c_1,\dots,c_N}$ das N variáveis reais finitas u_n, esta escusa de satisfazer à quarta propriedade duma função medidora associada aos números $c_1, c_2, \dots, c_N$, mesmo que ela se sujeite às três primeiras propriedades respectivas, só tenha valores não-negativos e seja não-decrescente com respeito a cada c_n.

Exemplo 49. Suponha-se $N = 2$, tome-se $c_1 = c_2 = 0$ e escolha-se a função $F_{0,0}(u_1, u_2)$, igual a 1 se $u_1 u_2 > 1 < 1 + u_1$ e igual a 0 nos demais casos. Então, a função escolhida tem todas as propriedades consentidas no preâmbulo a este exemplo, mas atribui um valor negativo ao segundo membro de 61'), quando se substitui aí T por F e se faz $a_1=a_2=1$ e $b_1=b_2=2$. Com efeito, sai $F_{0,0}(1,1)-F_{0,0}(1,2)-F_{0,0}(2,1)+F_{0,0}(2,2)=$ $=0-1-1+1=-1<0$.

Observação. Considere-se um número real c, finito ou igual a $+\infty$ ou ainda igual a $-\infty$, e uma função F_c da variável real finita u que satisfaça às propriedades primeira, segunda e terceira duma função medidora associada ao número c, tenha apenas valores não-negativos e seja não-decrescente com respeito ao número c. Neste caso, correspondente à hipótese $N=1$, os números reais finitos a e $b\geqq a$ dão $F_c(a)+F_c(b)\geqq 0$ ou $-F_c(a)+F_c(b)\geqq 0$ ou $-F_c(b)+F_c(a)\geqq 0$, conforme for $a\leqq c<b$ ou $c<a$ ou $c\geqq b$. Portanto, a observação posta antes de XXIII mostra que a função F_c considerada satisfaz também à quarta propriedade duma função medidora associada a c.

* * *

Continuemos esta secção com duas proposições destinadas a mostrar que não foi mal escolhida a designação atribuída às funções medidoras atrás definidas. Em primeiro lugar, temos a proposição seguinte:

XXIV) «Dados os N números reais $c_n\,(n=1,2,\ldots,N)$, qualquer deles finito ou igual a $+\infty$ ou ainda igual a $-\infty$, e definida uma medida μ no produto das N rectas de Borel $[X_n(x_n), \mathcal{B}_n(B_n)]$, suponha-se finita a função das N variáveis reais finitas u_n determinada pela relação

$$a)\quad \mu\Big(\prod_{1\leqq n\leqq N}\{\inf(c_n,u_n)\leqq x_n<\sup(c_n,u_u)\}\Big)=$$
$$=F_{c_1,c_2,\ldots,c_N}(u_1,u_2,\ldots,u_N),$$

onde deve substituir-se a desigualdade $\inf(c_n,u_n)\leqq x_n$ por $-\infty<x_n$, caso se tenha $c_n=-\infty$. Então, a função determinada sai uma função medidora associada aos números $c_1,c_2,\ldots,c_N$.»

Demonstração de XXIV. É mister provar que o segundo membro de *a)* satisfaz às quatro propriedades que aparecem na definição de função medidora associada aos números dados $c_1, c_2, \ldots, c_N$.

Para começar, quaisquer valores finitos das variáveis u_n transformam o argumento de μ do primeiro membro de *a)* num conjunto de Borel a N dimensões e, portanto, conferem um valor bem determinado ao segundo membro de *a)*.

Mais, se pusermos $i_n = \inf(c_n, u_n)$ e $s_n = \sup(c_n, u_n)$, para cada n, se fixarmos de qualquer modo um inteiro m entre 1 e N, extremos incluídos, se tomarmos uma sucessão de números *arbitrários* $\varepsilon_{m,p} \downarrow 0 \, (p = 1, 2, 3, \ldots)$ e se estabelecermos a convenção $S = \pm 1$, $+$ no caso $u_m > c_m$ e $-$ no caso $u_m \leqq c_m$, se fizermos tudo isso, então, sejam quais forem os valores atribuídos às variáveis u_n, a alínea *b)* da proposição NXXXIII, a propriedade associativa da multiplicação de conjuntos, as fórmulas 7) e a parte da proposição II relativa à continuidade superior duma medida permitem escrever

$$\begin{aligned} & S \cdot [F_{c_1,\ldots,c_N}(\cdots, u_{m-1}, u_m, u_{m+1}, \cdots) - \\ & - F_{c_1,\ldots,c_N}(\cdots, u_{m-1}, u_m - \varepsilon_{m,p}, u_{m+1}, \cdots)] = \\ & = \mu(\cdots \times \{i_{m-1} \leqq x_{m-1} < s_{m-1}\} \times \{u_m - \varepsilon_{m,p} \leqq x_m < u_m\} \times \\ & \times \{i_{m+1} \leqq x_{m+1} < s_{m+1}\} \times \cdots) \downarrow 0, \end{aligned}$$ *(continua)*

onde, dado $n \neq m$, deve substituir-se $i_n \leqq x_n$ por $-\infty < x_n$, caso se tenha $c_n = -\infty$. Consequentemente, o segundo membro de *a)* resulta semicontínuo do lado esquerdo na variável número m.

Depois, provamos a terceira propriedade, raciocinando como segue: Sejam quais forem os valores das variáveis u_n de índices $n \neq m$, não só a relação $u_m = c_m \neq \infty$ torna vazio o argumento de μ em *a)* e, portanto, confere valor nulo a μ, como também *toda* a colecção de números $u_{m,p} \, (p = 1, 2, 3, \ldots)$ tais que $u_{m,p} \downarrow c_m = -\infty$ [ou $u_{m,p} \uparrow c_m = +\infty$] confere limite nulo à função μ de *a)*, isto por causa da parte de II relativa à continuidade superior.

Finalmente, se a função Θ considerada no princípio da secção n.º 34 for a restrição de μ à classe $\mathcal{C}$, coisa esta possível por causa de XIX, então a função φ correspondente sai, atendendo a 59), também uma restrição de μ e, portanto, a função do segundo membro de *a)* do enunciado identifica-se com a do primeiro membro de 63'), para argumentos finitos. Nesta conformidade, sejam quais forem os números reais finitos a_n e $b_n \geq a_n$, a função (finita) do segundo membro de *a)* atribui ao segundo membro da igualdade 61') um valor igual ao do seu primeiro membro, quer dizer, por causa de 63), igual a $\varphi(\prod_n \{a_n \leq x_n < b_n\}) \geq 0$. Fica assim completada a demonstração de XXIV.

Segue uma proposição que pode considerar-se a inversa de XXIV. Ei-la:

XXV) «Dadas N rectas reais $X_n(x_n)(n=1,2,\ldots,N)$ e dados N números reais c_n, qualquer deles finito ou igual a $+\infty$ ou ainda igual a $-\infty$, considerem-se as N variáveis reais finitas u_n e suponha-se que $F_{c_1,c_2,\ldots,c_N}(u_1,u_2,\ldots,u_N)$ é uma função medidora associada aos números $c_1,c_2,\ldots,c_N$. Então, a relação

$$a)\quad F_{c_1,c_2,\ldots,c_N}(u_1,u_2,\ldots,u_N)= \\ =\psi(\prod_{1\leq n\leq N}\{\inf(c_n,u_n)\leq x_n<\sup(c_n,u_n)\})$$

(onde deve substituir-se a desigualdade $\inf(c_n,u_n)\leq x_n$ por $-\infty<x_n$, caso se tenha $c_n=-\infty$) dá uma função de conjunto ψ, a qual admite uma e só uma extensão a uma medida μ definida no espaço de Borel $(X,\mathscr{B})$ a N dimensões, medida esta que sai finita-σ em $\mathscr{B}$ e finita na subclasse principal de $\mathscr{B}$.»

Demonstração de XXV. Antes de mais nada, recordemos a notação introduzida no princípio da secção n.º 34 e observemos que a função finita ψ da nossa relação *a)* se encontra definida na classe $\mathcal{C}(c_1,c_2,\ldots,c_N)$ e tem possibilidade de estender-se a uma medida definida em $(X,\mathscr{B})$, porque ela é uma função aferidora, isto em virtude de XXIII assegurar a sua não-negatividade.

Ora bem, as propriedades primeira e quarta das funções medidoras permitem igualar o segundo membro de 61'), com

F em lugar de T, a uma *função aferidora* **finita**, *digamos* Θ, que sai *definida na classe* $\mathfrak{C}$. Esta função Θ *resulta quase-contínua no intervalo vazio,* porque a segunda propriedade das funções medidoras e a existência dum inteiro m tal que $1 \leqq m \leqq N$ e $a_m \uparrow b_m [a_m = b_m]$ conferem limite [valor] nulo ao segundo membro de 61'), sempre com F em lugar de T, conforme pode ver-se considerando que, uma vez escolhidos valores admissíveis das grandezas $\ldots, u_{m-1, p_{m-1}}, u_{m+1, p_{m+1}}, \ldots$, a hipótese $c_m \geqq b_m$ implica $c_m \geqq a_m$ e a hipótese $c_m < b_m$ implica $c_m < a_m$, para a_m suficientemente próximo de b_m [o único a_m], donde $-F_{c_1, \ldots, c_N}(\ldots, u_{m,1}, \ldots) + F_{c_1, \ldots, c_N}(\ldots, u_{m,2}, \ldots) \rightarrow 0 [=0]$, em qualquer dos casos.

Posto isso, vamos provar que as propriedades supostas para a função $F_{c_1, \ldots, c_N}$ forçam a função Θ *a ser finitamente aditiva na classe* $\mathfrak{C}$. Para este efeito, consideramos quaisquer dois pontos situados em X, o primeiro a de coordenadas a_n e o outro b de coordenadas $b_n \geqq a_n$, escolhemos arbitràriamente um inteiro m entre 1 e N, extremos incluídos, supomos $a_m < b_m$, fazemos corresponder a esse m algum número d_m tal que $a_m < d_m < b_m$ e designamos por a' o ponto de coordenadas $\ldots, a_{m-1}, d_m, a_{m+1}, \ldots$ e por b' o ponto de coordenadas $\ldots, b_{m-1}, d_m, b_{m+1}, \ldots$. Mais, tomamos a colecção $\alpha, \beta, \ldots$ e as duas modalidades da colecção $\rho, \sigma, \ldots$ que o par de pontos a e b introduz no segundo membro de 61'), notamos que as colecções e modalidades análogas correspondentes ao par de pontos a e b' e ao par de pontos a' e b só podem diferir das primeiras para $n = m$ e $a_m \leqq c_m < b_m$, introduzimos as convenções $u'_{m,1} = a_m$, $u'_{m,2} = d_m = u''_{m,1}$ e $u''_{m,2} = b_m$, conservamos as regras explicadas a propósito de 61') para quaisquer símbolos u_{n, p_n} que não levem plicas e formamos a soma do valor da função Θ no intervalo a N dimensões correspondente ao par de pontos a e b' com o valor da mesma função no intervalo correspondente ao par de pontos a' e b. Então, se a colecção $\rho, \sigma, \ldots$ for a que se refere ao par de pontos a e b, qualquer das hipóteses $a_m \leqq c_m < d_m$ ou $d_m \leqq c_m < b_m$ torna a soma mencionada igual ao somatório, quando $1 \leqq \ldots, p_{m-1}, p_{m+1}, \ldots \leqq 2$, de

$$(-1)^{p_\varrho+p_\sigma+\cdots}\cdot[F_{c_1,\ldots,c_N}(\ldots,u_{m-1,p_{m-1}},a_m,u_{m+1,p_{m+1}},\ldots)+$$
$$+F_{c_1,\ldots,c_N}(\ldots,u_{m-1,p_{m-1}},d_m,u_{m+1,p_{m+1}},\ldots)-$$
$$-F_{c_1,\ldots,c_N}(\ldots,u_{m-1,p_{m-1}},d_m,u_{m+1,p_{m+1}},\ldots)+$$
$$+F_{c_1,\ldots,c_N}(\ldots,u_{m-1,p_{m-1}},b_m,u_{m+1,p_{m+1}},\ldots)]$$

e qualquer das hipóteses restantes torna a dita soma igual ao somatório, quando $1\leqq p_1,\ldots,p_N\leqq 2$, de

$$\pm(-1)^{p_\varrho+p_\sigma+\cdots}\cdot[F_{c_1,\ldots,c_N}(\ldots,u_{m-1,p_{m-1}},u'_{m,p_m},u_{m+1,p_{m+1}},\ldots)+$$
$$+F_{c_1,\ldots,c_N}(\ldots,u_{m-1,p_{m-1}},u''_{m,p_m},u_{m+1,p_{m+1}},\ldots)]=(-1)^{p_\varrho+p_\sigma+\cdots}\cdot$$
$$\cdot F_{c_1,\ldots,c_N}(\ldots,u_{m-1,p_{m-1}},u_{m,p_m},u_{m+1,p_{m+1}},\ldots),$$

onde vale o sinal + na hipótese $c_m<a_m$ e o sinal — na hipótese $c_m\geqq b_m$.

Do que precede concluímos que qualquer das quatro hipóteses possíveis conduz à igualdade

$$64)\quad \Theta(\cdots\times\{a_{m-1}\leqq x_{m-1}<b_{m-1}\}\times\{a_m\leqq x_m<d_m\}\times \quad \textit{(continua)}$$
$$\times\{a_{m+1}\leqq x_{m+1}<b_{m+1}\}\times\cdots)+\Theta(\cdots\times\{a_{m-1}\leqq x_{m-1}<b_{m-1}\}\times \quad \textit{(continua)}$$
$$\times\{d_m\leqq x_m<b_m\}\times\{a_{m+1}\leqq x_{m+1}<b_{m+1}\}\times\cdots)=$$
$$=\Theta(\cdots\times\{a_{m-1}\leqq x_{m-1}<b_{m-1}\}\times\{a_m\leqq x_m<b_m\}\times \quad \textit{(continua)}$$
$$\times\{a_{m+1}\leqq x_{m+1}<b_{m+1}\}\times\cdots),$$

a qual subsiste se for $a_m=d_m<b_m$, $a_m<d_m=b_m$ ou $a_m=d_m=b_m$.

Suponhamos agora que a cada n correspondem um número natural Q_n e números d_{n,q_n} $(q_n=1,2,\ldots,Q_n+1)$ tais que $d_{n,1}=a_n$, $d_{n,Q_n+1}=b_n$ e $d_{n,q_n+1}\geqq d_{n,q_n}$ para qualquer $q_n\leqq Q_n$. Nesta conformidade, a igualdade 64) implica a nova igualdade

$$64')\quad \Theta(\cdots\times\{a_{m-1}\leqq x_{m-1}<b_{m-1}\}\times\{a_m\leqq x_m<b_m\}\times \quad \textit{(continua)}$$
$$\times\{a_{m+1}\leqq x_{m+1}<b_{m+1}\}\times\cdots)=$$
$$=\sum_{1\leqq q_m\leqq Q_m}\Theta(\cdots\times\{a_{m-1}\leqq x_{m-1}<b_{m-1}\}\times \quad \textit{(continua)}$$
$$\times\{d_{m,q_m}\leqq x_m<d_{m,q_m+1}\}\times\{a_{m+1}\leqq x_{m+1}<b_{m+1}\}\times\cdots),$$

a qual reproduz 64) no caso $Q_m=2$ e resulta de aplicações repetidas de 64) no caso $Q_m>2$, caso este em que se intercala primeiro $d_{m,2}$ entre a_m e b_m, depois $d_{m,3}$ entre $d_{m,2}$ e b_m, etc., e, por fim, d_{m,Q_m} entre d_{m,Q_m-1} e b_m. Ora bem, se utilizarmos 64'), sucessivamente para $m=1$, $m=2,\ldots$, $m=N$, e se tomarmos em conta a igualdade 8'), somos conduzidos à relação

$$65)\quad \Theta\Big(\sum_{1\leqq q_1\leqq Q_1,\ldots,1\leqq q_N\leqq Q_N}[\{d_{1,q_1}\leqq x_1<d_{1,q_1+1}\}\times\cdots \quad \textit{(continua)}$$
$$\cdots\times\{d_{N,q_N}\leqq x_N<d_{N,q_N+1}\}]\Big)=$$
$$=\sum_{1\leqq q_1\leqq Q_1,\ldots,1\leqq q_N\leqq Q_N}\Theta(\{d_{1,q_1}\leqq x_1<d_{1,q_1+1}\}\times\cdots \quad \textit{(continua)}$$
$$\cdots\times\{d_{N,q_N}\leqq x_N<d_{N,q_N+1}\}).$$

Vamos passar a admitir que o conjunto não-vazio $C=\prod_n\{a_n\leqq x_n<b_n\}\in\mathcal{C}$ é a soma dos K conjuntos

$$C_k=\prod_n\{a_{n,k}\leqq x_n<b_{n,k}\}\in\mathcal{C}\qquad(k=1,2,\ldots,K).$$

Então, seja qual for n, podemos designar por $d_{n,1},d_{n,2},\ldots$ $\ldots,d_{n,q_n},\ldots$ os $2K=Q$ números $a_{n,k}$ e $b_{n,k}$, dispostos por ordem não-decrescente, para concluirmos primeiro que qualquer k dá a igualdade

$$\{a_{n,k}\leqq x_n<b_{n,k}\}=\sum_{a_{n,k}\leqq d_{n,q_n}<b_{n,k}}\{d_{n,q_n}\leqq x_n<d_{n,q_n+1}\},$$

depois, por causa de NVII, que se verifica também a igualdade

$$\{a_n\leqq x_n<b_n\}=\bigcup_{1\leqq k\leqq K}\{a_{n,k}\leqq x_n<b_{n,k}\}=$$
$$=\sum_{1\leqq q_n\leqq Q-1}\{d_{n,q_n}\leqq x_n<d_{n,q_n+1}\}$$

e finalmente, por causa da fórmula 8'), que se verifica a relação

$$\sum_{1\leqq q_1\leqq Q-1,\ldots,1\leqq q_N\leqq Q-1}(\{d_{1,q_1}\leqq x_1<d_{1,q_1+1}\}\times\cdots \quad \textit{(continua)}$$
$$\cdots\times\{d_{N,q_N}\leqq x_N<d_{N,q_N+1}\})=C=\sum_{1\leqq k\leqq K}C_k,$$

com

$$C_k = \sum_{a_{1,k} \leqq d_{1,q_1} < b_{1,k}, \ldots, a_{N,k} \leqq d_{N,q_N} < b_{N,k}} (\{d_{1,q_1} \leqq x_1 < d_{1,q_1+1}\} \times \cdots$$

(continua)

$$\cdots \times \{d_{N,q_N} \leqq x_N < d_{N,q_N+1}\})], \quad \text{para cada } k.$$

O que precede e a relação 65) mostram que $\Theta(\sum_k C_k) = \sum_k \Theta(C_k)$, ficando assim provada a aditividade finita da função Θ.

Em face do exposto, a proposição XX prova que a função Θ *pode estender-se, dum e dum só modo, a uma medida* μ *definida em* $\mathcal{B}$, *medida esta que sai finita-*σ *em* $\mathcal{B}$ *e finita em* $\mathcal{C}$. Então, *a restrição de* μ *à classe* $\mathcal{C}(c_1, c_2, \ldots, c_N)$ *coincide com a função* ψ, conforme pode ver-se através das considerações seguintes: Se c_n for sempre finito, basta fazer corresponder a quaisquer valores das variáveis u_n as relações $a_n = \inf(c_n, u_n)$ e $b_n = \sup(c_n, u_n)$, válidas com cada n, para que *a terceira propriedade da função* $F_{c_1, c_2, \ldots, c_N}$ e a relação *a)* do nosso enunciado reduzam o segundo membro de 61') a $\psi(\prod_n \{a_n \leqq x_n < b_n\})$ e para que, simultâneamente, a definição das funções Θ e μ torne o mesmo segundo membro igual a $\mu(\prod_n \{a_n \leqq x_n < b_n\})$; se c_n for infinito, para algum n, basta tomar as grandezas a_n e b_n apresentadas, substituir qualquer grandeza a_n infinita negativa [b_n infinita positiva] por outra finita menor [maior] do que u_n e fazer tender consecutivamente cada uma das grandezas substituintes para $-\infty$ [$+\infty$], ao longo duma sucessão monótona, basta fazer isso, para que a terceira propriedade da função $F_{c_1, c_2, \ldots, c_N}$ e a relação *a)* do nosso enunciado confiram ao segundo membro da igualdade 61') o limite $\psi(\prod_n \{\inf(c_n, u_n) \leqq x_n < \sup(c_n, u_n)\})$ e para que, simultâneamente, a definição das funções Θ e μ e a continuidade inferior de μ confiram ao mesmo segundo membro o limite $\mu(\prod_n \{\inf(c_n, u_n) \leqq x_n < \sup(c_n, u_n)\})$.

Finalmente, se μ^* for uma medida que estenda ψ a $\mathcal{B}$ e se Θ^* for a restrição de μ^* à classe $\mathcal{C}$, então primeiro o estudo feito na secção n.º 34 mostra que 61) vale com Θ^*, em lugar de Θ, depois a relação *a)* do enunciado e a definição da função Θ mostram que Θ^* se identifica com Θ e, por fim a proposição XX mostra que μ^* se identifica com μ. Concluimos que *a medida designada por* μ *é a única medida que estende* ψ *a* $\mathcal{B}$, ficando assim completada a demonstração de XXV.

Observação. A construção efectiva da medida μ de XXV a partir da função ψ faz-se, igualando primeiro o segundo membro de 61′) (com F em lugar de T) à função Θ e identificando depois o segundo membro de *a)* do enunciado de XX com a medida μ.

* * *

Fechamos esta secção com uma proposição que estabelece o nexo entre produtos (ordinários) de funções medidoras e produtos de medidas definidos em corpos de Borel com um número finito de dimensões.

XXVI) «Façam-se corresponder a cada número natural $n \leqq N$, com $N > 1$, uma variável real finita u_n e um número real c_n finito ou igual a $+\infty$ ou ainda igual a $-\infty$, escolham-se arbitràriamente números naturais $N', N'' > N', \ldots, N$ e suponha-se que $F'_{c_1,\ldots,c_{N'}}, F''_{c_{N'+1},\ldots,c_{N''}}, \ldots$ são funções medidoras, a primeira associada aos números $c_1, \ldots, c_{N'}$, a segunda associada aos números $c_{N'+1}, \ldots, c_{N''}$, etc. Então, a função $F_{c_1,\ldots,c_N}$ definida, para quaisquer valores das variáveis u_n, pela relação

$$a)\quad F_{c_1,\ldots,c_N}(u_1, \ldots, u_N) =$$
$$= F'_{c_1,\ldots,c_{N'}}(u_1, \ldots, u_{N'}) \cdot F''_{c_{N'+1},\ldots,c_{N''}}(u_{N'+1}, \ldots, u_{N''}) \ldots$$

sai uma função medidora associada aos números $c_1, \ldots, c_N$. Além disso, as (únicas) medidas μ, μ', μ'', etc. determinadas pelo primeiro membro de *a)* e por cada um dos factores do segundo membro de *a)* resultam todas finitas-σ e são tais que μ se identifica com o (único) produto de μ', μ'', etc.»

Demonstração de XXVI. Escrevamos a relação *a)* do enunciado sob a forma

$$a')\quad \psi\Big(\prod_{1\leq n\leq N}\{\inf(c_n,u_n)\leq x_n<\sup(c_n,u_n)\}\Big)=$$
$$=\psi'\Big(\prod_{1\leq n\leq N'}\{\inf(c_n,u_n)\leq x_n<\sup(c_n,u_n)\}\Big)\cdot$$
$$\cdot\,\psi''\Big(\prod_{N'+1\leq n\leq N''}\{\inf(c_n,u_n)\leq x_n<\sup(c_n,u_n)\}\Big)\cdots,$$

onde deve substituir-se a desigualdade $\inf(c_n,u_n)\leq x_n$ por $-\infty<x_n$, caso se tenha $c_n=-\infty$. Nesta conformidade: Primeiro, a proposição XXV esclarece que o primeiro (segundo, etc.) factor do segundo membro de *a')*, por hipótese finito, admite uma e só uma extensão a uma medida μ' (μ'', etc.) definida no corpo de Borel correspondente $\mathcal{B}'$ ($\mathcal{B}''$, etc.), a qual sai finita-σ; depois, a proposição XIII e (eventualmente) a associatividade da multiplicação de corpos de Borel, esta assegurada por N XXVI, mostram que existe um e só um produto μ das medidas μ', μ'', etc., o qual sai também finito-σ e se encontra definido no corpo de Borel a N dimensões, seja $\mathcal{B}$; em seguida, a proposição XXIV prova que o primeiro membro de *a)* resulta uma função medidora associada aos números $c_1,\ldots,c_N$; por fim, a proposição XXV identifica μ com a única extensão do primeiro membro de *a')* a uma medida definida em $\mathcal{B}$. Está pois terminada a nossa demonstração.

Observação. A proposição XXVI pode adaptar-se ao caso em que as variáveis de F', F'', etc. não se sucedem pela ordem natural, recorrendo-se, para o efeito, à correspondência biunívoca existente entre o espaço real X a N dimensões e o espaço que resulta de X por uma permutação das coordenadas (do ponto genérico) convenientemente escolhida.

36. A marginação de medidas definidas em espaços de Borel com um número finito de dimensões. Consideremos o espaço de medida $[X(x),\mathcal{B}(B),\mu(B)]$, onde $[X(x),\mathcal{B}(B)]$ significa o produto das N rectas de Borel $[X_n(x_n),\mathcal{B}_n(B_n)]$ $(n=1,2,\ldots,N)$, tomemos uma colecção não-vazia formada por inteiros positivos $r,s>r,t>s,\ldots$, tais que o seu número seja inferior a N e o valor de qualquer um deles não exceda N, e designemos

por $[X'(x'), \mathscr{B}'(B')]$ o produto dos factores $[X_n(x_n), \mathscr{B}_n(B_n)]$ para os quais o índice n assume um dos valores $r, s, t, \ldots$. Então, seja qual for o número finito $P>0$, a proposição N XXVII'' e a relação 37) mostram que a medida marginal de μ no espaço X' de valor prefixado igual a $\mu(X)/P$ é uma função ${}_P\mu'(B')$ definida pela fórmula

66) $${}_P\mu'(B') = \mu(\tilde{B})/P,$$

na qual, dado B', o símbolo $\tilde{B}$ representa o conjunto B especial que é o cilindro de base B' e de geratrizes paralelas às rectas reais X_n com índices n diferentes de cada um dos inteiros $r, s, t, \ldots$.

* * *

A fórmula 66) estabelece a passagem directa da medida inicial μ para a medida marginal ${}_P\mu'$. Todavia, pode pensar-se numa ligação indirecta, a instituir entre a restrição de μ à subclasse principal de $\mathscr{B}$ e a restrição de ${}_P\mu'$ à subclasse principal de $\mathscr{B}'$. Eis o motivo porque enunciamos a proposição seguinte.

XXVII) «Considere-se o espaço de Borel $[X(x), \mathscr{B}(B)]$ igual ao produto das $N>1$ rectas de Borel $[X_n(x_n), \mathscr{B}_n(B_n)]$ $(n=1, 2, \ldots, N)$, represente-se por $\prod_{1 \leq n \leq N} \{a_n \leq x_n < b_n\}$ o conjunto genérico da classe $\mathscr{C}$ igual à subclasse principal de $\mathscr{B}$, suponha-se que Θ é uma função aferidora definida em $\mathscr{C}$, parcialmente aditiva-σ e quase-contínua no intervalo vazio, escolha-se um número finito $P>0$, reparta-se a colecção dos valores n possíveis por duas colecções parciais não-vazias, a primeira de elementos $h, i>h, j>i, \ldots$ e a outra de elementos $r, s>r, t>s, \ldots$ e faça-se $X''=X_h \times X_i \times X_j \times \cdots$ e $\mathscr{B}'=\mathscr{B}_r \times \mathscr{B}_s \times \mathscr{B}_t \times \cdots$. Então, a função ${}_P\Theta'$ definida na classe $\mathscr{C}'$, igual à subclasse principal de $\mathscr{B}'$, pela relação

$$a)\quad P \cdot {}_P\Theta'\Big(\prod_{n=r,s,t,\ldots} \{a_n \leq x_n < b_n\}\Big) =$$
$$= \lim_{a_h, a_i, a_j, \ldots, -b_h, -b_i, -b_j, \ldots \downarrow -\infty} \Theta\Big(\prod_{1 \leq n \leq N} \{a_n \leq x_n < b_n\}\Big)$$

Nota — A última linha da página anterior deve ler-se

$$= \lim_{a_h, a_i, \ldots, -b_h, -b_i, \ldots \downarrow -\infty;\; a_h = a_i = \cdots = -b_h = -b_i = \cdots} \Theta\Big(\prod_{1 \leqq n \leqq N} \{a_n \leqq x_n < b_n\}\Big),$$

sai aferidora parcialmente aditiva-σ em $\mathscr{C}'$ e quase-contínua no intervalo vazio e sai também a restrição a $\mathscr{C}'$ de toda a medida que possa obter-se marginando, com respeito ao espaço X'' e ao factor de escala P, qualquer extensão de Θ a uma medida definida em $\mathscr{B}$.

Em complemento, se a função ${}_P\Theta'$ se apresentar finita-σ, existe uma única medida que estende ${}_P\Theta'$ a $\mathscr{B}'$, a qual resulta finita-σ e é dada pela relação *a)* de XX (devidamente adaptada). Finalmente, para que a função ${}_P\Theta'$ saia finita-σ, é necessário [suficiente] que seja finita-σ [finita] alguma extensão de Θ a uma medida definida em $\mathscr{B}$.»

Demonstração de XXVII. Seja qual for a extensão de Θ a uma medida μ definida em $\mathscr{B}$ e sejam quais forem os números a_n e $b_n \geqq a_n$ de índices $r, s, t, \ldots$, a fórmula 66) e a parte de II relativa à continuidade inferior dão a igualdade

$$P \cdot {}_P\mu'\Big(\prod_{n=r,s,t,\ldots} \{a_n \leqq x_n < b_n\}\Big) =$$

$$= \lim_{a_h, a_i, \ldots, -b_h, -b_i, \ldots \downarrow -\infty;\; a_h = a_i = \cdots = -b_h = -b_i = \cdots} \mu\Big(\prod_{1 \leqq n \leqq N} \{a_n \leqq x_n < b_n\}\Big),$$

a qual prova, juntamente com a relação *a)* do enunciado, que a função ${}_P\Theta'$ é a restrição da medida marginal ${}_P\mu'$ à classe $\mathscr{C}'$. Este facto e a proposição XIX forçam ${}_P\Theta'$ a ser uma função aferidora parcialmente aditiva-σ em $\mathscr{C}'$ e quase-contínua no intervalo vazio. Portanto, está demonstrada a parte principal de XXVII e só falta tratar da parte complementar.

Representemos por ${}_P\nu'$ a medida maximal que estende ${}_P\Theta'$ a $\mathscr{B}'$, a qual é comparativamente fácil de construir pelo processo indicado em XX. Também a proposição XX mostra que nenhuma das duas funções ${}_P\Theta'$ e ${}_P\nu'$ pode ser finita-σ sem que a outra o seja e mostra ainda que a hipótese da finititude-σ de ${}_Pr'$ obriga esta medida a coincidir com ${}_P\mu'$. Finalmente, o último período de XXVII resulta dos factos expostos e da proposição XII.

Vimos, na parte complementar de XXVII, que as medidas ${}_P\mu'$ e ${}_Pr'$ coincidem se a função ${}_P\Theta'$ for finita-σ e vamos ver agora, através de exemplos, que as relações entre ${}_P\mu'$ e ${}_Pr'$ se tornam um tanto imprevisíveis se a função ${}_P\Theta'$ for infinita-σ.

Exemplo 50. Consideremos o espaço de Borel a duas dimensões, designemos por B_0 o conjunto de Borel formado pelos pontos (x_1, x_2) tais que $x_1 = x_2$ e x_1 tem valor racional e tomemos a medida $\mu(B)$ que atribui a qualquer conjunto de Borel plano B um valor igual ao número de pontos situados em $B \cap B_0$. Embora a medida μ seja finita-σ [veja-se a alínea *c)* de N XXXV], a sua restrição à subclasse principal $\mathcal{C}$ do corpo de Borel plano $\mathcal{B}$ sai uma função Θ infinita-σ, a qual toma o valor $+\infty$ ou 0 num conjunto de $\mathcal{C}$, conforme este abranger ou deixar de abranger pontos tais que $x_1 = x_2$. Se escolhermos agora $P=2$, $h=2$ e $r=1$, então, por um lado, a medida marginal ${}_2\mu'$ resulta finita-σ, porque ela atribui a qualquer $B' \in \mathcal{B}'$ um valor igual à metade do número dos seus elementos racionais, e, por outro lado, a função ${}_2\Theta'$ torna-se infinita para qualquer argumento não-vazio, quer dizer, infinita-σ dum modo especial, sucedendo o mesmo à medida maximal ${}_2r'$. A diferença entre as duas medidas ${}_2\mu'$ e ${}_2r'$ desaparece, porém, se passarmos a interpretar a letra μ como representativa da medida maximal que estende a função Θ do texto ao corpo $\mathcal{B}$, pois neste caso sai $\mu(B) = +\infty$ para qualquer B que compreenda pontos sujeitos à igualdade $x_1 = x_2$.(*)

Exemplo 51. Designemos por μ a medida maximal que estende ao corpo de Borel plano $\mathcal{B}$ a função Θ definida em $\mathcal{C}$

(*) Talvez valha a pena notar que a nova medida μ atribui o valor zero ao conjunto de Borel caracterizado pela relação $x_1 - x_2 \neq 0$ (que é o conjunto $R' + R''$ do exemplo 32), isto por causa da relação *a)* do enunciado de XX e das propriedades da função Θ.

(subclasse principal de $\mathscr{B}$) como segue: Dado $C \in \mathscr{C}$, sai $\Theta(C)$ igual a $+\infty$ ou a 0, conforme C compreender ou deixar de compreender algum ponto de coordenadas x_1 e x_2 tais que $|x_1 x_2| \geqq 1$. Então, a medida μ considerada não só sai infinita-σ (veja-se XX), como também atribui o valor 0 ao conjunto $\{x_1 = 0\} \times \{-\infty < x_2 < +\infty\}$, conforme pode ver-se escolhendo, em *a)* do enunciado de XX, os conjuntos $C_m = \{-1/m \leqq x_1 < 1/m\} \times \times \{-m/2 \leqq x_2 < m/2\}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$. Se fizermos agora $P = 1$, $h = 2$ e $r = 1$, então, por um lado, a medida marginal ${}_1\mu'$ resulta infinita-σ (veja-se XII) e atribui o valor zero ao conjunto $\{x_1 = 0\}$ e, por outro lado, a função ${}_1\Theta'$ resulta infinita para qualquer argumento não-vazio, quer dizer, infinita-σ dum modo especial, sucedendo o mesmo à medida maximal ${}_1\nu'$. Logo temos ${}_1\mu'(\{x_1 = 0\}) = 0 \neq \infty = {}_1\nu'(\{x_1 = 0\})$, donde concluímos que a medida maximal que estende ${}_P\Theta'$ a $\mathscr{B}'$ escusa de coincidir com a medida marginal ${}_P\mu'$, mesmo que a medida marginada μ seja a medida maximal que estende Θ a $\mathscr{B}$.

* * *

Mencionámos, na última parte da demonstração de XXVII, que a hipótese duma função ${}_P\Theta'$ finita-σ permite estabelecer a ligação entre as medidas μ e ${}_P\mu'$, com certa facilidade, por intermédio da relação *a)* de XXVII, como quem diz, por intermédio das restrições de cada uma dessas medidas à subclasse principal do seu corpo de Borel. Obviamente, a ligação referida simplificar-se-ia ainda mais se pudesse ser introduzida através do par das funções medidoras que a relação *a)* de XXIV faz corresponder ao par de medidas considerado. Daí o interesse que oferece a proposição seguinte.

XXVIII) «Tomem-se um número finito $P > 0$, as rectas de Borel $(X_n, \mathscr{B}_n)$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$ e N números reais c_n, qualquer deles finito ou igual a $+\infty$ ou igual a $-\infty$, considere-se uma função $F_{c_1, c_2, \ldots, c_N}$ das N variáveis reais finitas u_n que seja medidora associada aos números c_n e reparta-se a colecção dos valores n possíveis por duas colecções parciais não-vazias, a primeira de elementos g iguais a $h, i > h, j > i, \ldots$

e a outra de elementos q iguais a $r, s>r, t>s, \ldots$. Além disso, façam-se corresponder a cada g os números $\eta_{g,1}=-\infty$ e $\eta_{g,2}=+\infty$ e uma variável natural p_g e escreva-se a igualdade entre funções

$$a) \quad P \cdot {}_P F'_{c_r, c_s, c_t, \ldots}(u_r, u_s, u_t, \ldots) =$$

$$= \sum_{1 \leqq p_h, p_i, \ldots \leqq 2}' \lim_{u_h \to \eta_{h, p_h}, u_i \to \eta_{i, p_i}, \ldots; |u_h| = |u_i| = \ldots} F_{c_1, \ldots, c_N}(u_1, \ldots, u_N),$$

onde vale a seguinte convenção relativa ao símbolo de somatório Σ': Caso haja parcelas tais que $c_g = \eta_{g, p_g}$, para certos valores de g, cada uma dessas parcelas deve substituir-se pelo número zero.

Nestes termos, se μ for a (única) medida compatível, no produto dos corpos $\mathscr{B}_n$, com a função medidora considerada, então a função ${}_P F'_{c_r, c_s, c_t, \ldots}$, definida por *a)*, não só pode igualar-se a uma certa restrição da medida ${}_P\mu'$ que resulta da marginação de μ com respeito ao produto dos espaços X_g e ao factor de escala P, como também essa função sai infinita, no caso de ${}_P\mu'$ deixar de determinar uma função medidora associada aos números c_q, e sai finita e igual à função medidora associada aos números c_q e determinada por ${}_P\mu'$, no caso oposto, no qual ${}_P\mu'$ é uma medida finita-σ e a única medida compatível, no produto dos corpos $\mathscr{B}_q$, com a função definida por *a)*.»

Demonstração de XXVIII. Claro que a (única) medida μ referida no enunciado existe (e é finita-σ), isto em virtude de XXV. Então, sejam quais forem os valores atribuidos às variáveis u_q, basta ter em vista a parte de II relativa à continuidade inferior ou, eventualmente, a propriedade $\mu(O)=0$ para reconhecer que a parcela genérica do segundo membro da relação *a)* supracitada sai igual a $\mu(Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_N)$, onde, dado q, o símbolo Y_q tem um significado independente dos índices p_g, a saber o intervalo linear $\{-\infty < x_q < u_q\}$ ou $\{c_q \leqq x_q < u_q\}$ ou $\{u_q \leqq x_q < c_q\}$, conforme for $c_q = -\infty$ ou $-\infty < c_q < u_q$ ou $u_q \leqq c_q$, e onde, dado g, a hipótese $p_g = 1$ identifica Y_g com $\{-\infty < x_g < c_g\}$ e a hipótese $p_g = 2$ identifica Y_g

com $\{-\infty < x_g < +\infty\}$ ou com $\{c_g \leqq x_g < +\infty\}$, conforme for $c_g = -\infty$ ou $c_g > -\infty$. Logo a propriedade aditiva das medidas, a igualdade 8') (adaptada) e a relação 66) mostram que o primeiro membro de *a)* vale P vezes a restrição da medida ${}_P\mu'$ aos produtos de conjuntos Y_q do tipo mencionado. Portanto, a proposição XXIV prova que o segundo factor de *a)* sai infinito, no caso de ${}_P\mu'$ deixar de determinar uma função medidora associada aos números c_q, e sai finito e igual à função medidora associada aos números c_q e determinada por ${}_P\mu'$, no caso oposto. Finalmente, se a função definida por *a)* for medidora, a proposição XXV esclarece que a função não pode provir duma medida diferente de ${}_P\mu'$ e que ${}_P\mu'$ não pode deixar de ser uma medida finita-σ. Fica assim completada a nossa demonstração.

Observação. Caso cada um dos números c_g seja infinito com sinal qualificado, a relação *a)* do enunciado de XXVIII simplifica-se para

$$P \cdot {}_PF'_{c_r, c_s, c_t, \ldots}(u_r, u_s, u_t, \ldots) =$$

$$= \lim_{u_h \to -c_h,\, u_i \to -c_i,\, u_j \to -c_j,\, \ldots;\, |u_h| = |u_i| = |u_j| = \ldots} F_{c_1, c_2, \ldots, c_N}(u_1, u_2, \ldots, u_N).$$

A demonstração de XXVIII pode adaptar-se por forma que dê a proposição seguinte.

XXVIII') «Seja μ a (única) medida, definida no produto das N rectas de Borel $(X_n, \mathcal{B}_n)$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$, da qual provém a função medidora $F_{c_1, c_2, \ldots, c_N}(u_1, u_2, \ldots, u_N)$ associada aos números c_n. Então, se fizermos corresponder a cada n os números $\gamma_{n,1} = -\infty$ e $\gamma_{n,2} = +\infty$ e uma variável natural p_n, obtemos a igualdade

$$a) \qquad \mu\Big(\prod_{1 \leqq n \leqq N} X_n\Big) =$$

$$= \sum_{1 \leqq p_1, \ldots, p_N \leqq 2}{}' \lim_{u_1 \to \gamma_{1, p_1}, \ldots, u_N \to \gamma_{N, p_N};\, |u_1| = \ldots = |u_N|} F_{c_1, \ldots, c_N}(u_1, \ldots, u_N),$$

onde vale a seguinte convenção relativa ao símbolo de somatório Σ': Caso haja parcelas tais que $c_n = r_{n, p_n}$, para certos valores de n, devemos substituir cada uma dessas parcelas pelo número zero.»

Demonstração de XXVIII'. A parte de II relativa à continuidade inferior ou, eventualmente, a propriedade $\mu(O)=0$ permite reconhecer que a parcela genérica do segundo membro de *a)* sai igual a $\mu(Y_1 \times Y_2 \times \cdots \times Y_N)$, onde se diz para cada n o mesmo que se dizia para cada g na demonstração de XXVIII. Logo a propriedade aditiva das medidas e a igualdade 8') provam que o segundo membro de *a)* coincide com $\mu(\prod\limits_n X_n)$, ficando assim demonstrada a nossa tese.

Observação. Caso cada um dos números c_n seja infinito com sinal qualificado, a relação *a)* do enunciado de XXVIII' simplifica-se para

$$\mu(\prod_{1 \leqq n \leqq N} X_n) = \lim_{u_1 \to -c_1, \ldots, u_N \to -c_N ; |u_1| = \ldots = |u_N|} F_{c_1, \ldots, c_N}(u_1, \ldots, u_N).$$

Terminamos esta secção com um exemplo.

Exemplo 52. Suponha-se $P = N = 2$ e $c_1 = c_2 = -2$ e tome-se a função medidora $F_{-2,-2}(u_1, u_2)$ que é igual a u_2 se u_1 e u_2 forem ambos positivos e que é igual a 0 nos demais casos. Então, a função ${}_2F'_{-2}(u_1)$ não é medidora, porque $\lim\limits_{u_2 \to +\infty} F_{-2,-2}(u_1, u_2) = +\infty$ para qualquer $u_1 > 0$. Existe, porém, a função medidora ${}_2F'_{-2}(u_2)$, a qual sai igual a 0 ou a u_2, conforme for $u_2 \leqq 0$ ou $u_2 > 0$. Finalmente, o valor de $\mu(X_1 \times X_2)$ calcula-se em $+\infty$.

37. Limites e continuidade das funções medidoras. A definição de função medidora associada a certos números declara que tal função é, em toda a parte, semicontínua do lado esquerdo com respeito a cada uma das suas variáveis. Esta secção destina-se a resolver outros problemas de limite e de continuidade relacionados com funções medidoras.

Para começar, apresentamos a proposição seguinte.

XXIX) «Considerem-se as N variáveis reais finitas $u_n (n=1, 2, \ldots, N)$, suponha-se que $F_{c_1, c_2, \ldots, c_N}(u_1, u_2, \ldots, u_N)$ é uma função medidora associada aos números $c_1, c_2, \ldots, c_N$, qualquer deles finito ou igual a $+\infty$ ou ainda igual a $-\infty$, e designe-se por μ a (única) medida definida, no produto das N rectas de Borel $[X_n(x_n), \mathcal{B}_n(B_n)]$, pela relação

$$a) \qquad F_{c_1, c_2, \ldots, c_N}(u_1, u_2, \ldots, u_N) = \mu\left(\prod_{1 \leqq n \leqq N} \{i_n \leqq x_n < s_n\} \right),$$

onde, dado n, vale $i_n = \inf(c_n, u_n)$ e $s_n = \sup(c_n, u_n)$ e onde deve substituir-se a desigualdade $i_n \leqq x_n$ por $-\infty < x_n$, caso se tenha $c_n = -\infty$. Então, seja qual for o inteiro m tal que $1 \leqq m \leqq N$ e sejam quais forem os valores atribuidos às variáveis u_n, a hipótese de a grandeza *positiva* ε_m tender para zero implica que o módulo da diferença

$$F_{c_1, c_2, \ldots, c_N}(\ldots, u_{m-1}, u_m + \varepsilon_m, u_{m+1}, \ldots) - F_{c_1, c_2, \ldots, c_N}(\ldots, u_{m-1}, u_m, u_{m+1}, \ldots)$$

tenda para

$$\mu(\ldots \times \{i_{m-1} \leqq x_{m-1} < s_{m-1}\} \times \{x_m = u_m\} \times \{i_{m+1} \leqq x_{m+1} < s_{m+1}\} \times \ldots).»$$

Demonstração de XXIX. Comecemos por notar que a relação *a)* define, de facto, uma e só uma medida μ no espaço de Borel a N dimensões (isto por causa de XXV) e que a diferença do enunciado tem um limite não-negativo ou não-positivo, conforme for $u_m \geqq c_m$ ou $u_m < c_m$ (atenda-se a XXIII). Se $u_m \geqq c_m$, prova-se a tese, substituindo primeiro os termos da diferença do enunciado pelas suas expressões em μ [dadas por *a)*], igualando depois a diferença das medidas à medida da diferença [veja-se *b)* de N XXXIII] e recorrendo, por fim, à parte de II relativa à continuidade superior. Se $u_m < c_m$, prova-se a tese, multiplicando primeiro por -1 a diferença do enunciado e procedendo depois, com a nova diferença assim obtida, do modo já explicado a propósito do caso $u_m \geqq c_m$. Fica assim completada a demonstração de XXIX.

A função medidora de XXIX, além de ser semicontínua do lado esquerdo na variável número m, é também não-decrescente com respeito ao número c_m. Portanto, uma vez escolhidos os valores de m e das grandezas u_n, o limite do módulo da diferença referida na parte final do enunciado de XXIX é a diferença entre os limites máximo e mínimo da função medidora, ambos tomados com respeito à variável número m, ou, a mesma coisa dita por outras palavras, é o *salto da função medidora com respeito à variável número m*, o qual sai nulo ou positivo, conforme a função for contínua ou descontínua na variável número m. Daí uma variante de XXIX, a saber:

XXIX') «Retomemos a função medidora da proposição XXIX e a medida μ que lhe corresponde pela relação *a)* respectiva. Então, sejam quais forem os valores do inteiro m e das grandezas u_n, a função medidora considerada não só admite um salto com respeito à variável número m igual a

$$\mu(\ldots\times\{i_{m-1}\leq x_{m-1}<s_{m-1}\}\times\{u_m\}\times\{i_{m+1}\leq x_{m+1}<s_{m+1}\}\times\ldots),$$

como também sai contínua na variável número m, quando e só quando for nulo o valor de μ aqui citado (coisa esta que sucede certamente na hipótese $u_n=c_n$, para algum $n\neq m$).»

Observação. Façamos $N=1$ em XXIX e XXIX' e simplifiquemos a notação, suprimindo o índice $n=1$. Então, seja qual for o valor atribuido à variável u, não só o salto $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}|F_c(u+\varepsilon)-F_c(u)|$ resulta igual a $\mu(\{u\})$, como também a função F_c sai contínua no ponto u, quando e só quando for $\mu(\{u\})=0$. Guardamos, para a proposição XXXII, a prova de que o conjunto dos pontos de descontinuidade de F_c é finito ou, quando muito, numerável.

Quando se trabalha num espaço de Borel com um número de dimensões superior a 1, não deixa de ter interesse o corolário da proposição XXIX' que passamos a enunciar.

XXIX'') «Retomemos a função medidora da proposição XXIX e suponhamos que $N>1$. Então, sejam quais forem os valores do inteiro m e da grandeza u_m, a hipótese de a função medidora se apresentar contínua [descontínua] na variável número m para certos valores u_n das variáveis de índice $n\neq m$

implica que ela saia também contínua [descontínua] na variável número m para quaisquer valores u'_n das variáveis de índice $n \neq m$ tais que cada u'_n $[u_n]$ fique situado entre c_n e u_n $[c_n$ e $u'_n]$.»

Demonstração de XXIX''. A nossa tese é uma consequência imediata da proposição XXIX' e da alínea *b)* de N XXXIII.

Segue um exemplo especialmente escolhido para assinalar a necessidade de levar mais longe o estudo de continuidade aqui encetado.

Exemplo 53. Escolham-se o espaço de Borel $(X, \mathcal{B})$ a $N=3$ dimensões, os três números $c_1=c_2=c_3=-\infty$ e a medida μ que atribui o valor 1 ao conjunto elementar $\{(0, 0, 0)\}$ e o valor 0 ao seu complementar. Corresponde a função medidora $F_{-\infty,-\infty,-\infty}(u_1, u_2, u_3)$ que é igual a 1 para u_1, u_2 e u_3 conjuntamente positivos e que é igual a 0 nos demais casos. Esta função sai contínua na variável número m $(m=1, 2, 3)$, salvo se $u_m=0$ e, simultâneamente, $u_n>0$ para $n \neq m$. Note-se que a hipótese $u_1=u_2=u_3=0$ torna a função *descontínua na totalidade das suas variáveis* e *contínua em cada uma das suas variáveis* (e *até em cada par de variáveis).*

* * *

As conclusões até agora alcançadas nesta secção dizem respeito a problemas de limite e de continuidade de funções medidoras, no caso particular de se tomar uma variável de cada vez. O caso geral trata-se por processos semelhantes aos anteriormente usados, saindo as contas e os resultados um nadinha mais complicados na hipótese de se tomar mais de uma variável de cada vez, isto porque deixamos de dispor dum conceito óbvio de salto local com respeito à totalidade das variáveis consideradas.

Passamos a enunciar a proposição principal relativa ao assunto que presentemente nos preocupa.

XXX) «Retomemos a função medidora da proposição XXIX, no caso $N>1$, e a medida μ que lhe corresponde pela relação *a)* respectiva. Então, sejam quais forem os valores atribuidos às grandezas u_n, a função medidora considerada sai contínua na totalidade das suas variáveis, quando e só quando μ confere o valor zero ao conjunto $\bigcup_{1\leqq m\leqq N}(\prod_{1\leqq n\leqq N} I_{m,n})$, onde, dado m, o símbolo $I_{m,m}$ significa o conjunto elementar $\{u_m\}$ e cada símbolo $I_{m,n}$ de segundo índice $n\neq m$ significa o conjunto $\{u_n \leqq x_n < c_n\}$ se $u_n < c_n$, o conjunto $\{c_n \leqq x_n \leqq u_n\}$ se $u_n \geqq c_n > -\infty$ e o conjunto $\{-\infty < x_n \leqq u_n\}$ se $c_n = -\infty$.»

Demonstração de XXX. Designemos por U a união de intervalos a N dimensões referida no enunciado e comecemos por provar que a condição $\mu(U)=0$ é necessária para que a função medidora em causa possa sair contínua na totalidade das suas variáveis.

Escolhidos quaisquer valores para as grandezas u_n, considerem-se pares de pontos $u'=(u'_1,\ldots,u'_N)$ e $u''=(u''_1,\ldots,u''_N)$ tais que $c_n<u''_n<u_n<u'_n$ ou $c_n=u''_n=u_n<u'_n$ ou $u'_n<u_n<u''_n<c_n$, conforme for $c_n<u_n$ ou $c_n=u_n$ ou $c_n>u_n$, e faça-se $i'_n=\inf(c_n, u'_n)$, $s'_n=\sup(c_n, u'_n)$, $i''_n=\inf(c_n, u''_n)$ e $s''_n=\sup(c_n, u''_n)$, para cada n. Então, a relação *a)* de XXIX e a alínea *b)* de N XXXIII permitem escrever a desigualdade

$$F_{c_1,\ldots,c_N}(u'_1,\ldots,u'_N)-F_{c_1,\ldots,c_N}(u''_1,\ldots,u''_N)=$$
$$=\mu([\prod_{1\leqq n\leqq N}\{i'_n\leqq x_n<s'_n\}]-[\prod_{1\leqq n\leqq N}\{i''_n\leqq x_n<s''_n\}])\geqq\mu(U),^{(*)}$$

onde o sinal $\geqq$ se deve ao facto de a diferença dos dois produtos escritos ser um sobreconjunto de U, isto porque o seu diminuendo contém todas as parcelas de U e o seu diminuidor não inclui nenhum ponto com alguma coordenada x_n igual a u_n. Como cada um dos pontos u' e u'' pode aproximar-se do ponto $(u_1,\ldots,u_N)$ tanto quanto se queira, concluimos que a função $F_{c_1,\ldots,c_N}$ sai descontínua com respeito à totalidade das suas variáveis em qualquer ponto que torne $\mu(U)>0$.

(*) Caso se tenha $c_n=-\infty$, deve corrigir-se qualquer desigualdade $-\infty\leqslant x_n$ para $-\infty<x_n$.

Posto isso, vamos provar que a condição $\mu(U)=0$ é suficiente para que a função medidora referida no enunciado saia contínua na totalidade das suas variáveis.

Fixados de qualquer modo os valores das grandezas u_n, consideremos grandezas positivas p_n e grandezas reais h_n, ambas arbitrárias no caso $u_n = c_n$ e tais que $|h_n| + p_n < \newline < |u_n - c_n|$ no caso $|u_n - c_n| > 0$, estabeleçamos a convenção $|h_n| + p_n = q_n$ para cada n, ponhamos $u'_n = u_n + q_n$ se $u_n > c_n$ ou se $u_n - c_n = 0 \leqq h_n$ e $u'_n = u_n - q_n$ se $u_n < c_n$ ou se $u_n - c_n = 0 > h_n$, igualemos u''_n a $u_n - q_n$ ou a $u_n + q_n$ ou a u_n, conforme for $u_n > c_n$ ou $u_n < c_n$ ou $u_n = c_n$, atribuamos aos símbolos i'_n, s'_n, i''_n e s''_n os significados formais acima explicados e façamos coincidir primeiro S'_n com $s'_n + q_n$ ou com s'_n, conforme tivermos ou deixarmos de ter a relação $u_n - c_n = 0 > h_n$, e depois I'_n com $i'_n - q_n$ ou com i'_n, conforme tivermos ou deixarmos de ter a relação $u_n - c_n = 0 \leqq h_n$. Nesta conformidade, as propriedades das funções medidoras afirmadas em XXIII, a relação *a)* de XXIX, a alínea *b)* de N XXXIII, a relação de inclusão entre os membros extremos de 9), as N igualdades óbvias

$$\{I'_n \leqq x_n < S'_n\} - \{i''_n \leqq x_n < s''_n\} = \{u_n - q_n \leqq x_n < u_n + q_n\}$$

e a alínea *d)* de N XXXIII, tudo isso permite escrever a sucessão de desigualdades

$$\begin{aligned}
67) \qquad & |F_{c_1, c_2, \ldots, c_N}(u_1+h_1, u_2+h_2, \ldots, u_n+h_n) - \\
& - F_{c_1, c_2, \ldots, c_N}(u_1, u_2, \ldots, u_N)| \leqq F_{c_1, c_2, \ldots, c_N}(u'_1, u'_2, \ldots, u'_N) - \\
& - F_{c_1, c_2, \ldots, c_N}(u''_1, u''_2, \ldots, u''_N) = \\
& = \mu([\prod_{1 \leqq n \leqq N} \{i'_n \leqq x_n < s'_n\}] - [\prod_{1 \leqq n \leqq N} \{i''_n \leqq x_n < s''_n\}]) \leqq \\
& \leqq \mu([\prod_{1 \leqq n \leqq N} \{I'_n \leqq x_n < S'_n\}] - [\prod_{1 \leqq n \leqq N} \{i''_n \leqq x_n < s''_n\}]) \leqq \\
& \leqq \sum_{1 \leqq m \leqq N} \mu(\ldots \times \{I'_{m-1} \leqq x_{m-1} < S'_{m-1}\} \times \quad \textit{(continua)} \\
& \times \{u_m - q_m \leqq x_m < u_m + q_m\} \times \{I'_{m+1} \leqq x_{m+1} < S'_{m+1}\} \times \ldots),^{(*)}
\end{aligned}$$

(*) Caso se tenha $c_n = -\infty$, deve corrigir-se qualquer desigualdade $-\infty \leqslant x_n$ para $-\infty < x_n$.

onde o argumento de μ na parcela genérica do último membro é um produto $J_m = \prod_{1 \leq n \leq N} J_{m,n}$ que é sobreconjunto do produto $\prod_{1 \leq n \leq N} I_{m,n} = I_m$, quer dizer, da parcela de índice m de U, e onde $\mu(J_m) < +\infty$ para qualquer m, conforme pode ver-se decompondo cada factor $J_{m,n}$ na soma ou diferença de dois intervalos lineares emergentes de c_n (um dos quais sai vazio para $n \neq m$ e $c_n \neq u_n$) e desenvolvendo, em seguida, $\mu(J_m)$ numa soma algébrica de valores da função $F_{c_1, \ldots, c_N}$ segundo o processo usado a propósito de 61). Ora bem, se cada uma das N grandezas q_n tender monòtonamente para zero ao longo duma sucessão *arbitrária*, formada por números $q_{n,r}$ $(r = 1, 2, 3, \ldots)$, e se, dado r, designarmos por $J_{m,r}$ o conjunto J_m especial correspondente aos números $q_{n,r}$, então, por um lado, a proposição N VI dá $I_m \subset J_{m,r} \downarrow$ e, por outro lado, a igualdade 10) conduz a $\bigcap_{1 \leq r < +\infty} J_{m,r} = I_m$. Nesta conformidade, caso $q_n \longrightarrow 0$ para cada n, a parte de II referente à continuidade superior, as N relações $I_m \subset U$ e a hipótese $\mu(U) = 0$ impõem o resultado $\sum_{1 \leq m \leq N} \mu(J_m) \longrightarrow \sum_{1 \leq m \leq N} \mu(I_m) = 0$. Portanto, a cada número $\varepsilon > 0$ corresponde outro número $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que o primeiro membro de 67) fica menor do que ε quando $q_n < 2 . \delta(\varepsilon)$ para cada n e, com maioria de razão, quando $|h_n| < \delta(\varepsilon)$ para cada n. Fica assim terminada a demonstração de XXX.

Uma consequência fácil de XXX é o corolário seguinte.

XXX') «A função medidora da proposição XXX sai descontínua em qualquer ponto u (de coordenadas u_n) tal que a medida correspondente à função considerada atribua um valor positivo ao conjunto elementar $\{u\}$.»

Demonstração de XXX'. Usaremos os mesmos símbolos μ e U da demonstração de XXX. Então, a hipótese $\mu(\{u\}) > 0$, a relação óbvia $\{u\} \subset U$ e a alínea *b)* de N XXXIII implicam a desigualdade $\mu(U) > 0$ ou seja, por causa de XXX, a descontinuidade da função medidora no ponto u. Fica assim provada a nossa tese.

Sabemos, pela observação posta a seguir a XXIX', que, para $N=1$, não só transita a proposição XXX', como também colhe a sua inversa, a qual afirma a continuidade duma função medidora em u caso a medida correspondente atribua o valor zero a $\{u\}$. Erraríamos, porém, se pensássemos que a proposição inversa referida permanece verdadeira para $N>1$; nada melhor do que um exemplo para nos inteirarmos da situação.

Exemplo 54. Tomemos o número de dimensões $N=2$, os dois números $c_1=c_2=-\infty$ e a função medidora $F_{-\infty,-\infty}(u_1, u_2)$ que é igual a 0 em qualquer dos casos $u_1\leqq 0$ e $u_2\leqq 0$, igual a u_1 no caso de termos, simultâneamente, $0<u_1\leqq 1$ e $u_2>0$ e igual a 1 no caso de termos, simultâneamente, $u_1>1$ e $u_2>0$. Por um lado, a função considerada sai contínua com respeito a u_1 em todo o plano de Borel; por outro lado, ela sai contínua com respeito a u_2 e com respeito ao par das suas variáveis em toda a parte, excepto nos pontos $(u_1, 0)$ tais que $u_1>0$. Note-se que o ponto de continuidade $(0,0)$ pode considerar-se um limite de pontos de descontinuidade e note-se ainda que a medida μ correspondente a $F_{-\infty,-\infty}$ atribui um valor positivo a todo o conjunto da forma $(\{u_1\}\times\{-\infty<x_2\leqq 0\})\cup(\{-\infty<x_1\leqq u_1\}\times\{0\})$, com $u_1>0$ (veja-se XXX). Finalmente, o propósito do nosso exemplo não deixa de cumprir-se, porque, se abreviarmos $F_{-\infty,-\infty}$ para F, qualquer ponto de descontinuidade $(u_1, 0)$ torna

$$\mu(\{(u_1, 0)\})=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\,[F(u_1+\varepsilon, \varepsilon)-F(u_1, \varepsilon)-F(u_1+\varepsilon, 0)+F(u_1, 0)]=0.$$

Vimos, a propósito do exemplo 53, que há casos em que um ponto torna uma função medidora contínua em cada uma das suas variáveis e descontínua na totalidade dessas variáveis. Daí o interesse que oferece a proposição seguinte.

XXXI) «Retomemos a função medidora da proposição XXIX, com $N>1$, consideremos a medida μ que lhe corresponde pela relação *a)* respectiva e escolhamos arbitràriamente um valor para cada u_n. Então, a função medidora sai contínua em cada uma das suas variáveis, quando e só quando μ

atribuir o valor zero ao conjunto $\bigcup_{1\leqq m\leqq N}(\prod_{1\leqq n\leqq N} H_{m,n})$, onde, dado m, o símbolo $H_{m,m}$ significa o conjunto elementar $\{u_m\}$ e todo o símbolo $H_{m,n}$ de segundo índice $n\neq m$ significa o conjunto $\{u_n\leqq x_n< c_n\}$ se $u_n< c_n$, o conjunto $\{c_n\leqq x_n< u_n\}$ se $u_n\geqq c_n>-\infty$ e o conjunto $\{-\infty< x_n< u_n\}$ se $c_n=-\infty$. Além disso, caso a função medidora seja contínua em cada uma das suas variáveis, ela sai contínua na totalidade das suas variáveis, se e só se μ atribuir o valor zero ao conjunto

$$[\bigcup_{1\leqq m\leqq N}(\prod_{1\leqq n\leqq N} I_{m,n})]-[\bigcup_{1\leqq m\leqq N}(\prod_{1\leqq n\leqq N} H_{m,n})],$$

onde, dado m, vale a igualdade $I_{m,n}=H_{m,n}\cup\{u_n\}$ para cada n.»

Demonstração de XXXI. Designemos por W a diferença de uniões do enunciado, por U o seu diminuendo e por V o seu diminuidor. Então, a igualdade $\mu(V)=0$ implica a continuidade da função medidora em cada uma das suas variáveis, isto por causa da alínea *b)* de N XXXIII e da segunda afirmação feita na tese de XXIX'. Inversamente, a continuidade da função medidora em cada uma das suas variáveis implica $\mu(V)=0$, isto por causa da proposição XXIX' e da alínea *d)* de N XXXIII. Fica assim provada a primeira parte da nossa tese.

Suponhamos agora que $\mu(V)=0$. Então, a relação óbvia $V\subset U$, devida a N VI, e a aplicação da alínea *b)* de N XXXIII à diferença $U-V$ dão a igualdade $\mu(W)=\mu(U)$. Por outro lado, a proposição XXX afirma que $\mu(U)=0$ é a condição necessária e suficiente para que a função medidora saia contínua na totalidade das suas variáveis. Em face do exposto, podemos dar por terminada a demonstração de XXXI.

Observação. Na hipótese $c_1=c_2=\cdots=c_N=+\infty$ resulta $H_{m,n}=I_{m,n}$ para todos os valores dos índices m e n e das grandezas u_n; quer dizer, neste caso uma função medidora associada aos números c_n sai contínua na totalidade das suas variáveis em qualquer ponto onde ela seja contínua em cada uma delas. Uma adaptação fácil dos cálculos aqui feitos mostra que o mesmo sucede na hipótese (frequentemente usada) $c_1 = c_2 = \cdots = c_N = -\infty$, *sob a condição de modificarmos a relação a) do enunciado de* XXIX *para*

$$F_{c_1, c_2, \ldots, c_N}(u_1, u_2, \ldots, u_N) = \mu\big(\prod_{1 \leq n \leq N} \{-\infty < x_n \leq u_n\}\big).$$

* * *

Vamos apresentar um estudo sobre a forma como se distribuem os possíveis pontos de descontinuidade duma função medidora de N variáveis através do espaço real a N dimensões ou seja através do produto das N rectas reais $X_n(x_n)\,(n = 1, 2, \ldots, N)$.

A fim de facilitar a exposição, começamos por generalizar a linguagem aplicável ao caso especial $N=3$ quando se faz a representação geométrica explicada no exemplo 8; isto é, escolhido qualquer n, chamamos *plano* (a $N-1$ dimensões) *coordenado número n* ao cilindro $\cdots \times X_{n-1} \times \{0\} \times X_{n+1} \times \cdots$ e chamamos *plano* (a $N-1$ dimensões) *paralelo ao plano coordenado número n* a todo o cilindro da forma $\cdots \times X_{n-1} \times \{x_n\} \times X_{n+1} \times \cdots$. Mais, dado um plano paralelo ao plano coordenado número m, seja P, e dada uma função medidora de N variáveis, seja F, dizemos que o ponto $u = (u_1, \ldots, u_N)$, situado em P, é um *ponto de descontinuidade de F ligado a P* se (e só se) a função F for descontínua em u com respeito à variável número m. A última definição é aceitável, porque um ponto de descontinuidade ligado a P é òbviamente um ponto de descontinuidade que pertence a P; todavia, convém prevenir que um ponto de descontinuidade situado em P não fica obrigatòriamente ligado a P.

Evidentemente, caso se tenha $N=1$, o conjunto (elementar) $\{0\}$ confunde-se com o único plano coordenado (a 0 dimensões), um conjunto sai elementar, quando e só quando for um plano paralelo ao plano coordenado, e um ponto de descontinuidade de F situado em tal plano fica sempre ligado a ele.

O resultado do estudo que vamos empreender consta da proposição seguinte.

XXXII) «Considere-se uma função medidora F de $N \geqq 1$ variáveis, designe-se por μ a (única) medida que F define no corpo de Borel a N dimensões $\mathcal{B}(B)$ e represente-se por P qualquer plano paralelo a um plano coordenado e tal que $\mu(P) > 0$. Então, não só os pontos de descontinuidade de F se distribuem por um número finito ou, quando muito, por uma infinidade numerável de planos P, como também a medida μ confere o valor zero a todo o conjunto B que esteja contido num dos planos P possíveis, seja no plano P', e que tenha intersecção vazia com o fecho(*) do conjunto formado pelos pontos de descontinuidade de F ligados a P'. Em complemento, se $N \leqq 2$, a medida μ atribui o valor zero a todo o conjunto B que esteja contido em P' e que esteja isento de pontos de descontinuidade de F.»

Demonstração de XXXII. Seja X o espaço real a N dimensões, com ponto genérico de coordenadas $x_n (n = 1, 2, \ldots, N)$, representemos por c_n os N números reais a que a função medidora F se encontra associada, ponhamos u_n para indicar as N variáveis finitas de que F depende e atribuamos ao símbolo P_n o significado dum plano que é paralelo ao plano coordenado número n e que fica com valor positivo quando se lhe aplica a (única) medida μ definida pela relação *a)* do enunciado de XXIX. Além disso, escolhidos qualquer ponto $u = (u_1, u_2, \ldots, u_N)$ e qualquer inteiro m tal que $1 \leqq m \leqq N$, façamos corresponder a cada n o conjunto $J_n(u)$ que é igual a $\{u_n \leqq x_n < c_n\}$ ou a $\{c_n \leqq x_n < u_n\}$ ou a $\{-\infty < x_n < u_n\}$, conforme tivermos $u_n < c_n$ ou $u_n \geqq c_n > -\infty$ ou $c_n = -\infty$, mais o conjunto $I_{m,n}(u)$ igual a $\{u_m\}$ ou a $\{u_n\} \cup J_n(u)$, conforme tivermos $n = m$ ou $n \neq m$, e ainda o conjunto $H_{m,n}(u)$ igual a $\{u_m\}$ ou a $J_n(u)$, conforme tivermos $n = m$ ou $n \neq m$. Finalmente, estabelecemos as convenções

$$68)\qquad \prod_{1 \leqq n \leqq N} J_n(u) = J(u), \quad \prod_{1 \leqq n \leqq N} I_{m,n}(u) =$$
$$= I_m(u), \quad \prod_{1 \leqq n \leqq N} H_{m,n}(u) = H_m(u) \quad \text{e} \quad \bigcup_{1 \leqq m \leqq N} I_m(u) = U(u).$$

(*) Talvez convenha lembrar que o *fecho* dum conjunto contido no espaço real a N dimensões é a união do conjunto com o seu derivado.

Ora, fixado arbitràriamente o ponto $\eta=(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_N)$ entre os pontos u possíveis, este confere a F um valor finito e, portanto, o conjunto de Borel $J(\eta)$, abreviadamente J, sujeita-se à desigualdade $\mu(J)<+\infty$. Então, dado n, se designarmos por P_n^+ qualquer plano paralelo ao plano coordenado número n tal que $\mu(J\cap P_n^+)>0$, por um lado, a alínea *b)* de N XXXIII mostra que $\mu(P_n^+)>0$, quer dizer, que P_n^+ é um plano P_n, e, por outro lado, a proposição N XXXVI esclarece que é finita ou, quando muito, numerável a classe formada pelas intersecções $J\cap P_n^+$ disjuntas duas a duas (distintas entre si), intersecções estas cuja soma vamos designar por K_n, de modo que resulta $\bigcup_{1\leqq n\leqq N} K_n=K\subset J$.

Se $N=1$, a conclusão alcançada significa, muito simplesmente, que é finita ou, quando muito, numerável a classe dos conjuntos elementares ou planos P tais que cada um deles está contido em J e tem uma medida μ positiva; isto quer dizer, em vista da observação posta a seguir a XXIX', que o conjunto dos pontos de descontinuidade de F situados em J se distribui por um número finito ou, quando muito, por uma infinidade numerável de planos P.

Passemos para o caso $N>1$. Então, seja qual for o ponto $u\in J$, cada número natural $m\leqq N$ dá as duas relações $u\in I_m(u)\subset J$ e $I_m(u)\subset\cdots\times X_{m-1}\times\{u_m\}\times X_{m+1}\times\cdots=Q_m(u)$, das quais tiramos a nova relação $u\in I_m(u)\subset J\cap Q_m(u)$. Posto isso, como qualquer ponto $u\in J-K$ torna impossível a identificação dum dos N planos $Q_m(u)$ com algum plano P_m^+ (porque o contrário implicava, para algum m, $u\in J\cap P_m^+\subset K$), inferimos, das propriedades das medidas, que a relação $u\in J-K$ arrasta a desigualdade

$$\mu(U(u))\leqq\sum_{1\leqq m\leqq N}\mu(I_m(u))\leqq\sum_{1\leqq m\leqq N}\mu(J\cap Q_m(u))=0.$$

Portanto, a proposição XXX permite-nos afirmar que $J-K$ é um conjunto de pontos de continuidade de F ou, equivalentemente, que K contém o conjunto dos pontos de descontinuidade de F pertencentes a J. Em suma, se F tiver pontos de descontinuidade em J, estes distribuem-se ainda por um número finito ou, quando muito, por uma infinidade numerável de planos P.

Seja qual for N, consideremos N variáveis inteiras k_n e substituamos o símbolo $J(u)$, temporàriamente, pelo símbolo mais explícito $J(u_1, u_2, \ldots, u_N)$. Nestas condições, a igualdade óbvia $X = \bigcup_{-\infty < k_1, k_2, \ldots, k_N < +\infty} J(k_1, k_2, \ldots, k_N)$ leva-nos a concluir que o conjunto de todos os pontos de descontinuidade de F também se distribui por um número finito ou, quando muito, por uma infinidade numerável de planos P. Fica assim demonstrada a primeira das afirmações feitas na tese.

Vamos agora provar o seguinte: Sai $\mu(B)=0$ se B, contido em $P' = \cdots \times X_{m-1} \times \{\eta_m\} \times X_{m+1} \times \cdots$, tiver uma intersecção vazia com o fecho D' do conjunto D formado pelos pontos de descontinuidade de F ligados a P'.

No caso $N=1$, a observação posta a seguir a XXIX' mostra logo que $B=O$, donde $\mu(B)=0$. Por isso, vamos admitir, a seguir, que é $N>1$.

As hipóteses feitas com respeito a B implicam a relação de inclusão $B \subset P' \cap D'^{-}$. Mas, qualquer vizinhança dum ponto de acumulação de D' contém pontos de D; quer dizer, o derivado de D' coincide com o derivado de D ou, expresso por outras palavras, D' *é um conjunto fechado*. Logo a proposição N XXX'' e as fórmulas N 14) e 10) mostram que $P' \cap D'^{-}$ é uma união, quando muito numerável, de intervalos

$$V_q = \cdots \times \{a_{m-1,q} < x_{m-1} < b_{m-1,q}\} \times \{\eta_m\} \times \cdot$$
$$\times \{a_{m+1,q} < x_{m+1} < b_{m+1,q}\} \times \cdots (q = 1, 2, 3, \ldots),$$

onde, dado $n \neq m$, cada símbolo $a_{n,q}$ significa um número real finito e o símbolo $b_{n,q}$ correspondente significa outro número real finito, maior do que o primeiro. Nesta conformidade, as alíneas *b)* e *d)* de N XXXIII dão a desigualdade $\mu(B) \leqq \sum_q \mu(V_q)$, com cada V_q disjunto de D', isso por causa de N 9 *a)*. Em vista do exposto, basta reduzir ao absurdo a hipótese de $\mu(V_q)$ ser positivo para algum q.

Admita-se que o valor particular χ de q torna $\mu(V_\chi)>0$. Então, a continuidade inferior de μ permite determinar um intervalo

$$W_\chi = \cdots \times \{\alpha_{m-1,\chi} \leqq x_{m-1} \leqq \beta_{m-1,\chi}\} \times$$
$$\times \{\eta_m\} \times \{\alpha_{m+1,\chi} \leqq x_{m+1} \leqq \beta_{m+1,\chi}\} \times \cdots,$$

tal que $a_{n,\chi} < \alpha_{n,\chi} < \beta_{n,\chi} < b_{n,\chi}$, para cada $n \neq m$, e que W_χ (disjunto de D') fique com medida positiva. Por outro lado, caso se verifique a desigualdade $\alpha_{n,\chi} < c_n \leqq \beta_{n,\chi}$ para algum $n \neq m$, podemos fazer corresponder a cada número positivo $\varepsilon_n < c_n - \alpha_{n,\chi}$ a igualdade entre conjuntos

$$\{\alpha_{n,\chi} \leqq x_n \leqq \beta_{n,\chi}\} =$$
$$= \{\alpha_{n,\chi} \leqq x_n \leqq c_n - \varepsilon_n\} + \{c_n - \varepsilon_n < x_n < c_n\} + \{c_n \leqq x_n \leqq \beta_{n,\chi}\}.$$

Posto isso, desenvolvamos o produto a que é igual W_χ segundo a fórmula 8'), igualemos em seguida a medida da soma de conjuntos obtida à soma das medidas das suas parcelas (em número quando muito igual a 3^{N-1}) e acabemos por tomar em conta que a continuidade superior de μ permite escolher os números ε_n eventuais de modo a tornarem inferior a $\frac{1}{2} \cdot \mu(W_\chi)/3^{N-1}$ qualquer das medidas resultantes cujo argumento tenha algum factor do tipo $\{c_n - \varepsilon_n < x_n < c_n\}$. Nestas circunstâncias, concluimos pela existência de números reais finitos a_n e $b_n\,(n \neq m)$ tais que se verifica, para cada n admissível, uma das relações $a_n < b_n < c_n$ ou $c_n \leqq a_n \leqq b_n$ e que, simultâneamente, o intervalo

$$Y_\chi = \cdots \times \{a_{m-1} \leqq x_{m-1} \leqq b_{m-1}\} \times \{\eta_m\} \times \{a_{m+1} \leqq x_{m+1} \leqq b_{m+1}\} \times \cdots$$

fica disjunto de D' e com medida positiva. Se igualarmos agora $\eta_n\,(n \neq m)$ a a_n ou a b_n, conforme for $a_n < c_n$ ou $a_n \geqq c_n$, então não só o ponto $\eta = (\ldots, \eta_{m-1}, \eta_m, \eta_{m+1}, \ldots)$ resulta pertencente a Y_χ, como também *qualquer* ponto $u = (\ldots, u_{m-1}, \eta_m, u_{m+1}, \ldots)$ com a propriedade de fazer corresponder a cada $n \neq m$ uma coordenada u_n situada para além de η_n em relação a c_n, *qualquer* ponto u nestas condições dá a relação $Y_\chi \subset H_m(u)$, da qual tiramos que $\mu(H_m(u)) > 0$ ou, por causa de XXIX', que $u \in D$ ou ainda, atendendo à definição de D', que $\eta \in D'$, uma conclusão incompatível com o facto de Y_χ ser disjunto de D'.

Fica assim provada a segunda das afirmações feitas na tese.

Finalmente, vamos tratar da parte complementar do enunciado, supondo que N não excede 2 e que $B \subset P'$ está isento de pontos de descontinuidade de F.

No caso $N=1$, a observação posta a seguir a XXIX' mostra logo que $B=O$, donde $\mu(B)=0$.

No caso $N=2$, as duas hipóteses admissíveis $P'=X_1 \times \{\gamma_2\}$ e $P'=\{\gamma_1\} \times X_2$ tratam-se de modos tão semelhantes que podemos fixar-nos numa delas, por exemplo na segunda. Então, a proposição XXIX'' mostra que existem dois números (não necessàriamente finitos), um $\alpha_2 \leqq c_2$ e outro $\beta_2 \geqq c_2$, aos quais a fórmula 7 *b)* e a parte precedente da nossa proposição conferem as propriedades

$$69) \quad \{\gamma_1\} \times \{\alpha_2 \leqq x_2 \leqq \beta_2\} \supset P'-D \supset \{\gamma_1\} \times \{\alpha_2 < x_2 < \beta_2\} = \\ = P'-D'^{(*)} \quad \text{e} \quad \mu(P'-D')=0.$$

Como B não tem pontos de descontinuidade de F, sai $B \subset P'-D$, de modo que as propriedades 69) e N 9 *b)*, as igualdades 8') e N 14'), a propriedade aditiva de μ, a alínea *b)* de N XXXIII e a proposição XXX' conduzem à relação

$$\mu(B)=\mu(B \cap [\{\gamma_1\} \times \{\alpha_2 \leqq x_2 \leqq \beta_2\}])= \\ =\mu(B \cap [\{\gamma_1\} \times \{\alpha_2\}]) + \mu(B \cap [P'-D']) + \mu(B \cap [\{\gamma_1\} \times \{\beta_2\}])=0^{(*)},$$

onde deve ler-se O em lugar de $\{\alpha_2\}$ e de $\{\beta_2\}$, respectivamente se $\alpha_2=-\infty$ e se $\beta_2=+\infty$. Fica assim concluida a demonstração de XXXII.

Observação. Seja $N>1$ e consideremos a função F e o plano P' de XXXII. Então, *o conjunto D dos pontos de descontinuidade de F ligados a P' não só é distinto do vazio, como também tem fecho igual ao seu derivado* ou, a mesma coisa dita por outras palavras, está contido no seu derivado. Com efeito, se o conjunto D fosse vazio, o mesmo sucedia ao seu fecho

---

(*) Caso um dos dois números α_2 e β_2 seja infinito, deve substituir-se por $<$ qualquer sinal $\leqslant$ que figure junto a ele.

D' e, portanto, a segunda afirmação feita no enunciado de XXXII dava o resultado absurdo $\mu(P')=0$.(*) Por outro lado, o conjunto D está contido no seu derivado, porque a proposição XXIX'' obriga qualquer ponto $u \in D$ a ser um ponto de acumulação de outros pontos pertencentes a D.(**)

Acrescentamos alguns exemplos destinados a lançar luz sobre certas questões suscitadas pelo estudo precedente.

Exemplo 55. *Os possíveis planos P do enunciado de* XXXII *formam uma classe finita ou, quando muito, numerável.* Com efeito, no caso contrário, a proposição XXXII impunha a existência de planos P destituídos de pontos de descontinuidade de F, situação esta que é incompatível com a última observação (acompanhada da nota respectiva).

Exemplo 56. Se a função medidora F do enunciado de XXXII admitir um ponto de descontinuidade u de natureza arbitrária, então existe um plano P' (de medida positiva) tal que u pertence ao fecho do conjunto formado pelos pontos de descontinuidade de F ligados a P'. De facto, se u de coordenadas $u_n (n=1, 2, \ldots, N)$ for o ponto em causa: Primeiro, XXX dá $\mu(U(u))>0$; depois, 68) e a alínea *d)* de N XXXIII mostram que $\mu(I_n(u))>0$, para um certo valor de n, seja m; em seguida, a alínea *b)* de N XXXIII prova que $\mu(H_m(v))>0$ em todo o ponto v de coordenadas v_n com a propriedade de

(*) Esta parte do raciocínio vale também para $N=1$.

(**) A indicação colocada dentro de parêntesis no fim do enunciado de XXIX' e a parte do enunciado de XXIX'' relativa à descontinuidade forçam qualquer ponto $u=(\ldots, u_{m-1}, u_m, u_{m+1}, \ldots) \in D$ a ter coordenadas $u_n \neq c_n$, para cada $n \neq m$, e a consentir uma ligação contínua, sem nunca sair de D, com qualquer ponto $v=(\ldots, v_{m-1}, u_m, v_{m+1}, \ldots) \in D$ tal que c_n não faça interposição entre u_n e v_n para nenhum $n \neq m$, podendo estabelecer-se essa ligação ao longo do «contorno do paralelipípedo» de arestas

$$\ldots, \{\inf(u_{m-1}, v_{m-1}) \leqslant x_{m-1} \leqslant \sup(u_{m-1}, v_{m-1})\},$$
$$\{\inf(u_{m+1}, v_{m+1}) \leqslant x_{m+1} \leqslant \sup(u_{m+1}, v_{m+1})\}, \ldots$$

(por um caminho que acompanhe as arestas primeiro do ponto u até ao «vértice mais afastado» dos números c_n e depois deste vértice ao ponto v).

tornarem $v_m = u_m$ e de verificarem uma das desigualdades $v_n < u_n < c_n$ ou $v_n > u_n \geqq c_n$, para cada $n \neq m$; por fim, a proposição XXIX' institui u em ponto de acumulação de pontos v tais que cada um deles seja um ponto de descontinuidade de F ligado ao plano $\cdots \times X_{m-1} \times \{u_m\} \times X_{m+1} \times \cdots$.

Exemplo 57. O leitor pode verificar, por meio de cálculos simples, que é uma função medidora associada aos números $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ a função $F_{0,0,0}(u_1, u_2, u_3)$ que toma o valor zero se $u_1 \leqq 0$ ou $u_2 \leqq 0$ ou $u_3 \leqq 0$ ou $u_1 + u_2 \leqq 1$ e que toma o valor $u_1 + u_2 - 1$ em todos os casos restantes. A função considerada sai contínua no produto das três rectas de Borel $[X_n(x_n), \mathscr{B}_n(B_n)](n = 1, 2, 3)$, desde que exceptuemos os conjuntos E_n, com E_n igual ao conjunto contido no plano coordenado número n e caracterizado pelas desigualdades $u_2 - 1 > 0 \leqq u_3$ (se $n = 1$) ou $u_1 - 1 > 0 \leqq u_3$ (se $n = 2$) ou $u_1 u_2 \geqq 0 < u_1 + u_2 - 1$ (se $n = 3$). Não só todo o plano paralelo a um plano coordenado e distinto dele fica com medida nula, conforme pode vêr-se pela observação posta no fim da demonstração de XXXII (acompanhada da nota respectiva), como também cada um dos planos coordenados fica com medida infinita, porque qualquer permutação α, β, γ dos números 1, 2, 3 dá $\lim\limits_{u_\alpha, u_\beta \uparrow +\infty} [\lim\limits_{u_\gamma \downarrow 0} F_{0,0,0}(u_1, u_2, u_3)] = +\infty$. – O conjunto $Y = \{1\} \times \{0\} \times \{u_3 \geqq 0\}$ é um conjunto de pontos de continuidade de F, é um subconjunto da diferença $D' - D$ correspondente ao plano coordenado número 2(*), é um conjunto de Borel (por causa de N XXX) e tem por medida

$$\mu(Y) = \lim_{u_3 \uparrow +\infty} \Big(\lim_{u_2 \downarrow 0} \Big(\lim_{u_1 \downarrow 1} [F_{0,0,0}(u_1, u_2, u_3) - F_{0,0,0}(1, u_2, u_3)]\Big)\Big) = 0.$$

Por outro lado, o conjunto $Z = \{0 \leqq u_1 = 1 - u_2 \leqq 1\} \times \{0\}$ é um conjunto de pontos de continuidade de F, é um subconjunto da diferença $D' - D$ correspondente ao plano coordenado número 3(*), é um conjunto de Borel (por causa de N XXX''')

(*) Como de costume, aqui D significa o conjunto dos pontos de descontinuidade ligados e D' significa o fecho de D.

e tem por medida

$$\mu(Z)=\lim_{u_3\downarrow 0}\left\{\lim_{p\uparrow+\infty}\left(\sum_{1\leq q\leq 2^p}\left[\lim_{u_1\downarrow q/2^p} F_{0,0,0}\left(u_1\,,1-\frac{q-1}{2^p}\,,u_3\right)-\right.\right.\right.$$

$$-\lim_{u_1\downarrow(q-1)/2^p} F_{0,0,0}\left(u_1\,,1-\frac{q-1}{2^p}\,,u_3\right)-\lim_{u_1\downarrow q/2^p} F_{0,0,0}\left(u_1\,,1-\frac{q}{2^p}\,,u_3\right)+$$

$$\left.\left.\left.+\lim_{u_1\downarrow(q-1)/2^p} F_{0,0,0}\left(u_1\,,1-\frac{q}{2^p}\,,u_3\right)\right]\right)\right\}+\mu(\{0\}\times\{1\}\times\{0\})=$$

$$=\lim_{u_3\downarrow 0}\left(\lim_{p\uparrow+\infty}\left[\sum_{1\leq q\leq 2^p}\left(\frac{1}{2^p}-0-0+0\right)\right]\right)+0=1.$$

O resultado $\mu(Z)>0$ tem bastante interesse, porque mostra que, no caso $N>2$, não é lícito suprimir a passagem «fecho do» do enunciado de XXXII, *nem sequer na hipótese dum conjunto B formado exclusivamente por pontos de continuidade de F.*

* * *

Terminamos esta secção tratando da ligação (não inteiramente satisfatória) que existe entre as propriedades de continuidade duma função medidora dada e as das novas funções medidoras resultantes da primeira por operações de marginação.

Tomemos o produto $(X,\mathscr{B})$ das N rectas de Borel $(X_n\,,\mathscr{B}_n)$ $(n=1\,,2\,,\ldots,N)$, consideremos a função medidora $F_{c_1,c_2,\ldots,c_N}(u_1\,,u_2\,,\ldots,u_N)$ associada aos N números c_n, qualquer deles finito arbitrário ou infinito com sinal qualificado, repartamos a colecção dos valores n possiveis por duas colecções parciais não-vazias, a primeira de elementos h, $i>h$, $j>i,\ldots$ e a outra de elementos r, $s>r$, $t>s,\ldots$, marginemos a (única) medida μ, definida em $\mathscr{B}$ pela função medidora considerada (veja-se XXV), com respeito ao produto $X_h\times X_i\times X_j\times\cdots$ e ao factor de escala P, admitamos que a medida ${}_P\mu'$ resultante determina uma função medidora ${}_PF'_{c_r,c_s,c_t,\ldots}(u_r\,,u_s\,,u_t\,,\ldots)$ associada aos números $c_r\,,c_s\,,c_t\,,\ldots$ e recordemos que a relação *a)* do enunciado de XXVIII permite a passagem directa de $F_{c_1,c_2,\ldots,c_N}$ para ${}_PF'_{c_r,c_s,c_t,\ldots}$. Nesta conformidade, não parece mal dizer que a *função medidora* ${}_P F'_{c_r, c_s, c_t, \ldots}$ *é obtida pela marginação de* $F_{c_1, c_2, \ldots, c_N}$ *com respeito às variáveis* $u_h, u_i, u_j, \ldots$ *e ao factor de escala* P ou ainda que ${}_P F'_{c_r, c_s, c_t, \ldots}$ *é a função medidora marginal de* $F_{c_1, c_2, \ldots, c_N}$, *tomada nas variáveis* $u_r, u_s, u_t, \ldots$ *e reduzida na proporção de* P *para* 1.

Posto isso, estamos habilitados a enunciar a proposição seguinte.

XXXIII) «Dados um número natural m, quando muito igual a N, e uma função medidora das N variáveis $u_1, u_2, \ldots, u_N$, esta sai contínua com respeito à variável u_m, no ponto de coordenadas $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N$, se existir uma marginal dela, tomada em variáveis $u_r, u_s, u_t, \ldots$ compreendendo u_m e reduzida na proporção dalgum número finito positivo P para 1, que seja contínua com respeito à variável u_m no ponto de coordenadas $\eta_r, \eta_s, \eta_t, \ldots$.»

Demonstração de XXXIII. Vamos empregar a notação explicada no texto que serve de preâmbulo à nossa proposição e vamos admitir que a função ${}_P F'_{c_r, c_s, \ldots}(u_r, u_s, \ldots)$, abreviadamente F', existe, conta u_m entre as suas variáveis e é contínua com respeito a u_m no ponto $\eta' = (\eta_r, \eta_s, \ldots)$. Então, se adaptarmos XXIX$'$ à função F' e ao ponto η', se recorrermos aos símbolos $H_{m,n}$ de 68), se pusermos $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N)$ e se lançarmos mão da fórmula 66), se fizermos tudo isso, obtemos a relação

$$0 = {}_P\mu'\Big(\prod_{n=r,s,\ldots} H_{m,n}(\eta)\Big) = \mu\Big(\prod_{1 \leqq n \leqq N} G_{m,n}(\eta)\Big), \text{ com } G_{m,n}(\eta)$$

igual a $H_{m,n}(\eta)$ para $n = r, s, \ldots$ e igual a X_n para $n = h, i, \ldots$,

da qual tiramos primeiro, atendendo à alínea *b)* de N XXXIII, que $\mu\Big(\prod_{1 \leqq n \leqq N} H_{m,n}(\eta)\Big) = 0$ e tiramos em seguida, atendendo à proposição XXIX$'$, que η é um ponto de continuidade da função $F_{c_1, c_2, \ldots, c_N}$ com respeito à variável u_m.

Assim fica provada a nossa tese.

Enquanto a proposição XXXIII tratava da continuidade parcial das funções medidoras, a proposição seguinte vai tratar da continuidade total dessas funções.

XXXIV) «Uma função medidora F das N variáveis $u_n (n=1, 2, \ldots, N)$ sai contínua no ponto de coordenadas η_n se for possível repartir os N valores n por $L>1$ colecções não-vazias tais que a convenção de designar por n_l o elemento genérico da colecção número $l (l=1, 2, \ldots, L)$ implique que, escolhido qualquer l, a função medidora marginal de F, tomada nas variáveis u_{n_l} e reduzida na proporção dalgum número finito positivo P_l para 1, exista em toda a parte e seja contínua no ponto de coordenadas η_{n_l}.»

Demonstração de XXXIV. Aceitemos a hipótese estabelecida no enunciado, designemos por μ a medida correspondente a F e, dado l, representemos pelo símbolo ${}_{P_l}\mu'_l$ a medida correspondente à função medidora marginal de F, tomada nas variáveis u_{n_l} e reduzida na proporção de P_l para 1. Então, se adaptarmos XXX a cada uma das L colecções de números n_l, se recorrermos aos símbolos $I_{m,n}(u)$ empregados em 68), se pusermos $\eta=(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N)$ e se lançarmos mão da fórmula 66), se fizermos tudo isso, obtemos as L igualdades

$$0={}_{P_l}\mu'_l(\bigcup_{m=n_l}[\prod_{n=n_l} I_{m,n}(\eta)])=\mu(B_l),$$

onde, dado l, o símbolo B_l significa o cilindro que tem por base o argumento de ${}_{P_l}\mu'_l$ e que tem geratrizes paralelas às rectas X_n de índices $n \neq n_l$. Mas, $B_l \supset \bigcup_{m=n_l}[\prod_{1 \leq n \leq N} I_{m,n}(\eta)]$, para cada l, conforme pode ver-se por intermédio da observação final posta na secção n.º 9, da igualdade 8) e da proposição N VI. Portanto, as alíneas *d)* e *b)* de N XXXIII e a proposição N II conduzem ao resultado

$$0=\mu(\bigcup_{1 \leq l \leq L} B_l)=\mu(\bigcup_{1 \leq m \leq N}[\prod_{1 \leq n \leq N} I_{m,n}(\eta)]),$$

o qual mostra, juntamente com XXX, que a função F é contínua no ponto η.

Assim fica provada a nossa tese.

Observação. Se pusermos $L=N$ em XXXIV, obtemos o caso particular interessante em que cada uma das funções medidoras marginais depende duma só variável.

A inversa da proposição XXXIV não é verdadeira ou, o mesmo dito por outras palavras, *uma função medidora pode sair contínua num ponto, mesmo que não haja funções medidoras marginais que cumpram com a condição referida em* XXXIV. É o que sucede com a função $F_{-\infty,-\infty,-\infty}(u_1, u_2, u_3)$ do exemplo 53, referida, digamos, ao ponto (-1, 0, 0), conforme pode ver-se construindo todas as funções medidoras marginais possíveis de uma ou duas variáveis, isto com o auxílio da observação posta a seguir a XXVIII.

Outro facto digno de registo é o seguinte: Dadas duas repartições diferentes dos N valores n de XXXIV por colecções não-vazias, em número igual a $L>1$ e a $L'>1$, é de encarar a hipótese de haver funções medidoras marginais correspondentes a uma das repartições que satisfaçam à condição referida em XXXIV e, simultâneamente, de não haver funções medidoras marginais correspondentes à outra repartição que satisfaçam à dita condição, *podendo declarar-se esta divergência no caso* $L \neq L'$ *e até no caso* $L=L'$. Vamos exemplificar, mais uma vez, com a função $F_{-\infty,-\infty,-\infty}(u_1, u_2, u_3)$ supracitada, referida, digamos, ao ponto (-1, -1, 0), escolhendo, para o efeito, os seguintes agrupamentos de funções medidoras marginais:

1.º Quaisquer três funções ${}_{P_n}F'_{-\infty}(u_n)$ $(n=1, 2, 3)$, com números finitos positivos P_n arbitrários. 2.º Quaisquer duas funções ${}_{P_1}F'_{-\infty,-\infty}(u_1, u_2)$ e ${}_{P_2}F'_{-\infty}(u_3)$, com números finitos positivos $P_l (l=1, 2)$ arbitrários. 3.º Quaisquer duas funções ${}_{P_1}F'_{-\infty}(u_1)$ e ${}_{P_2}F'_{-\infty,-\infty}(u_2, u_3)$, com números finitos positivos P_l arbitrários.

Vejamos, por fim, mais dois exemplos relativos ao assunto em estudo.

Exemplo 58. O leitor reconhece, sem dificuldade, que é uma função medidora associada aos números $c_1=-1$, $c_2=-2$ e $c_3=-3$ a função $F_{-1,-2,-3}(u_1, u_2, u_3)$ que sai igual a $u_1\, u_2\, u_3$ ou a 0, conforme u_1, u_2 e u_3 forem ou deixarem de ser conjuntamente positivos. Embora a função considerada resulte contínua em todo o espaço de Borel a três dimensões, ela não admite nenhuma função medidora marginal; com efeito, a relação *a)* de XXVIII dá um limite infinito sempre que os argumentos do seu segundo membro forem conjuntamente positivos.

Exemplo 59. O leitor pode verificar, por meio de cálculos simples, que é uma função medidora associada aos números $c_1 = +\infty$ e $c_2 = +\infty$ a função $F_{+\infty,+\infty}(u_1, u_2)$ que sai igual a $\inf(|u_1|, |u_2|)$ ou a 0, conforme u_1 e u_2 forem ou deixarem de ser conjuntamente negativos. Nesta conformidade, a observação posta a seguir a XXVIII' faz atribuir uma medida infinita ao plano de Borel. Todavia, existem funções medidoras marginais em cada uma das variáveis u_1 e u_2, porque a observação posta a seguir a XXVIII permite concluir que ${}_1F'_{+\infty}(u_1)$ vale 0 ou $|u_1|$, conforme for $u_1 \geqq 0$ ou $u_1 < 0$, e que ${}_1F'_{+\infty}(u_2)$ vale 0 ou $|u_2|$, conforme for $u_2 \geqq 0$ ou $u_2 < 0$. Como cada uma das duas funções medidoras marginais calculadas sai contínua para todos os valores da sua variável, inferimos, da proposição XXXIV, que a função $F_{+\infty,+\infty}$ inicialmente considerada não pode deixar de ser contínua em todo o seu campo de existência.

38. Mudança dos números a que se encontra associada uma função medidora. Suponhamos que $F_{c_1, c_2, \ldots, c_N}(u_1, u_2, \ldots, u_N)$ é uma função medidora associada aos N números reais $c_n (n = 1, 2, \ldots, N)$, qualquer deles ou finito arbitrário ou infinito com sinal qualificado, e seja μ a (única) medida definida, no produto das N rectas de Borel $[X_n(x_n), \mathcal{B}_n(B_n)]$, através da relação *a)* do enunciado de XXV. Então, dados os N números reais d_n, qualquer deles ou finito ou igual a $+\infty$ ou igual a $-\infty$, convém saber se a relação *a)* de XXIV, com d_n em lugar de c_n, define uma função medidora associada aos números d_n e, no caso afirmativo, convém exprimir tal função medidora à custa da originàriamente considerada.

Nesta conformidade, *admitamos, em primeiro lugar, que os números d_n são todos finitos.* Ora, basta representar por φ a restrição de μ ao corpo gerador de $\prod_n \mathscr{B}_n = \mathscr{B}$ referido em 5.º da secção n.º 15 ou em 4.º da secção n.º 20 (conforme for $N=1$ ou $N>1$), basta isso para que a finitude de μ e de φ na subclasse principal de $\mathscr{B}$ (assegurada por XXV), a relação *a)* de XXIV, com d_n em lugar de c_n, e a igualdade 63), com $\inf(d_n, u_n)$ e $\sup(d_n, u_n)$ respectivamente em lugar de u_n e de v_n, provem que *a medida μ define uma função medidora das N variáveis* (finitas) u_n, *associada aos N números d_n*, seja a função $F_{d_1, d_2, \dots, d_N}(u_1, u_2, \dots, u_N)$, a qual se confunde com a função

$$T(\inf(d_1, u_1), \dots, \inf(d_N, u_N), \sup(d_1, u_1), \dots, \sup(d_N, u_N)).$$

Portanto, as igualdades 61') e 63') e a relação *a)* de XXV, com φ em lugar de ψ, permitem escrever a fórmula

$$70) \qquad F_{d_1, d_2, \dots, d_N}(u_1, u_2, \dots, u_N) =$$

$$= \sum_{1 \leqq p_1, p_2, \dots, p_N \leqq 2} [(-1)^{p_\rho + p_\sigma + p_\tau + \cdots} \cdot F_{c_1, c_2, \dots, c_N}(u_{1,p_1}, u_{2,p_2}, \dots, u_{N,p_N})],$$

onde valem as regras seguintes: Os números $\rho, \sigma > \rho, \tau > \sigma, \dots$ representam os valores de n para os quais é desrespeitada a desigualdade $\inf(d_n, u_n) \leqq c_n < \sup(d_n, u_n)$; caso a colecção $\rho, \sigma, \tau, \dots$ seja vazia, toma-se a convenção $p_\rho + p_\sigma + p_\tau + \dots = 0$; caso a colecção dos n diferentes de $\rho, \sigma, \tau, \dots$ seja não-vazia e caso o valor de n lhe pertença, põe-se $u_{n,1} = \inf(d_n, u_n)$ e $u_{n,2} = \sup(d_n, u_n)$; caso a colecção $\rho, \sigma, \tau, \dots$ seja não-vazia e caso n lhe pertença, põe-se $u_{n,1} = \inf(d_n, u_n)$ e $u_{n,2} = \sup(d_n, u_n)$ ou $u_{n,1} = \sup(d_n, u_n)$ e $u_{n,2} = \inf(d_n, u_n)$, conforme for $c_n < \inf(d_n, u_n)$ ou $c_n \geqq \sup(d_n, u_n)$.

Admitamos agora que há números d_n infinitos. Nesta eventualidade, podemos aplicar 70), com cada d_n infinito substituido por uma grandeza v_n finita e do mesmo sinal que d_n, e podemos, em seguida, fazer tender cada v_n monòtonamente para o d_n correspondente por forma tal que as diversas variáveis v_n tenham igual módulo. Então, o esquema de raciocínio do exemplo 48 mostra que as operações descritas conduzem ambos os membros de 70) ao limite $\mu(\prod_n \{\inf(d_n, u_n) \leqq x_n < \sup(d_n, u_n)\})$, onde deve escrever-se $< x_n$ em lugar de $\leqq x_n$, caso se tenha $d_n = -\infty$. Daí e de *a)* de XXIV inferimos o seguinte: Se o limite alcançado for infinito para certos valores das variáveis (finitas) u_n, então ele não define nenhuma função medidora associada aos números d_n e, se o limite alcançado for finito para quaisquer valores das variáveis (finitas) u_n, ele identifica-se com a função medidora associada aos números d_n que é determinada pela medida μ.

Observação. Façamos $N=1$ em 70) e simplifiquemos aí a notação suprimindo o índice $n=1$. Então, dado o número real finito d, sai $F_d(u)$ igual a $F_c(\inf(d,u)) + F_c(\sup(d,u))$ ou igual a $-F_c(\inf(d,u)) + F_c(\sup(d,u))$ ou igual a $-F_c(\sup(d,u)) + F_c(\inf(d,u))$, conforme for $\inf(d,u) \leqq c < \sup(d,u)$ ou $c < \inf(d,u)$ ou $c \geqq \sup(d,u)$. Além disso, se for $d = -\infty$, pode ter-se $\lim_{v \downarrow -\infty} F_c(v) = +\infty$, caso este em que não se define nenhuma função medidora associada ao número $-\infty$, e pode ter-se também $\lim_{v \downarrow -\infty} F_c(v) < +\infty$, caso este em que a hipótese $u > c$ dá

$$F_{-\infty}(u) = \lim_{v \downarrow -\infty} [F_c(\inf(u,v)) + F_c(\sup(u,v))] = \lim_{v \downarrow -\infty} F_c(v) + F_c(u)$$

e a hipótese $u \leqq c$ dá

$$F_{-\infty}(u) = \lim_{v \downarrow -\infty} [-F_c(\sup(u,v)) + F_c(\inf(u,v))] = \lim_{v \downarrow -\infty} F_c(v) - F_c(u).$$

Finalmente, se $d = +\infty$, o estudo resulta semelhante ao que acabamos de fazer.

39. Quantis. Retomemos a notação apresentada no princípio da secção anterior, designemos abreviadamente por F_c a função medidora aí considerada, escolhamos um intervalo J da forma $\prod_n \{\alpha_n \leqq x_n < \beta_n\}$, onde, dado n, se verifica a desigualdade $-\infty \leqq \alpha_n < \beta_n \leqq +\infty$ e se corrige $\leqq x_n$ para $< x_n$ na hipótese $\alpha_n = -\infty$, e suponhamos que a medida μ correspondente a F_c atribui a J um valor *finito e positivo,* coisa esta que sucede com certeza se $\mu(J)>0$ e se todos os números α_n e β_n forem finitos (veja-se XXV). Então, sejam quais forem o número γ tal que $0<\gamma<1$ e o inteiro m tal que $1\leqq m\leqq N$, dizemos que a medida μ ou a função F_c admite o número ${}_J\chi_m^{(\gamma)}$ como *quantil da ordem γ relativo ao intervalo J e ao seu m-ésimo factor* se (e só se) esse número pertencer ao m-ésimo factor de J e satisfizer à dupla desigualdade

$$71)\quad \mu(\cdots\times\{\alpha_{m-1}\leqq x_{m-1}<\beta_{m-1}\}\times\{\alpha_m\leqq x_m<{}_J\chi_m^{(\gamma)}\}\times \qquad \textit{(continua)}$$
$$\times\{\alpha_{m+1}\leqq x_{m+1}<\beta_{m+1}\}\times\ldots)\leqq\gamma\cdot\mu(J)\leqq$$
$$\leqq\mu(\cdots\times\{\alpha_{m-1}\leqq x_{m-1}<\beta_{m-1}\}\times\{\alpha_m\leqq x_m\leqq{}_J\chi_m^{(\gamma)}\}\times \qquad \textit{(continua)}$$
$$\times\{\alpha_{m+1}\leqq x_{m+1}<\beta_{m+1}\}\times\cdots),$$

na qual, dado n, deve corrigir-se $\leqq x_n$ para $<x_n$, caso se tenha $\alpha_n=-\infty$.

Observação. Quando $N=1$, o índice m de ${}_J\chi_m^{(\gamma)}$ e a indicação «relativo ao seu m-ésimo factor» omitem-se sempre, por serem supérfluas. Além disso, quando J é o espaço real a N dimensões, o índice (esquerdo) J de ${}_J\chi_m^{(\gamma)}$ e a indicação «relativo ao intervalo J» costumam omitir-se, a fim de tornar mais cómodo o tratamento deste caso particular muito frequente nas aplicações. Semelhantemente, quando $\gamma=1/2$, o índice (superior) $1/2$ de ${}_J\chi_m^{(\gamma)}$ e a indicação «da ordem 1/2» podem omitir-se, mais uma vez porque se trata dum caso particular muito importante. Nesta ordem de ideias, se F_c for uma função duma só variável, o símbolo χ denota um quantil admitido por μ ou por F_c, subentendendo-se que tal quantil é da ordem $1/2$ e é relativo à recta real e ao seu único factor.

Se substituirmos a grandeza ${}_J\chi_m^{(\gamma)}$ do primeiro membro de 71) por uma variável u_m que percorra o intervalo linear de extremos α_m e β_m, excepto os eventuais extremos infinitos, então fica uma função $G_J(u_m)$, a qual vamos estender à recta X_m convencionando que a hipótese $\alpha_m>-\infty$ implica $G_J(u_m)=0$ para $u_m<\alpha_m$ e que a hipótese $\beta_m<+\infty$ implica $G_J(u_m)=\mu(J)$ para $u_m>\beta_m$. Ora, a observação posta a seguir ao exemplo 49 mostra que a função $G_J(u_m)$ assim estendida *é uma função medidora associada ao número* α_m, porque ela é definida e não-negativa em X_m, anula-se para $u_m = \alpha_m > -\infty$, por causa da alínea *a)* de N XXXIII, é não-decrescente com respeito a α_m e limitada superiormente por $\mu(J)$, em virtude da alínea *b)* de N XXXIII, tende para zero se $u_m \downarrow \alpha_m = -\infty$, devido à proposição II, e resulta *semicontínua à esquerda* em qualquer ponto u_m, também devido a II. Claro que a convenção de designar por $G_J(u_m+0)$ o limite à direita de G_J em qualquer ponto u_m, juntamente com II, torna a função $G_J(u_m+0)$ *semicontínua à direita* na recta X_m e torna 71) equivalente à nova dupla desigualdade

$$71') \qquad G_J({}_J\chi_m^{(\Upsilon)}) \leqq \gamma \cdot \mu(J) \leqq G_J({}_J\chi_m^{(\Upsilon)}+0),$$

a qual vamos utilizar, em seguida, para a determinação efectiva dos quantis ${}_J\chi_m^{(\Upsilon)}$ que houver.

Nesta conformidade, o supremo $\alpha_m^{(\Upsilon)}$ dos valores de u_m que tornam $G_J(u_m) < \gamma \cdot \mu(J)$ e o ínfimo $\beta_m^{(\Upsilon)}$ dos valores de u_m que tornam $G_J(u_m+0) > \gamma \cdot \mu(J)$ existem e satisfazem à relação $\alpha_m \leqq \alpha_m^{(\Upsilon)} \leqq \beta_m^{(\Upsilon)} < \beta_m$ (*), se $\alpha_m > -\infty$, ou à relação $-\infty < \alpha_m^{(\Upsilon)} \leqq \beta_m^{(\Upsilon)} < \beta_m$, se $\alpha_m = -\infty$, isto porque a igualdade $\alpha_m = \alpha_m^{(\Upsilon)} = -\infty$ dava o resultado absurdo $0 = \lim\limits_{u_m \downarrow -\infty} G_J(u_m) \geqq \gamma \cdot \mu(J)$, porque a desigualdade $\beta_m^{(\Upsilon)} \geqq \beta_m$, juntamente com II, dava o resultado absurdo $\mu(J) = \lim\limits_{u_m \uparrow \beta_m} G_J(u_m+0) \leqq \gamma \cdot \mu(J)$ e porque a desigualdade $\beta_m^{(\Upsilon)} < \alpha_m^{(\Upsilon)}$ permitia fazer corresponder a cada par de números α'_m e β'_m tais que $\beta_m^{(\Upsilon)} < \alpha'_m < \beta'_m < \alpha_m^{(\Upsilon)}$ a relação impossível $\gamma \cdot \mu(J) < G_J(\alpha'_m+0) \leqq G_J(\beta'_m) < \gamma \cdot \mu(J)$. Então, a hipótese $\alpha_m < \alpha_m^{(\Upsilon)}$ impede a relação ${}_J\chi_m^{(\Upsilon)} < \alpha_m^{(\Upsilon)}$, porque, no caso contrário, qualquer número u_m tal que ${}_J\chi_m^{(\Upsilon)} < u_m < \alpha_m^{(\Upsilon)}$ imporia, por causa da segunda parte de 71'), a desigualdade absurda $\gamma \cdot \mu(J) \leqq G_J(u_m) < \gamma \cdot \mu(J)$; semelhantemente, é de excluir a eventualidade ${}_J\chi_m^{(\Upsilon)} > \beta_m^{(\Upsilon)}$, porque, no caso contrário, qualquer número u_m tal que ${}_J\chi_m^{(\Upsilon)} > u_m > \beta_m^{(\Upsilon)}$ imporia, por causa da primeira parte de 71'), a desigualdade absurda $\gamma \cdot \mu(J) \geqq G_J(u_m+0) > \gamma \cdot \mu(J)$.

(*) A desigualdade $\alpha_m \leqslant \alpha_m^{(\Upsilon)}$ é evidente.

Por outro lado, é óbvio que $G_J(\alpha_m^{(\gamma)}) \leqq \gamma \cdot \mu(J) \leqq G_J(\beta_m^{(\gamma)}+0)$ e que, no caso $\alpha_m^{(\gamma)} < \beta_m^{(\gamma)}$, qualquer valor de u_m situado no intervalo aberto de extremos $\alpha_m^{(\gamma)}$ e $\beta_m^{(\gamma)}$ dá a relação $\gamma \cdot \mu(J) \leqq \leqq G_J(u_m) \leqq G_J(u_m+0) \leqq \gamma \cdot u(J)$ ou, equivalentemente, dá a dupla igualdade $G_J(u_m) = \gamma \cdot \mu(J) = G_J(u_m+0)$, cuja primeira [segunda] parte continua a valer para $u_m = \beta_m^{(\gamma)} [\alpha_m^{(\gamma)}]$, devido às propriedades de semicontinuidade das funções envolvidas.

Em face do exposto, podemos enunciar a **regra** seguinte:

«*Dados F_c (ou μ), J, m e γ, o conjunto dos quantis ${}_J\chi_m^{(\gamma)}$ coincide com o intervalo fechado cujo extremo esquerdo é o supremo $\alpha_m^{(\gamma)}$ dos valores de u_m que tornam $G_J(u_m) < \gamma \cdot \mu(J)$ e cujo extremo direito é o ínfimo $\beta_m^{(\gamma)}$ dos valores de u_m que tornam $G_J(u_m+0) > \gamma \cdot \mu(J)$. Em aditamento, temos um quantil único ou um intervalo significativo de quantis, conforme $\beta_m^{(\gamma)}$ igualar ou exceder $\alpha_m^{(\gamma)}$.*»

Observação. Por vezes, dada a função F_c ou a medida μ e dados o intervalo J e o inteiro m, é cómodo fazer corresponder a cada γ o quantil interpolado entre os quantis mínimo $\alpha_m^{(\gamma)}$ e máximo $\beta_m^{(\gamma)}$ na proporção de γ para $1-\gamma$, quer dizer, o quantil especial $\alpha_m^{(\gamma)} + \gamma \cdot (\beta_m^{(\gamma)} - \alpha_m^{(\gamma)})$, a que podemos chamar *quantil principal da ordem* γ se γ for fixo (e que é uma *função uniforme de* γ se γ for variável).

* * *

Todo o valor u_m que verifique simultâneamente as desigualdades $\alpha_m \leqq u_m < \beta_m$, $G_J(u_m+0) > 0$ e $G_J(u_m) < \mu(J)$ é, por causa de 71'), um quantil de *qualquer* ordem γ tal que $0 < \gamma < 1$ e que $G_J(u_m)/\mu(J) \leqq \gamma \leqq G_J(u_m+0)/\mu(J)$ e, portanto, é um quantil duma única ordem ou duma infinidade contínua de ordens, conforme a função G_J for contínua ou descontínua no ponto u_m. Por outro lado, se γ e δ forem dois números sujeitos à condição $0 < \gamma < \delta < 1$, a desigualdade ${}_J\chi_m^{(\delta)} < {}_J\chi_m^{(\gamma)}$ torna-se impossível, porque ela e 71') implicariam o resultado absurdo $\delta \cdot \mu(J) \leqq G_J({}_J\chi_m^{(\delta)}+0) \leqq G_J({}_J\chi_m^{(\gamma)}) \leqq \gamma \cdot \mu(J)$. Do exposto concluimos primeiro que se verifica a relação ${}_J\chi_m^{(\gamma)} \leqq {}_J\chi_m^{(\delta)}$ (para cuja interpretação correcta lembramos que qualquer dos seus membros pode representar uma infinidade de quantis) e inferimos depois que cada u_m situado nalgum intervalo aberto de extremos ${}_J\chi_m^{(\gamma)}$ e ${}_J\chi_m^{(\delta)}$ *diferentes* é um quantil cujos números de ordem η satisfazem todos à desigualdade $\gamma \leqq \eta \leqq \delta$.

Posto isso, designemos por $\beta_m^{(0)}$ o ínfimo dos valores de u_m tais que $G_J(u_m+0)>0$ e por $\alpha_m^{(1)}$ o supremo dos valores de u_m tais que $G_J(u_m)<\mu(J)$. Logo se vê que $\alpha_m \leqq \beta_m^{(0)} \leqq \alpha_m^{(1)} \leqq \beta_m$, que $\alpha_m^{(1)} > -\infty$, que $\beta_m^{(0)} < \beta_m$, que $G_J(\beta_m^{(0)})=0$, que $G_J(\alpha_m^{(1)}+0)=\mu(J)$, que nenhum quantil de ordem positiva e menor do que 1 pode ser nem anterior a $\beta_m^{(0)}$ nem posterior a $\alpha_m^{(1)}$, que a hipótese $G_J(\beta_m^{(0)}+0)>0$ força $\beta_m^{(0)}$ a ser quantil de qualquer ordem γ sujeita às desigualdades $\gamma<1$ e $0<\gamma \leqq G_J(\beta_m^{(0)}+0)/\mu(J)$ e que a hipótese $G_J(\alpha_m^{(1)})<\mu(J)$ obriga $\alpha_m^{(1)}$ a ser quantil de qualquer ordem γ sujeita às desigualdades $\gamma>0$ e $1>\gamma \geqq G_J(\alpha_m^{(1)})/\mu(J)$. Nestas condições, se $\beta_m^{(0)} < \alpha_m^{(1)}$, basta fazer percorrer à grandeza u_m crescentemente o intervalo aberto de extremos $\beta_m^{(0)}$ e $\alpha_m^{(1)}$ para que ela se constitua em quantil com um número de ordem (em geral variável) γ positivo, menor do que 1, não-decrescente e sujeito à relação $G_J(\beta_m^{(0)}+0)/\mu(J) \leqq \gamma \leqq$ $\leqq G_J(\alpha_m^{(1)})/\mu(J)$.

Por vezes, é cómodo classificar como *quantil da ordem* 0 qualquer número finito ou infinito ${}_J\chi_m^{(0)}$ tal que $\alpha_m \leqq {}_J\chi_m^{(0)} \leqq \beta_m^{(0)}$ e como *quantil da ordem* 1 qualquer número finito ou infinito ${}_J\chi_m^{(1)}$ tal que $\alpha_m^{(1)} \leqq {}_J\chi_m^{(1)} \leqq \beta_m$, subentendendo-se, em ambos os casos, que se trata de quantis admitidos por μ ou F_c e relativos ao intervalo J e ao seu m-ésimo factor. Tais quantis podem distinguir-se dos anteriormente considerados, de ordem positiva e menor do que 1, chamando *próprios* a estes e chamando *impróprios* aos novos quantis. Claro que a hipótese $G_J(\beta_m^{(0)}+0)=0$ $[G_J(\alpha_m^{(1)})=\mu(J)]$ exclui o único caso em que um quantil da ordem 0[1] tem a possibilidade de ser próprio.

Acrescentamos um exemplo em que se efectua o estudo completo dos quantis correspondentes a um μ e a um J dados.

Exemplo 60. Façamos $N=1$, $\alpha_1=\alpha=-\infty$, $\beta_1=\beta=1$, $c_1=c=0$, $u_1=u$ e $F_0(u)$ igual a 0 ou a 1/2 ou a $2u$, conforme for $u \leqq 1/3$

ou $1/3<u\leqq 2/3$ ou $2/3<u$. Sai $\mu(J)=2$ e $G_J(u)$ igual a 0 ou a 1/2 ou a $2u$ ou a 2, conforme for $u\leqq 1/3$ ou $1/3<u\leqq 2/3$ ou $2/3<u\leqq 1$ ou $1\leqq u$. Daí, das convenções feitas na observação posta a seguir a 71) e alargadas ao caso dos quantis impróprios, das igualdades $\beta^{(0)}=1/3$ e $\alpha^{(1)}=1$ e da dupla desigualdade 71') tiramos que ${}_J\chi^{(0)}$ pode ser qualquer número desde $-\infty$ a 1/3, extremos incluidos, que ${}_J\chi^{(\gamma)}=1/3$ para $0<\gamma\leqq 1/4$, que ${}_J\chi^{(1/4)}$ pode ser qualquer número desde 1/3 a 2/3, extremos incluidos, que ${}_J\chi^{(\gamma)}=2/3$ para $1/4\leqq\gamma\leqq 2/3$, que ${}_J\chi^{(\gamma)}$ vale γ e apenas γ para $2/3\leqq\gamma<1$ e que ${}_J\chi^{(1)}$ vale 1 e apenas 1. Note-se que o quantil impróprio $\beta^{(0)}$ é também próprio e que o quantil impróprio $\alpha^{(1)}$ não é próprio.

*

* *

Fechamos esta secção apresentando a *nomenclatura especial que é costume aplicar aos quantis mais importantes.*

Chama-se *mediana* ou, por vezes, *valor mediano* a todo o quantil da ordem 1/2. Também se chama i-ésimo *tercil* a todo o quantil da ordem $i/3\,(i=1,\ 2)$, i-ésimo *quartil* a todo o quantil da ordem $i/4\,(i=1,\ 2,\ 3)$, i-ésimo *pentil* a todo o quantil da ordem $i/5\,(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$, i-ésimo *sextil* a todo o quantil da ordem $i/6\,(i=1,\ 2,\ldots,5)$, i-ésimo *septil* a todo o quantil da ordem $i/7\,(i=1,\ 2,\ldots,6)$, i-ésimo *octil* a todo o quantil da ordem $i/8\,(i=1,\ 2,\ldots,7)$, i-ésimo *nonil* a todo o quantil da ordem $i/9\,(i=1,\ 2,\ldots,8)$, i-ésimo *decil* a todo o quantil da ordem $i/10\,(i=1,\ 2,\ldots,9)$, i-ésimo *centil* a todo o quantil da ordem $i/100\,(i=1,\ 2,\ldots,99)$ e i-ésimo *permil* a todo o quantil da ordem $i/1000\,(i=1,\ 2,\ldots,\ 999)$. Deste modo, alguns quantis ficam simultâneamente com várias designações; por exemplo, todo o segundo quartil é uma mediana, todo o vigésimo quinto centil é um primeiro quartil, etc.

Finalmente, recordemos a noção de quantil principal da ordem γ, explicada na última observação. Nesta conformidade, podemos chamar *intervalo tercil (reduzido)* à diferença entre os tercis principais segundo e primeiro, *intervalo semi-*

quartil ou *intervalo quartil reduzido* à semidiferença entre os quartis principais terceiro e primeiro, *intervalo pentil reduzido* à terça parte da diferença entre os pentis principais quarto e primeiro, etc., *intervalo decil reduzido* à oitava parte da diferença entre os decis principais nono e primeiro, etc. O mais usado dos intervalos citados é o intervalo semiquartil, a que se recorre frequentemente em questões estatísticas.

40. Funções quase-medidoras associadas a colecções ordenadas formadas por $N \geqq 1$ números reais. Convergências fraca e completa de certas sucessões de tais funções. Escolhidos à nossa vontade $N \geqq 1$ números reais $c_n (n = 1, 2, \ldots, N)$, cada um deles finito arbitrário ou infinito com sinal qualificado, pode acontecer que a esses números corresponda uma função real $Q_{c_1, c_2, \ldots, c_N}$, abreviadamente Q_c, das N variáveis reais finitas u_n que seja dotada das propriedades duma função medidora associada a $c_1, c_2, \ldots, c_N$ com excepção possível da terceira (veja-se, para o efeito, a primeira parte da secção n.º 35), isto é, dotada das três propriedades seguintes: 1.ª A função existe e é finita para quaisquer valores das variáveis u_n. 2.ª Em qualquer ponto do seu campo de existência a função sai semicontínua do lado esquerdo com respeito a cada uma das suas variáveis. 3.ª Se substituirmos T por Q no segundo membro de 61'), este fica com valor não-negativo para qualquer escolha dos 2 N números reais finitos a_n e $b_n \geqq a_n$.

Pois bem, a uma função do tipo referido chama-se *função quase-medidora associada aos números* $c_1, c_2, \ldots, c_N$, justificando-se tal classificação como segue:

Quando se iguala o segundo membro de 61'), com Q em lugar de T, a uma função Θ das 2 N variáveis reais finitas a_n e $b_n \geqq a_n$, a esta é aplicável a demonstração de XXV até à altura em que se invoca a terceira propriedade das funções medidoras. Portanto, a função Θ referida admite uma e uma só extensão a uma medida, digamos μ, definida no corpo de Borel $\mathcal{B}$ a N dimensões, a qual sai finita-σ em $\mathcal{B}$ e finita na subclasse principal de $\mathcal{B}$. Deve notar-se, porém, que dum modo geral não é viável a identificação da função Q_c com a restrição da medida μ à classe dos intervalos da forma $\prod\limits_{n} \{\inf(c_n, u_n) \leq x_n < \sup(c_n, u_n)\}$ (onde deve ler-se $< x_n$ em lugar de $\leq x_n$ sempre que $c_n = -\infty$). Convém acrescentar que é uso designar a extensão μ aqui considerada por *medida determinada pela função* Q_c.

A definição acima dada e a proposição XXIII mostram a verdade da afirmação seguinte: Qualquer função medidora associada aos números $c_1, c_2, \ldots, c_N$ é uma função quase-medidora associada aos mesmos números e é não-negativa, não-decrescente com respeito a cada c_n e privilegiada com respeito a todo o ponto do espaço real X a N dimensões. Todavia, a afirmação inversa da que acabamos de fazer escusa de ser verdadeira, conforme mostra o caso da função idênticamente igual a 1 no plano real, quando associada a qualquer par de números c_1 e c_2.

Segue um exemplo destinado a ilustrar como uma função quase-medidora associada aos números $c_1, c_2, \ldots, c_N$ pode tomar valores negativos, pode também deixar de ser não-decrescente com respeito a cada c_n e pode ainda sair privilegiada com respeito a certos pontos de X sem sair privilegiada com respeito aos restantes pontos de X.

Exemplo 61. Considere-se a função das duas variáveis u_1 e u_2 que é igual a 0 se $u_1 > 0$ e $u_2 > 0$, que é igual a $-u_2$ se $u_1 \leq 0$ e $u_2 \leq 0$ e que é igual a u_2 nos demais casos. Esta função é quase-medidora associada aos números $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$, sai privilegiada com respeito ao ponto $(-1, 1)$ e assume, no ponto $(1, -1)$, um valor negativo maior do que o valor assumido no ponto $(1, -2)$, pelo que ela não pode sair privilegiada com respeito a todo o ponto de X (veja-se o comentário à definição de função privilegiada, dada na primeira parte da secção n.º 35).

Vimos, a propósito de XXXII, que uma função medidora associada aos números $c_1, c_2, \ldots, c_N$ tem um conjunto de pontos de descontinuidade que se distribui por um número finito ou, quando muito, por uma infinidade numerável de planos paralelos aos planos coordenados do espaço real a N dimensões. A proposição seguinte esclarece que basta sujeitar uma função quase-medidora associada a $c_1, c_2, \ldots, c_N$ a uma restrição comparativamente suave para que o seu conjunto de pontos de descontinuidade se distribua dum modo igual ao duma função medidora.

XXXV) «Toda a função quase-medidora que seja associada a $N \geqq 1$ números reais $c_1, c_2, \ldots, c_N$, cada um deles finito arbitrário ou infinito com sinal qualificado, e que seja privilegiada com respeito a algum ponto do espaço real X a N dimensões(*), toda a função nestas condições apresenta um conjunto de pontos de descontinuidade o qual se distribui por um número finito ou, quando muito, por uma infinidade numerável de planos paralelos aos planos coordenados de X.»

Demonstração de XXXV. Consideremos uma função quase-medidora, associada a $c_1, c_2, \ldots, c_N$ e privilegiada com respeito ao ponto $\eta \in X$ de coordenadas η_n $(n=1, 2, \ldots, N)$, seja a função $Q_c(u_1, u_2, \ldots, u_N)$, tomemos qualquer número natural $K \leqq N$ e quaisquer inteiros n_k $(k=1, 2, \ldots, K)$ tais que $1 \leqq n_1 < n_2 < \cdots < n_K \leqq N$, representemos por $Q_{\eta, c}(u_{n_1}, u_{n_2}, \ldots, u_{n_K})$ a função que se obtém a partir da função considerada quando se faz $u_n = \eta_n$ para todo o n diferente de cada um dos n_k(**), introduzamos as $2\,K$ variáveis reais finitas a_{n_k} e $b_{n_k} \geqq a_{n_k}$ e formemos a função Θ_η dessas variáveis, definida pela expressão

$$\text{72)} \qquad \Theta_\eta(a_{n_1}, \ldots, a_{n_K}, b_{n_1}, \ldots, b_{n_K}) =$$
$$= \sum_{1 \leqq p_{n_1}, \ldots, p_{n_K} \leqq 2} [(-1)^{p_{\rho'} + p_{\sigma'} + \cdots} \, . \, Q_{\eta, c}(a_{n_1, p_{n_1}}, \ldots, a_{n_K, p_{n_K}})],$$

em relação à qual valem as regras seguintes: Os símbolos $\rho', \sigma', \ldots$ designam os inteiros n_k para os quais é desrespeitada a desigualdade $a_{n_k} \leqq c_{n_k} < b_{n_k}$; se a colecção $\rho', \sigma', \ldots$ for

(*) Se for $N=1$, esta última propriedade está implícita no facto de se tratar duma função quase-medidora.

(**) Claro que a única função $Q_{\eta, c}(u_{n_1}, \ldots, u_{n_N})$ coincide com a função $Q_c(u_1, \ldots, u_N)$.

vazia, estabelece-se a convenção $p_{\rho'}+p_{\sigma'}+\cdots=0$; caso se tenha $n_k \neq \rho', \sigma', \ldots$, põe-se $a_{n_k,1}=a_{n_k}$ e $a_{n_k,2}=b_{n_k}$; se n_k for um dos inteiros $\rho', \sigma', \ldots$, põe-se $a_{n_k,1}=a_{n_k}$ e $a_{n_k,2}=b_{n_k}$ ou $a_{n_k,1}=b_{n_k}$ e $a_{n_k,2}=a_{n_k}$, conforme tivermos $c_{n_k}<a_{n_k}$ ou $c_{n_k} \geqq b_{n_k}$.

Nestas condições, as hipóteses feitas com respeito à função $Q_c(u_1, \ldots, u_N)$ não só implicam que a função $Q_{\eta,c}(u_{n_1}, \ldots, u_{n_K})$ seja em toda a parte finita e semicontínua do lado esquerdo com respeito a cada uma das suas variáveis, como também implicam que a função Θ_η do primeiro membro de 72) saia não-negativa no seu campo de existência. Sendo assim, referiu-se, no princípio desta secção, que a função Θ_η pode estender-se, dum e dum só modo, a uma medida definida no espaço de Borel $(X', \mathscr{B}')$ a K dimensões que corresponde às K variáveis u_{n_k}, medida esta que resulta finita na subclasse principal de $\mathscr{B}'$. Portanto, a proposição XXIV mostra que a função

$$\Theta_\eta(\inf(\eta_{n_1}, u_{n_1}), \ldots, \inf(\eta_{n_K}, u_{n_K}), \sup(\eta_{n_1}, u_{n_1}), \ldots, \sup(\eta_{n_K}, u_{n_K})),$$

dependente das variáveis u_{n_k}, sai uma função medidora associada aos números $\eta_{n_1}, \ldots, \eta_{n_K}$ e, consequentemente, tem um conjunto de pontos de descontinuidade distribuido por um número finito ou, quando muito, por uma infinidade numerável de planos paralelos aos planos coordenados de X', planos coordenados estes que são caracterizados pelas K equações $u_{n_k}=0$, cada uma das quais caracteriza também um plano coordenado de X. Por outro lado, sempre que o ponto $(u_1, u_2, \ldots, u_N)$ varrer uma das regiões não-vazias de X em que, escolhido qualquer n, a coordenada u_n, suposta *diferente de* η_n, percorre um e um só dos intervalos $u_n \leqq \inf(c_n, \eta_n)$, $\inf(c_n, \eta_n) < u_n \leqq \sup(c_n, \eta_n)$ e $u_n > \sup(c_n, \eta_n)$,(*) sempre que suceder isso, a nossa função medidora constitui-se em combinação linear (de coeficientes fixos) da função $Q_{\eta,c}(u_{n_1}, \ldots, u_{n_K})$ e das 2^K-2 funções que conseguem obter-se a partir da anterior introduzindo nela, de todas as maneiras possíveis, igualdades $u_{n_k}=\eta_{n_k}$ em número de 1, 2, ..., $K-1$. Atendendo ao exposto,

---

(*) As regiões não-vazias do tipo aqui descrito são em número de $2^I \cdot 3^{N-I}$, onde I significa o número de grandezas c_n infinitas ou iguais a η_n.

concluímos, trabalhando sucessivamente com todos os casos em que $K=1$, em que $K=2$, etc., em que $K=N$, que a função $Q_c(u_1,\ldots,u_N)$ tem, em cada uma das regiões citadas, um conjunto de pontos de descontinuidade distribuido por um número finito ou, quando muito, por uma infinidade numerável de planos paralelos aos planos coordenados de X. Finalmente, a tese afirmada no enunciado decorre do facto de o complemento da união ou soma das regiões mencionadas se identificar com a união dos N planos (paralelos aos planos coordenados de X) caracterizados pelas N equações $u_n=\gamma_n$.

* * *

Seguem uma definição e duas proposições destinadas a preparar a continuação desta secção.

Em primeiro lugar, considerem-se $N\geqq 1$ variáveis reais finitas $u_n\,(n=1,\,2,\ldots,N)$, faça-se corresponder a cada número natural l uma função real ${}_lF(u_1,u_2,\ldots,u_N)$, definida e finita no espaço real X a N dimensões, e suponha-se que a função real $F(u_1,u_2,\ldots,u_N)$ tem as duas primeiras propriedades duma função quase-medidora (associada a quaisquer N números) e, além disso, apresenta um conjunto de pontos de descontinuidade D distribuido por um número finito ou, quando muito, por uma infinidade numerável de planos paralelos aos planos coordenados (de X). Nesta conformidade, se (e só se) a sucessão das funções ${}_lF$ convergir (no sentido corrente da palavra) para F em todos os pontos de D^-, com excepção possível dos situados numa colecção finita ou numerável de planos paralelos aos planos coordenados, então escreve-se simbòlicamente

$$73)\qquad \lim_{l\to\infty} {}_lF \overset{s}{=} F \text{ ou } {}_lF \overset{s}{\longrightarrow} F, \quad \text{quando } l\to\infty,$$

e diz-se quer que *F é limite fraco (*ou *essencial) da sucessão das funções ${}_lF$* quer que *esta sucessão converge fracamente (*ou *essencialmente) para F.*

Quando cada uma das funções F e ${}_lF$ for quase-medidora associada aos N números $c_1,c_2,\ldots,c_N$, cada um deles finito ou igual a $+\infty$ ou igual a $-\infty$, diz-se também que *as* *medidas* ${}_i\mu$ *determinadas pelas funções* ${}_iF$ *convergem fracamente (*ou *essencialmente) para a medida* μ *determinada pela função* F. Neste caso, μ considera-se como sendo o *limite fraco (*ou *essencial)* das medidas ${}_i\mu$.

As definições dadas tornam-se aceitáveis em face da proposição que passamos a apresentar.

XXXVI) «Dada uma sucessão de funções definidas e finitas num espaço real com um número finito de dimensões, ela não pode ter mais do que um limite fraco ou essencial.»

Demonstração de XXXVI. Admitamos que se verifica a relação 73), que $G(u_1, u_2, \ldots, u_N)$ é uma função dotada de propriedades iguais às de F e que se verifica a relação ${}_iF \xrightarrow{s} G$, homóloga de 73). Então, pondo

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_N) - G(u_1, u_2, \ldots, u_N) = H(u_1, u_2, \ldots, u_N),$$

reconhecemos não só que a função H sai finita e semicontínua do lado esquerdo com respeito a cada uma das suas variáveis, isto para qualquer ponto do espaço real X considerado, como também que ela sai nula em todos os pontos de X, com excepção possível dos situados numa colecção finita ou numerável de planos paralelos aos planos coordenados. Por isso, se escolhermos um ponto arbitrário $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N) \in X$ e se fizermos corresponder a cada número natural $n \leqq N$ uma sucessão (infinita) formada por números $\eta_{n,p_n} \uparrow \eta_n$ $(p_n = 1, 2, 3, \ldots)$ de maneira tal que a função H se anule em qualquer ponto $(\eta_{1,p_1}, \eta_{2,p_2}, \ldots, \eta_{N,p_N})$, se procedermos do modo descrito, obtemos a relação

$$0 = \lim_{p_N \to \infty} (\ldots \{ \lim_{p_2 \to \infty} [\lim_{p_1 \to \infty} H(\eta_{1,p_1}, \eta_{2,p_2}, \ldots, \eta_{N,p_N})]\}) = H(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N),$$

a qual prova que a função H sai idênticamente nula em X ou, dito por outras palavras, que o limite fraco F é único. Fica assim concluída a nossa demonstração.

Terminamos esta parte da secção n.º 40 pela proposição seguinte:

XXXVII) «Escolham-se arbitràriamente um espaço real X com um número finito de dimensões, um conjunto numerável Y extraído de X e uma sucessão (infinita) formada por funções reais definidas em X. Se a sucessão escolhida for limitada em cada ponto de X, então ela admite uma subsucessão convergente em todos os pontos de Y.»

Demonstração de XXXVII. Seja N o número de dimensões de X, representemos por $(x_{1,p}, x_{2,p}, \ldots, x_{N,p})(p=1,2,3,\ldots)$ o ponto genérico de Y e admitamos que as funções ${}_lF(u_1, u_2, \ldots, u_N)$ $(l=1,2,3,\ldots)$, consideradas no preâmbulo a 73), formam uma sucessão limitada em cada ponto de X. Nesta conformidade, podemos extrair primeiro da sucessão dos números l uma subsucessão formada por números l_1 tais que ${}_{l_1}F(x_{1,1}, x_{2,1}, \ldots, x_{N,1})$ converge quando $l_1 \longrightarrow \infty$, podemos extrair depois da sucessão dos l_1 uma subsucessão formada por números l_2 tais que ${}_{l_2}F(x_{1,2}, x_{2,2}, \ldots, x_{N,2})$ converge quando $l_2 \longrightarrow \infty$, podemos extrair em seguida da sucessão dos l_2 uma subsucessão formada por números l_3 tais que ${}_{l_3}F(x_{1,3}, x_{2,3}, \ldots, x_{N,3})$ converge quando $l_3 \longrightarrow \infty$, etc. Portanto, se designarmos por χ_p o p-ésimo dos números l_p, então os números χ_p formam uma sucessão estritamente crescente e as funções ${}_{\chi_p}F(u_1, u_2, \ldots, u_N)$ portam-se como segue: Convergem no primeiro ponto de Y, porque todo o χ_p é um l_1; convergem no segundo ponto de Y, porque todo o χ_p de índice $p>1$ é um l_2; etc.; convergem no q-ésimo ponto de Y, porque todo o χ_p de índice $p>q-1$ é um l_q; etc. Por outras palavras, a sucessão das funções ${}_{\chi_p}F$, extraída da sucessão das funções ${}_lF$, converge em todos os pontos de Y, ficando assim demonstrada a nossa tese.

* * *

A parte subsequente desta secção esteia-se na proposição que passamos a enunciar.

XXXVIII) «Considerem-se $N \geq 1$ variáveis reais finitas $u_n (n=1,2,\ldots,N)$, mais N números reais c_n, qualquer deles finito arbitrário ou infinito com sinal qualificado, e ainda uma sucessão (infinita) formada por funções não-negativas

${}_lF_c(u_1, u_2, \ldots, u_N)$ $(l=1, 2, 3, \ldots)$, cada uma das quais é quase-medidora associada aos c_n e privilegiada com respeito ao ponto genérico $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ do espaço real X a N dimensões. Então, a sucessão das funções ${}_lF_c$ converge fracamente para uma (e só uma) função $F_c(u_1, u_2, \ldots, u_N)$ se existir uma função G_c sujeita à relação

$$a) \quad \lim_{l\to\infty} {}_lF_c(y_1, y_2, \ldots, y_N) = G_c(y_1, y_2, \ldots, y_N) \neq \infty$$

em todos os pontos $(y_1, y_2, \ldots, y_N)$ dum conjunto denso em X.

Em complemento, a função F_c resulta não-negativa, quase-medidora associada aos c_n e privilegiada com respeito ao ponto genérico de X e sai igual ao limite das funções ${}_lF_c$, quando tomada em qualquer ponto de continuidade de coordenadas $u_n \neq c_n$ para cada n. Além disso, escolhido arbitràriamente um ponto u de coordenadas u_n e postos os símbolos α e β para designar os valores genéricos de n para os quais $u_n > c_n$ e $u_n \leq c_n$, respectivamente, feito isso, se a grandeza H_c for igual ao supremo de G_c relativo à parte de X em que $c_\alpha < y_\alpha < u_\alpha$ para cada α (se houver valores α) e em que $c_\beta > y_\beta > x_\beta$, com $x_\beta < u_\beta$, para cada β (se houver valores β), então a determinação de F_c em u confunde-se com H_c ou com o ínfimo de H_c sobre a região onde $x_\beta < u_\beta$ para cada β, conforme a colecção dos valores α coincidir ou deixar de coincidir com a de todos os valores n.»

Demonstração de XXXVIII. Dividamos a nossa demonstração em *duas fases:* Primeiro, vamos deduzir que a função F_c sujeita às regras referidas no fim do enunciado é uma função não-negativa, quase-medidora associada aos c_n e privilegiada com respeito ao ponto genérico de X; em seguida, vamos provar que a função F_c é o limite das funções ${}_lF_c$, quando tomada em qualquer ponto de continuidade de coordenadas $u_n \neq c_n$ para cada n, e vamos concluir daí que as funções ${}_lF_c$ convergem fracamente para F_c (e *só* para F_c, isto por causa de XXXVI).

1.ª *fase.* Para começar, fixemos de qualquer modo um número natural $m \leq N$ e dois pontos $(\ldots, y_{m-1}, y'_m, y_{m+1}, \ldots) = y'$

e $(\ldots, y_{m-1}, y''_m, y_{m+1}, \ldots) = y''$, pertencentes ao conjunto Y em que é válida a relação *a)* e tais que se verifica uma das duas desigualdades $c_m < y'_m < y''_m$ ou $y''_m < y'_m \leqq c_m$. Então, se algum número $\varepsilon > 0$ tornasse $G_c(y') - G_c(y'') = \varepsilon$, podíamos encontrar um l que verificasse a desigualdade ${}_lF_c(y') > G_c(y') - \varepsilon/2 = G_c(y'') + \varepsilon/2 > {}_lF_c(y'')$, resultando assim uma contradição com o facto, mencionado no fim do terceiro trecho da secção n.º 35, de qualquer uma das funções ${}_lF_c$ ser não-decrescente com respeito a cada c_n. Concluímos primeiro, atendendo ao exposto, que a *função G_c sai não-negativa e não-decrescente com respeito a cada c_n* (no conjunto Y) e concluímos em seguida, atendendo à estrutura de Y e às propriedades dos supremos e dos ínfimos, que *qualquer uma das funções H_c e F_c referidas* na parte final do enunciado *sai não-negativa, finita e não-decrescente com respeito a cada c_n*.

Posto isso, sejam quais forem o ponto $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N) = \eta \in X$, o número natural $K \leqq N$ e os inteiros $n_k (k = 1, 2, \ldots, K)$ tais que $1 \leqq n_1 < n_2 < \cdots < n_K \leqq N$, representemos por $F_{\eta, c}(u_{n_1}, u_{n_2}, \ldots, u_{n_K})$ a função em que se transforma a função F_c quando se iguala u_n a η_n para todo o n distinto de cada um dos n_k (a própria função F_c no caso $K = N$), consideremos $2K$ variáveis reais finitas a_{n_k} e $b_{n_k} \geqq a_{n_k}$ e designemos por ζ_η a função dessas variáveis que se obtém substituindo, no segundo membro de 72), o símbolo $Q_{\eta, c}$ por $F_{\eta, c}$. Como as funções $F_{\eta, c}$ são não-negativas em toda a parte, reconhecemos o seguinte: Todas as funções ζ_η possíveis são obrigadas a sair não-negativas nos seus campos de existência se cada $\zeta_\eta(a_{n_1}, \ldots, a_{n_K}, b_{n_1}, \ldots, b_{n_K})$ tomar apenas valores não-negativos em qualquer região não-vazia tirada da classe das 2^K regiões que podem alcançar-se fazendo variar os argumentos de modo tal que, seja qual for k, o intervalo (linear) $\{a_{n_k} \leqq x_{n_k} < b_{n_k}\}$ fique sempre contido num intervalo fixo coincidente ou com $\{-\infty < x_{n_k} \leqq c_{n_k}\}$ ou com $\{c_{n_k} < x_{n_k} < +\infty\}$. Por outro lado, seleccionadas primeiro uma das funções ζ_η e a seguir uma das regiões não-vazias citadas, a fórmula 72), com F e ζ em lugar de Q e Θ, respectivamente, toma o aspecto particular(*)

(*) Haverá coincidência entre os números $\varrho', \sigma', \ldots$ e os números $n_1, \ldots, n_K$.

$$74)\qquad \zeta_{\eta}(a_{n_1},\ldots,a_{n_K},b_{n_1},\ldots,b_{n_K})=$$

$$=\sum_{1\leq p_{n_1},\ldots p_{n_K}\leq 2}[(-1)^{p_{n_1}+\cdots+p_{n_K}}\,.\,F_{\eta,c}(a_{n_1,p_{n_1}},\ldots,a_{n_K,p_{n_K}})],$$

onde $a_{n_k,1}=a_{n_k}$ e $a_{n_k,2}=b_{n_k}$ ou $a_{n_k,1}=b_{n_k}$ e $a_{n_k,2}=a_{n_k}$, conforme tivermos $c_{n_k}<a_{n_k}$ ou $c_{n_k}\geq b_{n_k}$, e onde todos os valores de $F_{\eta,c}$ possíveis resultam da função F_c tomada numa e só numa das (não mais de 2^N) regiões não-vazias que podem obter-se fazendo variar os argumentos de modo tal que, seja qual for n, o n-ésimo argumento da função permaneça num intervalo (linear) fixo coincidente ou com $\{-\infty<x_n\leq c_n\}$ ou com $\{c_n<x_n<+\infty\}$, quer dizer, de modo tal que permaneçam fixos os valores n do tipo α e os do tipo β.

Agora, escolhamos números n_k e uma qualquer das regiões indicadas para a função F_c, reportemos a fórmula 74) a um ponto η compatível com a escolha feita, designemos por Σ' e Σ'' os somatórios das 2^{K-1} parcelas do segundo membro de 74) ao longo das quais $p_{n_1}+\cdots+p_{n_K}$ se conserva respectivamente ímpar e par, ponhamos em lugar do ponto η outro ponto η^* de coordenadas η_n^* iguais a ou menores do que η_n, conforme n for um α ou um β, substituamos cada ponto $(a_{n_1,p_{n_1}},\ldots,a_{n_K,p_{n_K}})$ por outro $(a^*_{n_1,p_{n_1}},\ldots,a^*_{n_K,p_{n_K}})$ que torne $a^*_{n_k,p_{n_k}}$ igual a ou menor do que $a_{n_k,p_{n_k}}$, conforme n_k for um α ou for um β, representemos por $H_{\eta^*,c}$ a função em que se transforma a função H_c quando se iguala o seu argumento número n a η_n^* para todo o n distinto de cada um dos n_k (a própria função H_c no caso $K=N$) e, por fim, fixemos arbitràriamente um número $\varepsilon>0$. Nesta conformidade, a estrutura de Y e a definição de H_c permitem determinar um número $\delta>0$ nas condições seguintes: A cada um dos pontos $({}_ix_1,{}_ix_2,\ldots,{}_ix_N)={}_ix\in X(i=1,2,\ldots,2^{K-1})$ que podem obter-se supondo $\sum_k p_{n_k}$ ímpar e supondo ${}_ix_n$ igual a a^*_{n,p_n} ou a η_n^*, conforme n for ou deixar de ser um dos n_k, a cada um desses pontos corresponde outro ponto $({}_iy_1,{}_iy_2,\ldots,{}_iy_N)={}_iy\in Y$ tal que $c_n<{}_iy_n<{}_ix_n-\delta$ se n for um α, que $c_n>{}_iy_n>{}_ix_n+\delta$ se n for um β e que se verifica sempre a desigualdade $-G_c({}_iy)\leq -H_{\eta^*,c}({}_ix)+\varepsilon$. Logo a relação *a)* do enunciado, o não-decrescimento das funções ${}_iF_c$ com respeito a cada c_n e a convenção de designar por $\tilde{\eta}$ o ponto de coordenadas $\tilde{\eta}_n$ iguais a $\eta_n^* - \delta$ ou a $\eta_n^* + \delta$, conforme n for um α ou um β, isto tudo mostra a existência dum número natural l' com a propriedade de conduzir, para qualquer $l \geqq l'$, à desigualdade

$$75) \quad \varepsilon \cdot 2^K - \Sigma' H_{\eta^*, c}(a^*_{n_1, p_{n_1}}, \ldots, a^*_{n_K, p_{n_K}}) \geqq \varepsilon \cdot 2^{K-1} - \\ - \sum_i G_c({}_iy) \geqq - \sum_i {}_lF_c({}_iy) \geqq - \Sigma' {}_lF_{\tilde{\eta}, c}(\tilde{a}_{n_1, p_{n_1}}, \ldots, \tilde{a}_{n_K, p_{n_K}}),$$

onde, dado k, o argumento $\tilde{a}_{n_k, p_{n_k}}$ vale $a^*_{n_k, p_{n_k}} \mp \delta$, com o sinal $-$ para os dois valores de p_{n_k} possíveis se n_k for um α e com o sinal $+$ para esses dois valores se n_k for um β. Por outro lado, a cada um dos pontos $({}_jx_1, {}_jx_2, \ldots, {}_jx_N) = {}_jx \in X$ $(j = 1, 2, \ldots, 2^{K-1})$ que podem obter-se supondo $\sum_k p_{n_k}$ par e supondo ${}_jx_n$ igual a a^*_{n, p_n} ou a η_n^*, conforme n for ou deixar de ser um dos n_k, a cada um desses pontos corresponde outro ponto $({}_jy_1, {}_jy_2, \ldots, {}_jy_N) = {}_jy \in Y$ tal que $c_n < {}_jx_n - \delta \leqq {}_jy_n < {}_jx_n$ se n for um α, que $c_n > {}_jx_n + \delta \geqq {}_jy_n > {}_jx_n$ se n for um β e que existe um número natural l'' com a propriedade de conduzir, para qualquer $l \geqq l''$, à desigualdade

$$76) \quad \varepsilon \cdot 2^K + \Sigma'' H_{\eta^*, c}(a^*_{n_1, p_{n_1}}, \ldots, a^*_{n_K, p_{n_K}}) \geqq \varepsilon \cdot 2^K + \sum_j G_c({}_jy) \geqq \\ \geqq \sum_j {}_lF_c({}_jy) \geqq \Sigma'' {}_lF_{\tilde{\eta}, c}(\tilde{a}_{n_1, p_{n_1}}, \ldots, \tilde{a}_{n_K, p_{n_K}}).$$

Mas, $\tilde{a}_{n_k, p_{n_k}}$ só pode assumir dois valores para cada k, as parcelas dos últimos membros de 75) e de 76) são, seja qual for l, valores de ${}_lF_c$ tirados da região escolhida e cada função ${}_lF_c$ é, por hipótese, privilegiada com respeito ao ponto genérico de X. Portanto, se fizermos $l \geqq \sup(l', l'')$ e se somarmos ordenadamente os membros extremos de 75) e de 76), sai, em todos os pontos da região escolhida, a relação

$$77) \quad \sum_{1 \leqslant p_{n_1}, \ldots, p_{n_K} \leqslant 2} [(-1)^{p_{n_1} + \cdots + p_{n_K}} . H_{\eta^*, c}(a^*_{n_1, p_{n_1}}, \ldots, a^*_{n_K, p_{n_K}})] \geqq \\ \geqq - \varepsilon \cdot 2^{K+1},$$

válida para qualquer valor de ε. Consequentemente, na região referida sai não-negativo o primeiro membro de 77), como quem diz o segundo membro de 74) com H, η^* e a^* em lugar de F, η e a, respectivamente. Finalmente, se a dita região for uma daquelas em que $H_{\eta^*, c}(a^*_{n_1, p_{n_1}}, \ldots, a^*_{n_K, p_{n_K}})$ pode diferir de $F_{\eta, c}(a_{n_1, p_{n_1}}, \ldots, a_{n_K, p_{n_K}})$ ou seja em que existem valores n do tipo β, então, escolhido arbitràriamente um número $h > 0$, a definição da função F_c e o não-decrescimento de H_c com respeito a cada c_n permitem determinar as grandezas η^*_β de índices β diferentes de todos os n_k e as grandezas a^*_{β, p_β} de índices β iguais a algum n_k por forma tal que *cada um* dos 2^K termos H do primeiro membro de 77) fique compreendido entre o termo homólogo F do segundo membro de 74) e o mesmo termo aumentado de h, facto este do qual inferimos primeiro que o segundo membro de 74) não é excedido pelo número $-h \cdot 2^{K-1}$ e inferimos em seguida, por causa da arbitrariedade de h, que o mesmo segundo membro resulta não-negativo.

As considerações acabadas de fazer obrigam a função F_c a ter a propriedade de sair *privilegiada com respeito a qualquer ponto de* X, propriedade esta que comporta os dois seguintes aspectos particulares: Pondo $K = N$, *sujeita-se* F_c *à terceira propriedade de definição duma função quase-medidora* e, pondo $K = 2$ (se possível), tira-se de 74), com o par $n_1 = s$ e $n_2 = t$ formado por um α e por um β, a relação

$$78) \quad F_{\eta, c}(a_s, b_t) - F_{\eta, c}(a_s, a_t) - F_{\eta, c}(b_s, b_t) + F_{\eta, c}(b_s, a_t) \geqq 0$$

para qualquer $\eta \in X$, *da qual deduzimos que o módulo da primeira diferença de* $F_{\eta, c}$ *com respeito à variável de índice* β *é uma função não-decrescente da variável de índice* α.

Chegados a esta altura, podemos terminar a primeira fase da nossa demonstração provando que *a função* F_c *é, em qualquer ponto, semicontínua do lado esquerdo com respeito a cada uma das suas variáveis.*

Para este fim, tomemos um ponto qualquer $(u_1, u_2, \ldots, u_N) = u$, consideremos outro ponto $(x_1, x_2, \ldots, x_N) = x$ tal que $x_\alpha = u_\alpha$ para cada α e que $x_\beta < u_\beta$ para cada β e fixemos arbitràriamente um número $\rho > 0$. Pois bem, se o número m pertencer à colecção dos β, suposta não-vazia, então, escolhido um ponto x de modo a tornar $F_c(u)+\rho>H_c(x)$, sai $H_c(x)\geqq$ $\geqq F_c(u')\geqq F_c(u)$ para todo o ponto $u'=(\ldots, u_{m-1}, u'_m, u_{m+1}, \ldots)$ tal que $x_m<u'_m\leqq u_m$; quer dizer, podemos afirmar que *no ponto u a função F_c é semicontínua do lado esquerdo com respeito a cada um dos argumentos de índice β.* Semelhantemente, se m pertencer à colecção dos α [ou dos β], suposta não-vazia, então, escolhido um ponto $(y_1, y_2, \ldots, y_N)=y$, com $c_\alpha<y_\alpha<x_\alpha$ para cada α, com $c_\beta>y_\beta>x_\beta$ para cada β e com a propriedade de tornar $H_c(x)-\rho<G_c(y)$, feito isso, sai $G_c(y)\leqq H_c(x')\leqq H_c(x)$ para todo o ponto $x'=(\ldots, x_{m-1}, x'_m, x_{m+1}, \ldots)$ tal que $y_m<x'_m\leqq x_m$ [ou $y_m>x'_m\geqq x_m$]; quer dizer, podemos afirmar, em geral, que *no ponto x a função H_c é semicontínua do lado esquerdo [ou direito] com respeito a cada um dos argumentos de índice α [ou β]* e podemos afirmar, em particular, que *no ponto u a função F_c é semicontínua do lado esquerdo com respeito a todos os seus argumentos, isto na hipótese da colecção dos α coincidir com a de todos os n.*

Suponhamos agora que a colecção dos α e a dos β são ambas não-vazias, que m pertence à primeira dessas colecções e que a outra tem P elementos. Então, a definição de F_c possibilita a escolha dum x tal que $0\leqq H_c(x)-F_c(u)<\rho/4$; mais, o não-decrescimento da função H_c com respeito a cada c_n e a sua semicontinuidade lateral esquerda na variável de índice m permitem achar um ponto x'' de coordenadas x''_n tal que $c_m<x''_m<x_m$, que $x''_n=x_n$ para $n\neq m$ e que $0\leqq H_c(x)-H_c(x'')<\rho/4$; depois, a semicontinuidade lateral direita de H_c em qualquer variável de índice β conduz a um ponto x''' de coordenadas x'''_n tal que $x'''_n=x''_n$ se n for um α, que $x''_n<x'''_n<u_n$ se n for um β e que $0\leqq H_c(x'')-H_c(x''')<\rho/4$; a seguir, uma nova aplicação da definição de F_c impõe a existência dum ponto u'' de coordenadas u''_n tal que $u''_n=x'''_n=x''_n$ se n for um α, que $x''_n<u''_n<x'''_n$ se n for um β e que $H_c(x''')\leqq F_c(u'')\leqq H_c(x'')$; por outro lado, o não-decrescimento da função F_c com respeito a cada c_n obriga o ponto u''' de coordenadas u'''_n tais que $u'''_m=u_m$ e $u'''_n=u''_n$ para $n\neq m$ a satisfazer à desigualdade $0\leqq F_c(u''')-$ $-F_c(u)\leqq H_c(x)-F_c(u)$; agora, substituições consecutivas de cada uma das P coordenadas $u''_\beta=u'''_\beta$ pela grandeza u_β correspondente, acompanhadas de P aplicações (também consecu-

tivas) da propriedade de F_c deduzida de 78), transformam u'' no ponto $\tilde{u}$ de coordenadas $\tilde{u}_n$ tal que $\tilde{u}_m = u''_m < u_m$, que $\tilde{u}_n = u_n$ para $n \neq m$ e que $0 \leqq F_c(u'') - F_c(\tilde{u}) \leqq F_c(u''') - F_c(u)$; por fim, a desigualdade óbvia $0 \leqq F_c(u) - F_c(\tilde{u}) \leqq |F_c(u) - H_c(x)| + |F_c(u'') - F_c(\tilde{u})| + |H_c(x) - H_c(x'')| + |H_c(x'') - F_c(u'')| \leqq 2 \cdot [H_c(x) - F_c(u)] + [H_c(x) - H_c(x'')] + [H_c(x'') - H_c(x''')] < \rho$ prova, atendendo mais uma vez ao não-decrescimento da função F_c com respeito a cada c_n, que *no ponto u a função F_c é semi-contínua do lado esquerdo com respeito ao argumento de índice m.*

Fica assim completada a primeira fase da nossa demonstração.

2.ª *fase*. Vamos fixar arbitràriamente um número $\varepsilon > 0$ e um ponto u que seja de continuidade para F_c e que tenha coordenadas $u_n \neq c_n$ para cada n. Então, não pode deixar de existir um número $\delta > 0$ tal que $c_\alpha < \inf\limits_\alpha (u_\alpha - \delta)$ (caso haja valores α), que $c_\beta > \sup\limits_\beta (u_\beta + \delta)$ (caso haja valores β) e que $|F_c(u) - F_c(x)| < \varepsilon$ para todo o ponto x de coordenadas x_n compreendidas entre $u_n - \delta$ e $u_n + \delta$ (com qualquer n).

Pois bem, considere-se primeiro um ponto u^* [ou u^{**}] de coordenadas $\overset{*}{u}_n$ [ou $\overset{**}{u}_n$] tais que $u_\alpha - \delta < \overset{*}{u}_\alpha < u_\alpha$ [ou $u_\alpha < \overset{**}{u}_\alpha < u_\alpha + \delta$] para cada α e que $u_\beta + \delta > \overset{*}{u}_\beta > u_\beta$ [ou $u_\beta > \overset{**}{u}_\beta > u_\beta - \delta$] para cada β, depois escolha-se outro ponto x^* [ou x^{**}] de coordenadas $\overset{*}{x}_n$ [ou $\overset{**}{x}_n$] tais que $\overset{*}{x}_\alpha = \overset{*}{u}_\alpha$ [ou $\overset{**}{x}_\alpha = \overset{**}{u}_\alpha$] para cada α, que $\overset{*}{u}_\beta > \overset{*}{x}_\beta > u_\beta$ [ou $\overset{**}{u}_\beta > \overset{**}{x}_\beta > u_\beta - \delta$] para cada β e que a função H_c (não-decrescente com respeito a cada c_n) satisfaça à desigualdade $0 \leqq H_c(x^*) - F_c(u^*) < \varepsilon$ [ou $0 \leqq H_c(x^{**}) - F_c(u^{**}) < \varepsilon$], em seguida recorra-se a um ponto $y^* \in Y$ [ou $y^{**} \in Y$] de coordenadas $\overset{*}{y}_n$ [ou $\overset{**}{y}_n$] tais que $u_\alpha - \delta < \overset{*}{y}_\alpha < \overset{*}{x}_\alpha$ [ou $u_\alpha < \overset{**}{y}_\alpha < \overset{**}{x}_\alpha$] para cada α, que $\overset{*}{u}_\beta > \overset{*}{y}_\beta > \overset{*}{x}_\beta$ [ou $\overset{**}{u}_\beta > \overset{**}{y}_\beta > \overset{**}{x}_\beta$] para cada β e que a função G_c (não-decrescente com respeito a cada c_n) satisfaça à desigualdade $0 \leqq H_c(x^*) - G_c(y^*) < \varepsilon$ [ou $0 \leqq H_c(x^{**}) - G_c(y^{**}) < \varepsilon$] e, por fim, recorde-se que qualquer função ${}_lF_c$ é não-decrescente com respeito a cada c_n. Nestas condições, é possível determinar um número l_0 com a propriedade seguinte: Seja qual for $l \geqq l_0$, sai

$$F_c(u)-3\varepsilon \leqq F_c(u^*)-2\varepsilon \leqq H_c(x^*)-2\varepsilon \leqq G_c(y^*)-\varepsilon \leqq {}_lF_c(y^*) \leqq$$
$$\leqq {}_lF_c(u) \leqq {}_lF_c(y^{**}) \leqq G_c(y^{**})+\varepsilon \leqq H_c(x^{**})+\varepsilon \leqq$$
$$\leqq F_c(u^{**})+2\varepsilon \leqq F_c(u)+3\varepsilon .$$

Portanto, ${}_lF_c(u) \to F_c(u)$, quando $l \to \infty$.

Em face do exposto, a relação ${}_lF_c(u) \to F_c(u)$ vale para todos os pontos u que são de continuidade de F_c, com excepção possível dos situados nos (quando muito N) planos paralelos aos planos coordenados (de X) caracterizados por equações da forma $u_n = c_n \neq \infty$. Por outro lado, como F_c é uma função quase-medidora associada aos c_n e privilegiada com respeito a qualquer ponto de X, a proposição XXXV distribui o conjunto dos pontos de descontinuidade de F_c por uma colecção finita ou numerável de planos paralelos aos planos coordenados. Consequentemente, aplica-se a definição de convergência fraca das funções ${}_lF_c$ para a função F_c e fica assim terminada a última fase da nossa demonstração.

Observação. É evidente que a convergência fraca de qualquer sucessão de funções é uma convergência no sentido corrente sobre um conjunto denso no seu espaço. Por isso, podemos dar o seguinte enunciado abreviado de XXXVIII: «*Considerem-se N números reais e uma sucessão formada por funções não-negativas, cada uma das quais é quase-medidora associada aos números dados e é privilegiada com respeito ao ponto genérico do espaço real X a N dimensões. Então, a sucessão considerada converge fracamente se e só se ela convergir no sentido corrente sobre um conjunto denso em X.*»

Segue um exemplo destinado a ilustrar que a função F_c referida no enunciado de XXXVIII escusa de ser o limite das funções ${}_lF_c$, quando tomada num ponto de continuidade que tenha alguma coordenada $u_n = c_n$.

Exemplo 62. Ponhamos $N=2$ e $c_1=c_2=0$ e façamos corresponder a cada l natural a função ${}_lF_c$ das variáveis reais finitas u_1 e u_2 que é igual a 1 para $u_1>0$ e para $u_1 \leqq -1/l$ e que é igual a $-l u_1$ para $-1/l \leqq u_1 \leqq 0$. Então, cada função ${}_lF_c$ sai não-negativa, quase-medidora associada a c_1 e c_2 e privilegiada com respeito ao ponto genérico do plano real X, mas deixa de sair medidora associada a c_1 e c_2, porque a isso obsta o facto de ser ${}_lF_c(u_1, 0) \neq 0$ para $u_1 \neq 0$. Como ${}_lF_c(u_1, u_2)$ converge para 1 se $u_1 \neq 0$ e para 0 se $u_1 = 0$, concluimos que $F_c(u_1, u_2)$ vale 1 em todo o ponto de X. Logo qualquer ponto de continuidade de F_c de coordenada $u_1 = 0$ torna F_c diferente do limite das funções ${}_lF_c$.

Vejamos agora um corolário importante de XXXVIII. Ei-lo.

XXXVIII') «Considerem-se $N \geqq 1$ variáveis reais finitas $u_n (n=1, 2, \ldots, N)$ e N números reais c_n, qualquer deles finito arbitrário ou infinito com sinal qualificado, e suponha-se que a cada número natural l corresponde uma função ${}_lF_c(u_1, u_2, \ldots, u_N)$ não-negativa, quase-medidora associada aos c_n e privilegiada com respeito ao ponto genérico do espaço real X a N dimensões. Então, se a sucessão das funções ${}_lF_c$ for limitada em cada ponto de X, existe uma subsucessão, extraída dela, com limite fraco (único) igual a uma função F_c não-negativa, quase-medidora associada aos c_n e privilegiada com respeito ao ponto genérico de X e igual também ao limite corrente em todos os pontos de continuidade de F_c que tenham coordenadas $u_n \neq c_n$ para todo o n.»

Demonstração de XXXVIII'. Tome-se o conjunto Y formado por todos os pontos $(y_1, y_2, \ldots, y_N) \in X$ tais que, seja qual for n, a hipótese $c_n = \infty$ obrigue a coordenada y_n a ser racional e a hipótese $c_n \neq \infty$ obrigue a diferença $y_n - c_n$ a ser racional. Então, não só a proposição XXXVII leva a sucessão das funções ${}_lF_c$ a admitir uma certa subsucessão convergente sobre Y, como também a proposição XXXVIII faz corresponder a essa subsucessão um e só um limite fraco que se encontra nas condições referidas no enunciado. Fica assim completada a nossa demonstração.

Uma consequência, por assim dizer imediata, de XXXVIII' é a proposição seguinte.

XXXVIII'') «Se a cada número natural l corresponder uma função ${}_lF_c(u_1, u_2, \ldots, u_N)$ medidora associada aos números $c_n\,(n=1, 2, \ldots, N)$, então a hipótese de a sucessão das funções ${}_lF_c$ ser limitada em qualquer ponto do espaço real X a N dimensões implica a existência duma subsucessão com limite fraco (único) igual a uma função F_c não-negativa, quase-medidora associada aos c_n e privilegiada com respeito ao ponto genérico de X e igual também ao limite corrente em todos os pontos de continuidade de F_c dotados de coordenadas $u_n \neq c_n$, para cada n.»

Demonstração de XXXVIII''. Atenda-se a XXIII e a XXXVIII'.

Passamos a dar um exemplo destinado a mostrar que a função-limite referida no enunciado de XXXVIII'' pode ser, mas não é necessàriamente uma função medidora associada aos c_n.

Exemplo 63. Tomemos $N=1$, simplifiquemos a escrita suprimindo o índice 1 das letras c e u, ponhamos $c=0$ e façamos corresponder a cada l a função ${}_lF_0(u)$, medidora associada ao número 0, que é igual a $1-e^{u/l}$ [a $1-e^{lu}$] ou a 1, conforme for $u \leqq 0$ ou $u > 0$. Nestas condições, ${}_lF_0(u)$ tem um limite igual a 0 [a 1] para $u<0$, igual a 0 para $u=0$ e igual a 1 para $u>0$, pelo que o limite fraco $F_0(u)$ sai igual a 0 [a 1] para $u \leqq 0$ e igual a 1 para $u>0$. Portanto, $F_0(u)$ é [não é] uma função medidora associada a 0.

* * *

Na parte final desta secção vamos tratar primeiro dalgumas propriedades suplementares da convergência fraca de funções quase-medidoras do tipo considerado em XXXVIII' e vamos referir depois um caso particular dessa convergência que é muito importante para o estudo de questões ulteriores. Comecemos por enunciar a proposição seguinte:

XXXIX) «Considerem-se $N \geqq 1$ números reais c_n $(n=1,2,\ldots,N)$, qualquer deles finito arbitrário ou infinito com sinal qualificado, façam-se corresponder a cada n grandezas $\eta_{n,p_n}(p_n=1,2)$ tais que $-\eta_{n,1}=\eta_{n,2}=+\infty$, admita-se que, seja qual for o número natural l, o símbolo ${}_lF_c(u_1,u_2,\ldots,u_N)$ representa uma função não-negativa, quase-medidora associada aos c_n e privilegiada com respeito ao ponto genérico do espaço real X a N dimensões e suponha-se que a sucessão das funções ${}_lF_c$ converge fracamente para a função F_c. Então, primeiro a escolha de N grandezas $\eta_{n,p_n}=c_n$, se possível, conduz à relação[*]

$$a) \qquad \lim_{u_1\to\eta_{1,p_1},\ldots,u_N\to\eta_{N,p_N};|u_1|=\cdots=|u_N|} F_c(u_1,\ldots,u_N) \geqq$$

$$\geqq \lim_{l\to\infty} \max\Big[\lim_{u_1\to\eta_{1,p_1},\ldots,u_N\to\eta_{N,p_N};|u_1|=\cdots=|u_N|} {}_lF_c(u_1,\ldots,u_N)\Big],$$

depois a escolha de quaisquer N grandezas η_{n,p_n} de índices n todos distintos e tais que $\eta_{n,p_n}\neq c_n$ para cada n implica a relação

$$b) \qquad \lim_{u_1\to\eta_{1,p_1},\ldots,u_N\to\eta_{N,p_N};|u_1|=\cdots=|u_N|} F_c(u_1,\ldots,u_N) \leqq$$

$$\leqq \lim_{l\to\infty} \min\Big[\lim_{u_1\to\eta_{1,p_1},\ldots,u_N\to\eta_{N,p_N};|u_1|=\cdots=|u_N|} {}_lF_c(u_1,\ldots,u_N)\Big]$$

e, por fim, a convenção de designar por μ e por ${}_l\mu$ as medidas determinadas respectivamente por F_c e por ${}_lF_c$ dá a fórmula

$$c) \qquad \mu(X) \leqq \lim_{l\to\infty} \min {}_l\mu(X).»$$

Demonstração de XXXIX. Iniciemos a nossa demonstração notando que o não-decrescimento das funções F_c e ${}_lF_c$ com respeito a cada c_n, assegurado por XXXVIII e pela parte final do terceiro trecho da secção n.º 35, não só impõe a existência dos limites (ordinários) postos na relação *b)* [ou *a)*], digamos T [ou S] para F_c e ${}_lT$ [ou ${}_lS$] para ${}_lF_c$, como também impede que algum desses limites se apresente menor [ou

[*] A seguir escrevemos *lim max* para o maior e *lim min* para o menor limite ao longo de subsucessões extraídas da sucessão dos l.

maior] do que qualquer uma das grandezas em relação às quais ele é tomado. Por outro lado, a definição da convergência fraca prova que há, quando muito, uma infinidade numerável de pontos $(u_1, u_2, \ldots, u_N) = u$ tais que $|u_1| = |u_2| = \cdots \cdots = |u_N|$ e que ${}_lF_c(u)$ deixa de convergir, no sentido corrente, para $F_c(u)$. Nesta conformidade, se fosse $T - \lim_{l\to\infty} \min {}_lT = \tau > 0$ [ou $S - \lim_{l\to\infty} \max {}_lS = -\sigma < 0$], podíamos escolher u de modo que cada $l \geq l(u)$ extraído da sucessão ao longo da qual ${}_lT$ [ou ${}_lS$] tende para o seu lim min [ou lim max] desse a relação

$$ {}_lF_c(u) > F_c(u) - \tau/4 > T - \tau/2 = \lim_{l\to\infty} \min {}_lT + \tau/2 > {}_lT $$

$$ [\text{ou } {}_lF_c(u) < F_c(u) + \sigma/4 < S + \sigma/2 = \lim_{l\to\infty} \max {}_lS - \sigma/2 < {}_lS]. $$

Como esta conclusão é absurda, fica demonstrada a relação *b)* [ou *a)*].

Posto isso, notemos que o segundo trecho desta secção e as propriedades da função F_c afirmadas em XXXVIII asseguram a existência das medidas ${}_l\mu$ e μ referidas no nosso enunciado. Então, se fizermos $K = N$ e se substituirmos $Q_{n,c} = Q_c$ por F_c em 72), sai o primeiro membro igual a uma função Θ das 2 N variáveis a_n e $b_n \geq a_n$ tal que

$$ \Theta(a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N) = \mu\left(\prod_{1 \leq n \leq N} \{a_n \leq x_n < b_n\}\right). $$

Semelhantemente, se fizermos $K = N$ e se substituirmos Q_c por ${}_lF_c$ em 72), sai o primeiro membro igual a uma função ${}_l\Theta$ das 2 N variáveis citadas tal que

$$ {}_l\Theta(a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N) = {}_l\mu\left(\prod_{1 \leq n \leq N} \{a_n \leq x_n < b_n\}\right). $$

Evidentemente, não só a função Θ (e qualquer função ${}_l\Theta$) não decresce, caso algum a_n decresça ou caso algum b_n cresça, como também os pontos $(a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N) = w$ possíveis apresentam, quando muito, uma infinidade numerável de coordenadas a_n e b_n para as quais ${}_l\Theta(w)$ deixa de convergir, no sentido corrente, para $\Theta(w)$. Por outro lado, o trecho final do enunciado de XX esclarece que $\mu(X) = \sup_w \Theta(w)$ e que ${}_l\mu(X) = \sup_w {}_l\Theta(w)$, para cada l. Nesta conformidade, se fosse $\mu(X) - \lim_{l\to\infty} \min {}_l\mu(X) = \varrho > 0$, podíamos escolher w de modo que cada $l \geqq l(w)$ extraído da sucessão ao longo da qual ${}_l\mu(X)$ tende para o seu lim min desse a relação

$$ {}_l\Theta(w) > \Theta(w) - \varrho/4 > \mu(X) - \varrho/2 = \lim_{l\to\infty} \min {}_l\mu(X) + \varrho/2 > {}_l\mu(X). $$

Como esta conclusão é absurda, fica provada a fórmula *c)* e, portanto, fica terminada a nossa demonstração.

Observação. Caso ${}_lF_c(u) \uparrow F_c(u)$ [ou $\downarrow F_c(u)$] em pontos $u = (u_1, \ldots, u_N)$ tirados da relação *b)* [ou *a)*] e arbitràriamente próximos de $(\eta_{1,p_1}, \ldots, \eta_{N,p_N})$, caso suceda isso, verifica-se, para os pontos referidos e para qualquer l, a desigualdade $T \geqq F_c(u) \geqq {}_lF_c(u)$ [ou $S \leqq F_c(u) \leqq {}_lF_c(u)$], da qual tiramos, fazendo primeiro $u_n \longrightarrow \eta_{n,p_n}$ com $n = 1, \ldots, N$ e tomando depois em conta a definição de lim max [ou lim min], que se verifica a nova desigualdade $T \geqq \lim_{l\to\infty} \max {}_lT$ [ou $S \leqq \lim_{l\to\infty} \min {}_lS$], como quem diz, que se verifica a igualdade $T = \lim_{l\to\infty} {}_lT$ [ou $S = \lim_{l\to\infty} {}_lS$]. Semelhantemente, caso ${}_l\Theta(w) \uparrow \Theta(w)$ em pontos $w = (a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N)$ arbitràriamente próximos de $(-\infty, \ldots, -\infty, +\infty, \ldots, +\infty)$, então verifica-se, para os pontos referidos e para qualquer l, a desigualdade $\mu(X) \geqq \Theta(w) \geqq {}_l\Theta(w)$, da qual tiramos, fazendo $a_n \longrightarrow -\infty$ e $b_n \longrightarrow +\infty$ com $n = 1, \ldots, N$, que se verifica a nova desigualdade $\mu(X) \geqq \lim_{l\to\infty} \max {}_l\mu(X)$, como quem diz, que se verifica a igualdade $\mu(X) = \lim_{l\to\infty} {}_l\mu(X)$.

* * *

Terminemos esta secção com um breve estudo da noção de *convergência completa.*

Admitamos que a cada número natural l corresponde uma função ${}_lF_c$ não-negativa, quase-medidora associada aos números $c_1, c_2, \ldots, c_N$ e privilegiada com respeito ao ponto genérico do espaço real X a N dimensões. Nesta conformidade, se a sucessão das funções ${}_lF_c$ convergir fracamente para a função (quase-medidora) F_c e se, além disso, as medidas ${}_l\mu$ determinadas pelas funções ${}_lF_c$ forem tais que $\lim\limits_{l\to\infty} {}_l\mu(X) = \mu(X)$, onde μ significa a medida determinada por F_c, então escrevemos simbòlicamente

$$79)\quad \lim_{l\to\infty} {}_lF_c \overset{c}{=\!=} F_c \quad \text{ou} \quad {}_lF_c \overset{c}{\longrightarrow} F_c, \text{ quando } l \longrightarrow \infty,$$

e dizemos tanto que *F_c ou μ é o limite completo da sucessão formada pelas funções ${}_lF_c$ ou da sucessão formada pelas medidas ${}_l\mu$*, como também dizemos que *a sucessão em causa converge completamente para F_c ou para μ*. Comentamos que o emprego simultâneo do índice c de F e da letra c isolada em 79) (o qual não deve causar confusão ao leitor) é motivado pela necessidade de fazer concordar o texto presente com passagens futuras deste tratado.

Por fim, um exemplo destinado a mostrar que a convergência fraca pode ser ou deixar de ser completa.

Exemplo 64. Retomemos as funções ${}_lF_0$ e F_0 do exemplo 63. No caso $1-e^{u/l}$, a convergência fraca para F_0 não é completa, porque qualquer l dá ${}_l\mu(X)=2\neq 1=\mu(X)$. Todavia, no caso $1-e^{lu}$, a convergência fraca para F_0 já é completa, porque qualquer l dá ${}_l\mu(X)=2=\mu(X)$ (compare-se com a última observação).

41. Classificação das medidas definidas em espaços de Borel com um número finito de dimensões. Esta secção tem por fim passar uma breve revista aos principais tipos de medida μ que podem definir-se num espaço de Borel $[X(x), \mathcal{B}(B)]$ com um número finito $N \geq 1$ de dimensões.

Para começar, as medidas μ ou $\mu(B)$ referidas admitem várias classificações em função do seu comportamento nos diversos planos P paralelos aos planos coordenados de X.

Assim, dada uma medida μ definida em $(X, \mathscr{B})$, ela diz-se *imprópria* (e também *degenerada*) ou *própria* (e também *não-degenerada*) conforme existir ou deixar de existir algum plano P tal que $\mu(P^-)=0$. A este propósito, talvez seja oportuno recordar que no caso $N=1$ um plano P se reduz a um conjunto elementar.

Mais, dada uma medida μ definida em $(X, \mathscr{B})$, ela diz-se *simples* ou *não-simples* conforme existir ou deixar de existir algum conjunto B formado pela união dum número finito de planos P e tal que $\mu(B^-)=0$ e ela diz-se *discreta* ou *não-discreta* conforme existir ou deixar de existir algum conjunto B formado pela união duma infinidade numerável de planos P e tal que $\mu(B^-)=0$.

Ainda, dada uma medida μ definida em $(X, \mathscr{B})$, ela diz-se *elementar* ou *não-elementar* conforme existir ou deixar de existir algum conjunto B formado por uma infinidade numerável de pontos (veja-se o exemplo 31) e tal que $\mu(B^-)=0$. Notamos, de passagem, que os conceitos de medida discreta e de medida elementar coincidem na hipótese $N=1$.

Por fim, dada uma medida μ definida em $(X, \mathscr{B})$, ela diz-se *descontínua* ou *contínua* conforme existir ou deixar de existir algum plano P tal que $\mu(P)>0$.

Exemplo 65. A medida nula definida em $(X, \mathscr{B})$ é simultâneamente imprópria, simples, discreta, elementar e contínua.

A última das definições acima dadas e a alínea *d)* da proposição N XXXIII provam o teorema seguinte:

XL) «Qualquer medida contínua definida num espaço de Borel $(X, \mathscr{B})$ a $N \geqq 1$ dimensões atribui o valor zero a toda a união finita ou numerável de planos paralelos aos planos coordenados de X.»

Vejamos agora um corolário de XL, a saber:

XL') «Seja $(X, \mathscr{B})$ o espaço de Borel a $N \geqq 1$ dimensões, seja $\mathscr{C}$ a subclasse principal de $\mathscr{B}$ e seja μ uma medida contínua definida em $\mathscr{B}$. Então, μ atribui a qualquer união finita ou numerável de conjuntos $C_p\,(p=1,2,3,\ldots)$ não-vazios e situados em $\mathcal{C}$ um valor que não se altera quando substituímos cada C pelo seu fecho [ou pelo seu fecho privado da fronteira].»

Demonstração de XL'. Seja qual for p, ponhamos

$$C_p = \prod_{1\leq n\leq N} \{a_{n,p} \leq x_n < b_{n,p}\} \quad \text{e} \quad D_p = \prod_{1\leq n\leq N} \{a_{n,p} \leq x_n \leq b_{n,p}\}$$

$$[\text{ou } D_p = \prod_{1\leq n\leq N} \{a_{n,p} < x_n < b_{n,p}\}],$$

de modo que D_p se identifica com o fecho de C_p [ou com o fecho de C_p privado da fronteira]. Supondo agora $\mu(\bigcup_p C_p) < +\infty$ [ou $\mu(\bigcup_p D_p) < +\infty$], a alínea *b)* de N XXXIII, a relação $(\bigcup_p T_p) - (\bigcup_p S_p) \subset \bigcup_p (T_p - S_p)$ (verificada por quaisquer conjuntos S_p e T_p extraídos de X(*)), a fórmula 9), a convenção de designar por X_n as rectas reais cujo produto é X, a proposição N VI e a proposição XL permitem escrever a desigualdade

$$0 \leq \mu(\bigcup_p D_p) - \mu(\bigcup_p C_p) = \mu((\bigcup_p D_p) - (\bigcup_p C_p)) \leq$$

$$\leq \mu(\bigcup_p (D_p - C_p)) \leq \mu(\bigcup_p [\bigcup_n (\cdots \times X_{n-1} \times \{b_{n,p}\} \times X_{n+1} \times \cdots)]) = 0$$

[ou a desigualdade que se obtém a partir da anterior pondo *a*, *C* e *D* em lugar de *b*, *D* e *C*, respectivamente],

da qual tiramos a igualdade $\mu(\bigcup_p C_p) = \mu(\bigcup_p D_p)$. A mesma igualdade é óbvia no caso $\mu(\bigcup_p C_p) = +\infty$ [ou $\mu(\bigcup_p D_p) = +\infty$] e, portanto, fica concluída a nossa demonstração.

Acrescentamos um exemplo duma medida contínua μ, definida em $(X, \mathcal{B})$, para a qual é preciso encarar a hipótese

---

(*) Com efeito, a fórmula N 12), a relação N 10 *a)*, a hipótese de o índice q ter o mesmo campo de variação que p, a igualdade N 14) e as propriedades da intersecção conduzem a

$$(\bigcup_p T_p) - (\bigcup_p S_p) = (\bigcup_p T_p) \cap (\bigcap_p S_p^-) = \bigcup_p [T_p \cap (\bigcap_q S_q^-)] \subset \bigcup_p (T_p - S_p).$$

$\mu(\bigcup_p C_p) = +\infty$ [ou $\mu(\bigcup_p D_p) = +\infty$], mencionada no fim da última demonstração.

Exemplo 66. Represente-se por B o conjunto genérico de $\mathcal{B}$ e considere-se a função $\mu(B)$ igual a 0 ou a $+\infty$ conforme existir ou deixar de existir uma união quando muito numerável U de planos P tal que $U \supset B$. Então, sai $\mu(B)$ uma medida contínua e infinita-σ e sai $\mu(\bigcup_p C_p) = \mu(\bigcup_p D_p) = +\infty$, desde que $C_p \neq O$ para algum p.

* * *

Passamos a ocupar-nos duma categoria especial de medidas μ definidas no espaço $(X, \mathcal{B})$ supramencionado, a qual é muito importante quer do ponto de vista teórico quer do ponto de vista das aplicações.

Representemos por $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ o ponto genérico de X e por $\mathcal{C}$ a subclasse principal de $\mathcal{B}$, quer dizer, a classe formada por todos os intervalos I a N dimensões tais que $I = \prod_{1 \leqq n \leqq N} \{a_n \leqq x_n < b_n\}$ onde, fixado n, as grandezas a_n e b_n se consideram arbitrárias, debaixo da condição $-\infty < a_n \leqq b_n < +\infty$. Nesta conformidade, se (e só se) a função μ sair finita sobre $\mathcal{C}$, então, por um lado, chamamos a ela *medida de Lebesgue-Stieltjes (a N dimensões* para N qualquer, *linear* para $N=1$ e *plana* para $N=2$) e, por outro lado, chamamos *medida de Lebesgue-Stieltjes* (também *a N dimensões, linear* e *plana) completa* à medida $\tilde{\mu}$ que é a completiva de μ, chamamos *corpo de Lebesgue-Stieltjes (a N dimensões, linear* e *plano)* à classe $\mathcal{B}_\mu$ que é o corpo-σ completivo de $\mathcal{B}$ com respeito a μ, chamamos *conjunto de Lebesgue-Stieltjes (a N dimensões, linear* e *plano)* a todo o conjunto extraído de $\mathcal{B}_\mu$ e chamamos *espaço de Lebesgue-Stieltjes (espaço a N dimensões* para N qualquer, *recta* para $N=1$ e *plano* para $N=2$) ao espaço de medida $(X, \mathcal{B}_\mu, \tilde{\mu})$. Talvez convenha acrescentar que muitos autores reservam a designação de medidas de Lebesgue-Stieltjes para aquelas medidas que nós designamos por medidas de Lebesgue-Stieltjes completas.

Ora, a noção (aqui adoptada) de medida de Lebesgue-Stieltjes a N dimensões anda bem próxima da noção de função medidora associada a N números tomados por ordem dos seus índices. Com efeito, vale a proposição seguinte:

XLI) «Considerem-se $N \geqq 1$ rectas de BOREL $[X_n(x_n), \mathscr{B}_n(B_n)]$ $(n=1, 2, \ldots, N)$, mais N números reais finitos c_n e ainda N variáveis reais finitas u_n. Então, para que a medida μ definida no produto das N rectas $(X_n, \mathscr{B}_n)$ resulte uma medida de Lebesgue-Stieltjes a N dimensões, é condição necessária e suficiente que a sua restrição à classe dos intervalos da forma $\prod_{1 \leqq n \leqq N} \{\inf(c_n, u_n) \leqq x_n < \sup(c_n, u_n)\}$ se reduza a uma função medidora associada aos N números c_n.»

Demonstração de XLI. A condição necessária do enunciado é uma consequência imediata da proposição XXIV. Quanto à condição suficiente, ela é uma consequência imediata da proposição XXV.

Segue um corolário de XLI, a saber:

XLI') «Qualquer medida de Lebesgue-Stieltjes é uma medida finita-σ.»

Demonstração de XLI'. O nosso corolário é uma consequência imediata de XLI e de XXV.

A proposição XLI pode generalizar-se para

XLI'') «Uma medida é de Lebesgue-Stieltjes a N dimensões se e só se ela for determinada por uma função quase-medidora dependente de N variáveis.»

Demonstração. Atenda-se ao segundo trecho do início da secção n.º 40 e à circunstância de a função medidora referida em XLI poder considerar-se uma função quase-medidora.

Chegados a esta altura, consideremos uma medida de Lebesgue-Stieltjes a $N \geqq 1$ dimensões, seja $\mu(B)$. Então, sabemos, pelo exemplo 55, que há quando muito uma infinidade numerável de planos P paralelos aos planos coordenados de

X e tais que μ atribui um valor positivo a cada um deles. Se designarmos agora por U o conjunto de Borel a N dimensões que é igual à união dos planos P referidos, podemos introduzir duas funções μ' e μ'' em $(X, \mathscr{B})$ através das igualdades de definição

$$80) \qquad \mu'(B) = \mu(B \cap U) \quad \text{e} \quad \mu''(B) = \mu(B \cap U^-),$$

das quais tiramos que *tanto* μ' *como também* μ'' *é uma medida de Lebesgue-Stieltjes a N dimensões,* isso pelas razões seguintes: Primeiro, qualquer conjunto B torna $\mu'(B) \geqq 0 \leqq \mu''(B)$; depois, qualquer colecção finita ou numerável de conjuntos $B_m \in \mathscr{B}\,(m=1,2,3,\ldots)$ disjuntos dois a dois dá, por causa de N 14') e da propriedade aditiva de μ, as igualdades $\mu'(\sum_m B_m) = \mu(\sum_m (B_m \cap U)) = \sum_m \mu'(B_m)$ e $\mu''(\sum_m B_m) = \mu(\sum_m (B_m \cap U^-)) = \sum_m \mu''(B_m)$; por fim, qualquer intervalo $I \in \mathscr{C}$ conduz, por causa de N 9 *a)* e de N XXXIII *b)*, à dupla desigualdade $\mu'(I) \leqq \mu(I) \geqq \mu''(I)$, com $\mu(I) < +\infty$.

Visto que $\mu'(B) + \mu''(B) = \mu(B \cap (U + U^-)) = \mu(B)$ para qualquer B, é uso chamar às funções μ' e μ'' *medidas parciais* ou *partes* da medida original μ. *Quanto à medida parcial* ou *parte* μ', *ela sai sempre discreta,* porque qualquer união B duma infinidade numerável de planos P tal que $B \supset U$ dá a relação $0 \leqq \mu'(B^-) \leqq \mu'(U^-) = \mu(O) = 0$. *Quanto à medida parcial* ou *parte* μ'', *ela sai sempre contínua,* porque, dado um plano P, a hipótese $P \subset U$ implica $\mu''(P) = \mu(P \cap U^-) = 0$ e a hipótese $P \subset U^-$ implica $0 \leqq \mu''(P) \leqq \mu(P) = 0$.

Vejamos agora uma proposição destinada a aclarar os significados das partes discreta e contínua duma medida de Lebesgue-Stieltjes.

XLII) «Seja $\mu(B)$ uma medida de Lebesgue-Stieltjes definida no espaço de Borel $[X(x), \mathscr{B}(B)]$ a $N \geqq 1$ dimensões, sejam μ' e μ'' as partes discreta e contínua de μ, seja F_c a função medidora que determina μ e que se encontra associada a N números reais $c_n\,(n=1,2,\ldots,N)$ admissíveis, qualquer deles finito ou igual a $+\infty$ ou igual a $-\infty$, sejam F'_c e F''_c as funções medidoras que se encontram ambas associadas aos c_n e que determinam μ' e μ'', respectivamente, e sejam P_m $(m=1,2,3,\ldots)$ os planos paralelos aos planos coordenados de X com a propriedade de tornarem $\mu(P_m)>0$ para cada m (se houver tais planos).

Então, não só μ'' anula-se e μ' sai igual a μ para qualquer conjunto B contido em $\bigcup_m P_m=U$, como também μ' anula-se e μ'' sai igual a μ para qualquer B contido em U^- e, mais geralmente, para qualquer B disjunto de $\bigcup_m E_m$ onde, dado m, o símbolo E_m significa o fecho do conjunto formado pelos pontos de descontinuidade de F_c ligados a P_m [no caso $N\leqq 2$ o símbolo E_m pode significar também um conjunto de BOREL contido em P_m que compreenda todos os pontos de descontinuidade de F_c pertencentes a P_m]. Além disso, verifica-se a igualdade entre funções $F_c=F_c'+F_c''$, a função F_c'' resulta contínua no seu campo de existência e a função F_c' fica com os mesmos pontos de continuidade e de descontinuidade que F_c. Finalmente, se $N=1$, a função F_c' sai estacionária em qualquer intervalo contido em U^-.»

Demonstração de XLII. A hipótese $B\subset U$ dá, por causa de 80), as igualdades $\mu'(B)=\mu(B)$ e $\mu''(B)=0$. Semelhantemente, a hipótese $B\subset U^-$ dá as igualdades $\mu'(B)=0$ e $\mu''(B)=\mu(B)$. Mais, como cada E_m é um conjunto de Borel (veja-se N XXX'''), a convenção $\bigcup_m E_m=E$, a relação óbvia $U\cap E^-\subset\bigcup_m(P_m-E_m)$, as alíneas *b)* e *d)* de N XXXIII e a proposição XXXII arrastam $\mu(U\cap E^-)=0$, de forma que a hipótese $B\subset E^-$ implica, por causa de $U^-\subset E^-$ e de $B=B\cap(U^-+U)\cap E^-=[B\cap U^-]+$ $+[B\cap(U\cap E^-)]$, as relações $\mu(B)=\mu(B\cap U^-)+0=\mu''(B)$ e $0\leqq\mu'(B)\leqq\mu'(U^-)+\mu'(U\cap E^-)\leqq 0+\mu(U\cap E^-)$. Deste modo fica arrumada a afirmação (da nossa tese) relativa a medidas e só falta considerar a afirmação relativa a funções medidoras.

Obtém-se a igualdade entre funções medidoras $F_c=F_c'+$ $+F_c''$ a partir da igualdade entre medidas $\mu=\mu'+\mu''$ restringindo o argumento desta última aos intervalos da forma

$$\prod_{1\leqq n\leqq N}\{\inf(c_n,u_n)\leqq x_n<\sup(c_n,u_n)\},$$

com a correcção habitual se $c_n = -\infty$. Quanto à função F_c'', ela não tem pontos de descontinuidade, porque a isso se opõem a continuidade de μ'' e a proposição XXXII. Consequentemente, a função $F_c' = F_c - F_c''$ é contínua ou descontínua juntamente com F_c. Por fim, se $N=1$, caso em que suprimimos o (único) índice 1 das possíveis grandezas a, b e x, então nenhum intervalo $I \subset U^-$ pode abranger dois pontos a e $b>a$ tais que $F_c'(b) \neq F_c'(a)$, isso porque na hipótese $a \leqq c < b$ chegávamos à conclusão absurda de que um certo número ε, sujeito à relação $0<\varepsilon<b-c$ tornava $0<F_c'(a)+F_c'(b-\varepsilon)=\mu'(\{a \leqq x < b-\varepsilon\})=0$ e porque nas hipóteses $c<a$ e $c \geqq b$ chegávamos à conclusão também absurda de que um certo número ε, sujeito à relação $0<\varepsilon<b-a$, tornava $0<|F_c'(b-\varepsilon)-F_c'(a)|=\mu'(\{a \leqq x < b-\varepsilon\})=0$. Fica assim terminada a demonstração de XLII.

Observação. A afirmação de XLII relativa a medidas esclarece que uma medida de Lebesgue-Stieltjes resulta contínua [discreta] quando e só quando coincidir com a sua parte contínua [discreta] ou ainda quando e só quando for nula a sua parte discreta [contínua].

Acrescentamos um exemplo destinado a mostrar que a propriedade referida no fim do enunciado de XLII pode falhar no caso de ser $N>1$.

Exemplo 67. Tome-se, no plano de Borel $[X(x), \mathscr{B}(B)]$, o ponto de coordenadas $c_1=c_2=0$ e considere-se a medida $\mu(B)$ tal que $\mu(\{0 \leqq x_1 < u_1\} \times \{0\}) = u_1$ para $0<u_1 \leqq 1$, que $\mu(\{0\} \times \{0 \leqq x_2 < u_2\}) = u_2$ para $0<u_2 \leqq 1$ e que $\mu(B)=0$ para $B \subset X - [(\{0 \leqq x_1 < 1\} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \{0 \leqq x_2 < 1\})]$, a qual se encontra bem definida pela sua restrição à subclasse principal de $\mathscr{B}$ (veja-se a proposição XX), restrição esta que é fácil de obter com o auxílio das propriedades gerais das medidas. A medida μ determina a função medidora $F_{0,0}(u_1, u_2)$ igual a 0 se $u_1 \leqq 0$ ou se $u_2 \leqq 0$, igual a u_1+u_2 se $0<u_1, u_2 \leqq 1$, igual a $1+u_1$ se $0<u_1 \leqq 1$ e $u_2>1$, igual a $1+u_2$ se $u_1>1$ e $0<u_2 \leqq 1$ e igual a 2 se $u_1>1<u_2$. Os planos P que tornam $\mu(P)>0$ são os dois planos coordenados e só estes, a parte contínua de μ sai nula e a parte discreta confunde-se com μ. Nestas condições, tem-se

$F''_{0,0}(u_1, u_2) \equiv 0$ e $F_{0,0}(u_1, u_2) \equiv F'_{0,0}(u_1, u_2)$. Logo os pontos $(1/4, 1/4)$ e $(3/4, 3/4)$, ambos situados num mesmo intervalo contido em U^-, tornam $F'_{0,0}(3/4, 3/4) = 1\,{}^1\!/_2 > 1/2 = F'_{0,0}(1/4, 1/4)$.

* * *

Dados os N números reais $c_n (n = 1, 2, \ldots, N)$, qualquer deles finito arbitrário ou infinito com sinal qualificado, e dada a medida $\mu(B)$, definida no espaço de Borel $(X, \mathcal{B})$ a N dimensões de ponto genérico $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, diz-se que $\mu(B)$ é *associável aos números* c_n se (e só se) quaisquer valores das variáveis reais finitas u_n tornarem finita a grandeza

$$\mu(\prod_{1 \leqq n \leqq N} \{\inf(c_n, u_n) \leqq x_n < \sup(c_n, u_n)\}),$$

onde deve substituir-se $\leqq x_n$ por $< x_n$ todas as vezes que se tenha $c_n = -\infty$, ou, dito por outras palavras, se (e só se) a medida μ for restringível a uma função medidora associada aos c_n (veja-se a proposição XXIV). *Tal medida* $\mu(B)$ *resulta uma medida de Lebesgue-Stieltjes a* N *dimensões,* não só se todos os c_n forem finitos, neste caso por causa de XLI, como também se houver algum $c_n = \infty$, neste caso porque a alínea *b)* de N XXXIII torna $\mu(B)$ associável aos números c'_n tais que c'_n vale c_n ou 0 conforme c_n tiver um valor finito ou infinito.

Imediatamente se reconhece que toda a medida de Lebesgue-Stieltjes a N dimensões é associável a quaisquer N números reais finitos c_n, mas escusa de ser associável a N números reais c_n nem todos finitos. Merecem menção especial as medidas de Lebesgue-Stieltjes (a N dimensões) que são associáveis aos N números $c_1 = c_2 = \cdots = c_N = -\infty$ [ou $+\infty$], as quais consentem funçõs medidoras $F_{-\infty, -\infty, \ldots, -\infty}$ [ou $F_{+\infty, +\infty, \ldots, +\infty}$] cómodas para calcular medidas de intervalos situados na subclasse principal de $\mathcal{B}$ a partir do segundo membro de 61'), com F em lugar de T. Existem, porém, as medidas de Lebesgue-Stieltjes (a N dimensões) mais esquivas do ponto de vista aqui considerado, quer dizer, as que não são associáveis a nenhuns N números reais c_n tais que $c_n = \infty$ para algum n, conforme veremos na parte subsequente desta secção através dum caso particular importantíssimo.

Observação. Uma medida (de Lebesgue-Stieltjes) finita $\mu(B)$, definida em $(X, \mathscr{B})$, sai, òbviamente, associável a quaisquer N números reais c_n, quer eles sejam todos finitos quer não o sejam. Inversamente, uma medida $\mu(B)$ associável a quaisquer N números reais c_n é necessàriamente (de Lebesgue-Stieltjes) finita, conforme pode provar-se desenvolvendo primeiro $X = \prod_{1 \leqq n \leqq N} (\{-\infty < x_n < 0\} + \{0 \leqq x_n < +\infty\})$ segundo a fórmula 8'), aplicando depois a medida μ e a sua propriedade aditiva ao desenvolvimento obtido, usando em seguida a definição de medida associável a N números dados e recorrendo, por fim, à alínea *b)* de N XXXV.

* * *

Consideremos, mais uma vez, o espaço de Borel $[X(x), \mathscr{B}(B)]$ a $N \geqq 1$ dimensões, de ponto genérico $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$. Então, a função Θ definida na subclasse principal de $\mathscr{B}$, seja $\mathscr{C}$, através da relação

$$81) \qquad \Theta\Big(\prod_{1 \leqq n \leqq N} \{a_n \leqq x_n < b_n\}\Big) = \prod_{1 \leqq n \leqq N} (b_n - a_n),$$

suposta válida para quaisquer $2N$ números finitos a_n e $b_n \geqq a_n$, esta função constitui-se òbviamente em função aferidora finita para cada $C \in \mathscr{C}$ e quase-contínua no intervalo vazio e constitui-se também em função parcialmente aditiva $-\sigma$, conforme pode ver-se escolhendo primeiro um número natural $m \leqq N$ e um número d_m tal que $a_m \leqq d_m \leqq b_m$, atendendo depois à igualdade

$$(b_m - a_m) \cdot \prod_{n \neq m} (b_n - a_n) = (d_m - a_m) \cdot \prod_{n \neq m} (b_n - a_n) + \\ + (b_m - d_m) \cdot \prod_{n \neq m} (b_n - a_n)$$

e reproduzindo em seguida a parte da demonstração de XXV que vai desde a igualdade 64) até ao ponto em que se declara a aditividade finita de Θ.

Em face do exposto, da proposição XX e das definições dadas no segundo trecho da segunda parte desta secção, em face disso tudo, podemos afirmar que a função Θ, introduzida através de 81), admite uma e uma só extensão a uma medida definida em $(X, \mathcal{B})$ e podemos afirmar ainda que tal extensão, seja $\mathcal{L}(B)$, resulta uma medida de Lebesgue-Stieltjes (a N dimensões) infinita. É uso chamar a $\mathcal{L}$ *medida de Lebesgue (a N dimensões* para N qualquer, *linear* para $N=1$ e *plana* para $N=2$) e é ainda uso chamar *medida de Lebesgue* (também *a N dimensões, linear* e *plana) completa* à medida $\tilde{\mathcal{L}}$ que é a completiva de $\mathcal{L}$, chamar *corpo de Lebesgue (a N dimensões, linear* e *plano)* à classe $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}$ que é o corpo-σ completivo de $\mathcal{B}$ com respeito a $\mathcal{L}$, chamar *conjunto de Lebesgue (a N dimensões, linear* e *plano)* a todo o conjunto extraído de $\mathcal{B}_{\mathcal{L}}$ e chamar *espaço de Lebesgue (espaço a N dimensões* para N qualquer, *recta* para $N=1$ e *plano* para $N=2$) ao espaço de medida $(X, \mathcal{B}_{\mathcal{L}}, \tilde{\mathcal{L}})$. Semelhantemente ao caso geral das medidas de Lebesgue-Stieltjes arbitrárias, também aqui muitos autores reservam a designação de medidas de Lebesgue para aquelas medidas que nós designamos por medidas de Lebesgue completas.

Ora, a função Θ da relação 81) é uma restrição da medida de Lebesgue, esta representada por $\mathcal{L}(B)$. Logo a medida $\mathcal{L}$ atribui ao intervalo genérico $C \in \mathcal{C}$ um valor que *se confunde* com o seu comprimento ou com a sua área ou com o seu volume se igualarmos N a 1 ou a 2 ou a 3 e se recorrermos à interpretação geométrica de X dada no exemplo 8, usando eixos coordenados ortogonais. A mesma medida atribui ao conjunto C um valor que *se considera igual* ao seu «volume a N dimensões» se $N \neq 3$, volume esse denominado também «volume linear» se $N=1$, «volume plano» se $N=2$ e «hipervolume a N dimensões» se $N>3$.

Fixado arbitràriamente um produto de N intervalos lineares significativos contendo factores infinitos, seja o produto J, concluímos da parte de II relativa à continuidade inferior que sai $\mathcal{L}(J)=+\infty$. Por outro lado, fixado arbitràriamente um plano P paralelo a algum plano coordenado de X, concluímos primeiro, da parte de II relativa à continuidade superior, que qualquer intervalo a N dimensões, de factores todos finitos e contido em P, anula $\mathcal{L}$ e concluímos em seguida, da outra parte de II, que se verifica a igualdade $\mathcal{L}(P)=0$. Nestas condições, a medida infinita $\mathcal{L}(B)$ é própria, não-simples, não-discreta, não-elementar, contínua e associável a quaisquer N número reais finitos c_n, mas não é associável a nenhuns N números reais c_n tais que $c_n=\infty$ para algum n.

Escolhamos agora, de qualquer modo, N números reais finitos c_n. Então, a medida $\mathcal{L}(B)$ associa aos números escolhidos a função medidora contínua $F_{c_1,c_2,\ldots,c_N}$ das N variáveis reais finitas u_n que é definida pela igualdade

82) $$F_{c_1,c_2,\ldots,c_N}(u_1,u_2,\ldots,u_N)=\prod_{1\leq n\leq N}|u_n-c_n|,$$

a qual se simplifica para

82') $$F_{0,0,\ldots,0}(u_1,u_2,\ldots,u_N)=\prod_{1\leq n\leq N}|u_n|$$

na hipótese $c_1=c_2=\cdots=c_N=0$.

Qualquer medida de Lebesgue a $N>1$ dimensões pode construir-se, por um processo comparativamente simples, a partir de N medidas de Lebesgue lineares. Com efeito, vale a proposição seguinte:

XLIII) «A medida de Lebesgue definida no espaço de Borel $(X,\mathcal{B})$ a $N>1$ dimensões identifica-se com o produto das N medidas de Lebesgue lineares definidas nas rectas de Borel cujo produto é igual a $(X,\mathcal{B})$.»

Demonstração de XLIII. A nossa tese é uma consequência imediata da fórmula 82) e da proposição XXVI.

42. Densidades de medida. Considere-se o espaço de Borel $[X(x),\mathcal{B}(B)]$ a $N\geq1$ dimensões, tome-se a medida de Lebesgue $\mathcal{L}(B)$ a N dimensões, designem-se por $x_n\,(n=1,2,\ldots,N)$ as coordenadas de x e escolha-se uma função $\varphi(x)=\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_N)$ definida e não-negativa em X e limitada em qualquer intervalo pertencente à classe $\mathcal{C}$ que se identifica com a subclasse principal de $\mathcal{B}$. Então, se representarmos por C o conjunto enégrico de $\mathcal{C}$, torna-se aferidora *finita* em $\mathcal{C}$ a função $\Theta_\varphi(C)$ que se anula para $C=O$ e que é igual ao *integral* (N-múltiplo) *superior* [ou *inferior*] *de Darboux de* $\varphi(x)$, *estendido a* C(*), quando for $C\neq O$.

É fácil de ver que a função $\Theta_\varphi(C)$ aqui definida resulta parcialmente aditiva-σ em $\mathcal{C}$ e quase-contínua no intervalo vazio. Com efeito, há quase-continuidade porque, escolhidos um número natural $m\leqq N$, um número real finito b_m e $2\cdot(N-1)$ números reais finitos $a_n\,(n\neq m)$ e $b_n\geqq a_n$, escolhidas estas grandezas, as convenções de fazer corresponder a cada $a_m<b_m$ o intervalo $C(a_m)=\prod_{1\leqq n\leqq N}\{a_n\leqq x_n<b_n\}$ e de designar por $D(a_m)$ o fecho de $C(a_m)$ dão $0\leqq\Theta_\varphi(C(a_m))\leqq\mathcal{L}(C(a_m))\cdot\sup_{x\in D(a_m)}\varphi(x)$ e, portanto, a relação evidente $\lim_{a_m\uparrow b_m}\mathcal{L}(C(a_m))=0$ implica a nova relação $\lim_{a_m\uparrow b_m}\Theta_\varphi(C(a_m))=0=\Theta_\varphi(O)$. Reconhece-se que a função $\Theta_\varphi(C)$ resulta parcialmente aditiva-σ em $\mathcal{C}$ escolhendo primeiro m como anteriormente e um número d_m tal que $a_m\leqq\leqq d_m\leqq b_m$, atendendo depois à bem conhecida igualdade (entre integrais se $a_n<b_n$ para cada n e se $a_m<d_m<b_m$)

83) $$\Theta_\varphi(\cdots\times\{a_{m-1}\leqq x_{m-1}<b_{m-1}\}\times\{a_m\leqq x_m<b_m\}\times \quad \textit{(continua)}$$
$$\times\{a_{m+1}\leqq x_{m+1}<b_{m+1}\}\times\cdots)=$$
$$=\Theta_\varphi(\cdots\times\{a_{m-1}\leqq x_{m-1}<b_{m-1}\}\times\{a_m\leqq x_m<d_m\}\times \quad \textit{(continua)}$$
$$\times\{a_{m+1}\leqq x_{m+1}<b_{m+1}\}\times\cdots)+$$
$$+\Theta_\varphi(\cdots\times\{a_{m-1}\leqq x_{m-1}<b_{m-1}\}\times\{d_m\leqq x_m<b_m\}\times \quad \textit{(continua)}$$
$$\times\{a_{m+1}\leqq x_{m+1}<b_{m+1}\}\times\cdots)$$

(*) Para formarmos o integral superior [ou inferior] de Darboux, estendido a C, partimos de decomposições sucessivas de C em somas de conjuntos pertencentes a $\mathcal{C}$ e fazemos corresponder à decomposição genérica o somatório de todos os produtos que podem obter-se multiplicando a medida de Lebesgue de cada elemento da decomposição pelo supremo [ou ínfimo] da função integranda relativo, por opção, quer a esse elemento quer ao seu fecho quer ainda ao seu fecho privado da fronteira. Evidentemente, a medida de Lebesgue dum elemento duma decomposição pode igualar-se à *chamada* «medida» de Jordan do mesmo elemento ou seja ao valor que lhe atribui a teoria elementar do integral de Darboux ou de Riemann (compare-se com o texto da pág. 261).

e reproduzindo em seguida a parte da demonstração de XXV que vai desde 64), com Θ a desempenhar o papel de Θ_φ, até ao ponto onde se declara a aditividade finita de Θ.

Em face do exposto, da proposição XX e da definição dada no início da segunda parte da secção 41, em face disso tudo, podemos afirmar que o integral (N-múltiplo) superior [ou inferior] de Darboux de $\varphi(x)$, considerado como função de C, pode estender-se dum e dum só modo a uma medida definida em $\mathcal{B}$, digamos $\mu_\varphi(B)$, a qual é de Lebesgue-Stieltjes a N dimensões. Esta medida resulta *contínua* porque, se escolhermos primeiro um número natural $m \leqq N$ e um valor ξ_m da variável x_m e se fizermos corresponder em seguida a quaisquer números naturais

$$\cdots, p_{m-1}, p_m, p_{m+1}, \cdots$$

o intervalo

$$\cdots \times \{-p_{m-1} \leqq x_{m-1} < p_{m-1}\} \times \{\xi_m \leqq x_m < \xi_m + 1/p_m\} \times$$
$$\times \{-p_{m+1} \leqq x_{m+1} < p_{m+1}\} \times \cdots = C(\cdots, p_{m-1}, \xi_m, p_m, p_{m+1}, \cdots),$$

de fecho

$$D(\cdots, p_{m-1}, \xi_m, p_m, p_{m+1}, \cdots),$$

então verifica-se a desigualdade

$$0 \leqq \mu_\varphi(C(\cdots, p_{m-1}, \xi_m, p_m, p_{m+1}, \cdots)) \leqq 2^{N-1} \cdot (\prod_{n \neq m} p_m) \cdot$$
$$\cdot (1/p_m) \cdot \sup_{x \in D(\cdots, p_{m-1}, \xi_m, 1, p_{m+1}, \cdots)} \varphi(x)$$

para qualquer p_m e, portanto, a proposição II, juntamente com as fórmulas 10) e 8), implica que o plano P_m caracterizado pela equação $x_m = \xi_m$ fique com o valor

$$\mu_\varphi(P_m) =$$
$$= \lim_{\cdots, p_{m-1}, p_{m+1}, \cdots \uparrow +\infty} [\lim_{p_m \uparrow +\infty} \mu_\varphi(C(\cdots, p_{m-1}, \xi_m, p_m, p_{m+1}, \cdots))] = 0.$$

Podemos resumir o estudo aqui feito dizendo que qualquer função $\varphi(x)$ definida e não-negativa em X e limitada em cada intervalo C determina uma (e uma só) medida, contínua e de Lebesgue-Stieltjes a N dimensões, seja $\mu_\varphi(B)$, tal que, seja qual for $C \neq O$, o valor $\mu_\varphi(C)$ coincide com o integral (N-múltiplo) superior [ou inferior] de Darboux de $\varphi(x)$, estendido a C. Dada uma função $\varphi(x)$ que se encontre nas condições apontadas, é uso chamar-lhe *densidade superior* [ou *inferior*] (a N dimensões) *da medida* μ_φ correspondente. Tal densidade não é a única em relação a μ_φ, porque sabemos que é possível mudar o valor da função φ em certos pontos x sem alterar o integral superior [ou inferior] de Darboux de φ, estendido a qualquer C.

Exemplo 68. Suponhamos $N=1$, omitamos os índices 1 das letras a, b e x e consideremos a função $\varphi(x)$ que vale 1 ou 0 conforme x for racional ou irracional. Nesta conformidade, dado o intervalo $\{a \leqq x < b\} = C \neq O$, toma $\Theta_\varphi(C)$ o valor $b-a$ ou 0 conforme interpretarmos Θ_φ como integral (simples) superior ou inferior de Darboux de φ, estendido a C. Caso sigamos a primeira interpretação, fica $\varphi(x)$ uma densidade superior (linear) da medida de Lebesgue linear e, caso sigamos a outra interpretação, fica $\varphi(x)$ uma densidade inferior (linear) da medida nula definida na recta de Borel. Claro que a função $\varphi(x) \equiv 1$ é outra densidade superior da medida de Lebesgue linear e é também uma densidade inferior da mesma medida. Semelhantemente, a função $\varphi(x) \equiv 0$ é outra densidade inferior da medida nula definida na recta de Borel e é também uma densidade superior da mesma medida.

Continuemos esta parte da secção 42 considerando o caso particular em que não só $\varphi(x)$ é uma função definida e não-negativa em X e limitada em cada intervalo C, como também existe o *integral* (N-múltiplo) *de Riemann de* $\varphi(x)$, *estendido a* C(*), quando for $C \neq O$. Neste caso, se a função $\Theta_\varphi(C)$ for nula

(*) Para formarmos o integral de Riemann, estendido a C, procedemos dum modo semelhante ao descrito na nota anterior, com a diferença de substituirmos o factor igual ao supremo [respectivamente ao ínfimo] aí referido por um número arbitrário compreendido, em sentido lato, entre para $C=O$ e coincidir com o dito integral de Riemann para $C \neq O$, então ela admite uma (e uma só) extensão a uma medida $\mu_\varphi(B)$, a qual sai contínua e de Lebesgue-Stieltjes a N dimensões. Agora a função φ é simultâneamente uma densidade superior e uma densidade inferior (a N dimensões) da medida μ_φ, pelo que ela recebe a designação abreviada de *densidade* (a N dimensões) *da medida* μ_φ. Tal densidade não é a única em relação a μ_φ, isto por um motivo semelhante ao invocado para justificar a existência de várias densidades superiores ou inferiores.

Suponhamos agora que B é um conjunto de Borel a N dimensões para o qual sabemos definir o integral (N-múltiplo) de Riemann de $\varphi(x)$, estendido a B, integral este que vamos representar pelo símbolo ${}^{\mathcal{R}}\int_B \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_N)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_N$ ou ainda pelo símbolo simplificado ${}^{\mathcal{R}}\int_B \varphi(x)\, dx$. Na teoria *elementar* do integral de Riemann admite-se sempre que o campo de integração B faz o efeito dum campo limitado e igual à união finita ou numerável U de conjuntos não-vazios $C_p \in \mathcal{C}\,(p=1, 2, 3, \ldots)$, disjuntos dois a dois, ou então, *indiferentemente,* igual à união V dos fechos D_p dos intervalos C_p considerados. Nestas condições, caso exista um último valor P de p, a proposição XL′, a aditividade e a definição da medida μ_φ e as propriedades do integral de Riemann arrastam a igualdade

84) $$\mu_\varphi(V) = \mu_\varphi(U) = \sum_p \mu_\varphi(C_p) = \sum_p {}^{\mathcal{R}}\int_{D_p} \varphi(x)\, dx = {}^{\mathcal{R}}\int_V \varphi(x)\, dx.$$

Por outro lado, se a colecção dos valores p possíveis for infinita, então primeiro a continuidade da medida de Lebesgue $\mathcal{L}$ a N dimensões, a proposição XL′, a propriedade aditiva de $\mathcal{L}$ e a convenção $\bigcup_{1 \leq p \leq P} D_p = V_P$ para qualquer P natural, tudo isto dá a relação

85) $$\mathcal{L}(V) = \mathcal{L}(\sum_p C_p) = \lim_{P \uparrow \infty} \sum_{1 \leq p \leq P} \mathcal{L}(C_p) = \lim_{P \uparrow \infty} \mathcal{L}(V_P)$$

---

o ínfimo e o supremo da função integranda, ambos relativos ao fecho do elemento de decomposição considerado ou, sem prejuízo do valor do integral, relativos quer ao próprio elemento quer ao seu fecho privado da fronteira.

(a qual vale também se $\mathcal{L}$ for a *chamada* «medida» de Jordan ou seja o valor genérico que é uso atribuir ao campo de integração na teoria elementar do integral de Riemann), depois 85) implica a nova relação

$$86)\qquad {}^{\mathcal{R}}\!\!\int_V \varphi(x)\,dx = \lim_{P\uparrow\infty} {}^{\mathcal{R}}\!\!\int_{V_P} \varphi(x)\,dx$$

(a qual pode provar-se, por exemplo, segundo um processo adaptado ao usado para deduzir a relação semelhante citada na página 271 do tratado «Théorie des Fonctions» de G. Valiron, segunda edição) e, por fim, a proposição XL', a parte de II relativa à continuidade inferior, a igualdade 84) aplicada ao conjunto genérico V_P e a passagem ao limite de 86) arrastam a igualdade

$$87)\qquad \mu_\varphi(V)=\mu_\varphi(U)=\lim_{P\uparrow\infty}\mu_\varphi(V_P)=\lim_{P\uparrow\infty} {}^{\mathcal{R}}\!\!\int_{V_P}\varphi(x)\,dx= {}^{\mathcal{R}}\!\!\int_V \varphi(x)\,dx.$$

A igualdade entre os membros extremos quer de 84) quer de 87) subsiste se tomarmos um campo de integração V ilimitado e equivalente à união duma sucessão de conjuntos $V_q\uparrow(q=1,2,3,...)$ tais que cada um deles seja um campo limitado do tipo V precedente e subsiste ainda se tomarmos um campo $V\subset X$ que seja a intersecção doutro campo de qualquer dos tipos anteriormente referidos com alguma união finita ou numerável de planos paralelos aos planos coordenados de X. De facto, no primeiro caso a hipótese $q\uparrow\infty$ e a proposição II levam $\mu_\varphi(V_q)= {}^{\mathcal{R}}\!\!\int_{V_q}\varphi(x)\,dx$ ao limite $\mu_\varphi(V)$, o qual, por ser o mesmo para *quaisquer* conjuntos $V_q\uparrow$ de união igual a V, não pode deixar de coincidir com o integral de Riemann (N-múltiplo impróprio ou generalizado) de $\varphi(x)$, estendido a V, integral este que vamos representar ainda pelo símbolo ${}^{\mathcal{R}}\!\!\int_V \varphi(x)\,dx$. No outro caso não só a continuidade de μ_φ e a proposição XL implicam $\mu_\varphi(V)=0$, como também vale a convenção bem familiar ${}^{\mathcal{R}}\!\!\int_V \varphi(x)\,dx=0$.

Podemos resumir os resultados aqui alcançados através da proposição seguinte:

XLIV) «Consideremos o espaço de Borel $[X(x), \mathcal{B}(B)]$ a $N \geq 1$ dimensões, representemos por $\mathcal{C}$ a subclasse principal de $\mathcal{B}$ e suponhamos que a função $\varphi(x)$, definida em X, é uma densidade de medida (a N dimensões). Então, todo o conjunto de Borel coincidente com algum campo de integração (no sentido de Riemann) que faça o efeito dum campo limitado e igual a uma união finita ou numerável de fechos de conjuntos não-vazios, estes situados em $\mathcal{C}$ e disjuntos dois a dois, que equivalha a um campo ilimitado e igual à união duma sucessão ascendente formada por campos do tipo acabado de mencionar e que seja a intersecção dum campo de qualquer dos tipos até agora referidos com alguma união finita ou numerável de planos paralelos aos planos coordenados de X, todo o conjunto V nessas condições torna verdadeira a igualdade

$$^{\mathcal{R}}\!\int_V \varphi(x)\, dx = \mu_\varphi(V),$$

onde o primeiro membro representa o integral de Riemann (N-múltiplo corrente ou generalizado) da função $\varphi(x)$, estendido a V, e onde o segundo membro representa o valor atribuido a V pela medida $\mu_\varphi(B)$, contínua e de Lebesgue-Stieltjes (a N dimensões), em relação à qual $\varphi(x)$ é uma densidade.»

Exemplo 69. Escolhamos arbitràriamente um inteiro $N \geq 1$. Então, a constante 1 é uma densidade de medida a N dimensões e a medida correspondente atribui a cada conjunto $C = \prod_{1 \leq n \leq N} \{a_n \leq x_n < b_n\} \in \mathcal{C}$ um valor que resulta igual a $\prod_{1 \leq n \leq N} (b_n - a_n)$. Daí e da relação 81) concluímos que 1 é uma densidade da medida de Lebesgue a N dimensões.

Fechamos esta parte da secção 42 generalizando primeiro o conceito de densidade de medida e deduzindo em seguida o aditamento de XLIV correspondente à generalização feita.

Suponhamos que a função $\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ possui as três propriedades seguintes: 1.ª É finita e não-negativa em X. 2.ª Aos diversos inteiros positivos $m \leq N$ correspondem números reais finitos ρ_{m, g_m}, constituindo colecções vazias ou finitas não-vazias, de modo tal que a função φ sai limitada em cada $C \in \mathcal{C}$ de fecho disjunto da união de todos os planos (paralelos aos planos coordenados) caracterizados por equações da forma $x_n = \rho_{n,g_n}$ $(n=1, 2, \ldots, N)$. 3.ª Seja qual for C, existe e é finita a função $\Theta_\varphi(C)$ que é nula para $C=O$ e que, para $C \neq O$, é igual ao *integral* (N-múltiplo) *de Riemann de* $\varphi(x)$, *quer corrente quer impróprio ou generalizado, estendido a* C.

Dado um intervalo $C = \prod_{1 \leq n \leq N} \{a_n \leq x_n < b_n\} \neq O$ e escolhido qualquer valor particular do índice n, pomos $a_n = \xi_{n,0}$, igualamos Q_n a 0 caso não existam números ρ_{n,g_n} tais que $a_n < \rho_{n,g_n} < b_n$, representamos por $\xi_{n,q_n} (q_n = 1, 2, \ldots, Q_n)$ os números ρ_{n,g_n} situados em $\{a_n < x_n < b_n\}$ e dispostos por ordem crescente, isto caso haja tais números, e tomamos a convenção $b_n = \xi_{n,Q_n+1}$ em qualquer dos casos.

Se introduzirmos agora, para qualquer n, grandezas reais $\eta_{n,\chi_n} (\chi_n = 0, 1, \ldots, 2\,Q_n + 1)$ tais que $\xi_{n,q_n} < \eta_{n,2q_n} < \eta_{n,2q_n+1} < \xi_{n,q_n+1}$ para $q_n = 0, 1, \ldots, Q_n$, então a definição do integral (N-múltiplo) de Riemann, generalizado e estendido a C, a relação entre integrais de Riemann correntes expressa em 86) e o facto de um integral de Riemann corrente ser o mesmo para um conjunto situado em $\mathcal{C}$ e para o seu fecho privado da fronteira, eis três propriedades que, por associação conveniente, obrigam

88)
$$S_\varphi(C) =$$
$$= \sum_{0 \leq q_1 \leq Q_1, 0 \leq q_2 \leq Q_2, \ldots, 0 \leq q_N \leq Q_N} \Theta_\varphi\Big(\prod_{1 \leq n \leq N} \{\eta_{n,2q_n} \leq x_n < \eta_{n,2q_n+1}\}\Big)$$

a tender não-decrescentemente para $\Theta_\varphi(C)$ quando, seja qual for n, cada uma das (Q_n+1) grandezas $\eta_{n,2q_n}$ tende, ao longo duma sucessão não-crescente *arbitrária*, para o número ξ_{n,q_n} correspondente e cada uma das (Q_n+1) grandezas $\eta_{n,2q_n+1}$ tende, ao longo duma sucessão não-decrescente *arbitrária*, para o número ξ_{n,q_n+1} correspondente. Nesta conformidade, a nossa função $\Theta_\varphi(C)$ sai *parcialmente aditiva-σ em* $\mathcal{C}$ porque: Se escolhermos um inteiro positivo $m \leq N$ e um número d_m sujeito à desigualdade $a_m \leq d_m \leq b_m$, verifica-se a igualdade 83) tanto nos casos $d_m = a_m$ e $d_m = b_m$, isto por causa da hipótese $\Theta_\varphi(O) = 0$, como também nos casos restantes, em que podemos primeiro incluir d_m na colecção dos números ρ_{m,g_m}, como quem diz igualar d_m a um número ξ_{m,q_m} de índice q_m positivo e menor do que Q_m+1, e podemos em seguida associar as parcelas de $S_\varphi(C)$ para as quais $\eta_{m,2q_m+1}<d_m$ e associar também as parcelas de $S_\varphi(C)$ para as quais $\eta_{m,2q_m}>d_m$. Por outro lado, a nossa função $\Theta_\varphi(C)$ sai também *quase-contínua no intervalo vazio* porque: Se igualarmos a grandeza d_m de 83) a $\eta_{m,2Q_m+1}$, então a primeira parcela do segundo membro de 83) fica igual ao limite do somatório designado por $S_\varphi(C)$, isto quando $\eta_{n,2q_n}\downarrow\xi_{n,q_n}$ para quaisquer valores de n e de q_n e $\eta_{n,2q_n+1}\uparrow\xi_{n,q_n+1}$ para quaisquer valores de n e de q_n com excepção do par $n=m$ e $q_m=Q_m$, pelo que $\eta_{m,2Q_m+1}\uparrow\xi_{m,Q_m+1}$ faz tender a primeira parcela referida para $\Theta_\varphi(C)$ ou seja para o primeiro membro de 83), quer dizer pelo que $d_m\uparrow b_m$ faz tender a segunda parcela do segundo membro de 83) para zero.

Em face do exposto, da proposição XX e da definição dada no início da segunda parte da secção 41, em face desta situação, podemos agora afirmar que o integral de Riemann (N-múltiplo corrente ou generalizado) de $\varphi(x)$, considerado como função de C, admite uma e uma só extensão a uma medida definida em $\mathscr{B}$, seja $\mu_\varphi(B)$, a qual resulta de Lebesgue-Stieltjes a N dimensões. Quanto à função $\varphi(x)$, chama-se-lhe usualmente *densidade* (a N dimensões) *generalizada da medida* μ_φ correspondente. Claro que esta densidade generalizada não é a única em relação a μ_φ. Além disso, também aqui a medida μ_φ sai *contínua,* isto porque: Escolhidos um número natural $m\leqq N$ e um valor ξ_m da variável x_m, basta considerar ξ_m igual a um número ξ_{m,q_m} de índice q_m positivo e inferior a Q_m+1 para que primeiro a fórmula 88), as propriedades de S_φ, a definição de μ_φ e a parte de II relativa à continuidade inferior permitam obter, por passagem ao limite, a relação

$$\Theta_\varphi(C)=\sum_{0\leqq q_1\leqq Q_1,\,0\leqq q_2\leqq Q_2,\ldots,\,0\leqq q_N\leqq Q_N}\mu_\varphi\Big(\prod_{1\leqq n\leqq N}\{\xi_{n,q_n}<x_n<\xi_{n,q_n+1}\}\Big),$$

para que depois a definição de $\Theta_\varphi(C)$, a igualdade 8') e as alíneas *c)* e *b)* de N XXXIII tornem nulo, quando $0\leqq q_1\leqq Q_1,\ldots,0\leqq q_N\leqq Q_N$, o somatório de parcela genérica

$$\mu_\varphi\Big(\Big[\prod_{1\leqq n\leqq N}\{\xi_{n,q_n}\leqq x_n<\xi_{n,q_n+1}\}\Big]-\Big[\prod_{1\leqq n\leqq N}\{\xi_{n,q_n}<x_n<\xi_{n,q_n+1}\}\Big]\Big),$$

para que em seguida a primeira parte de N 12), o facto de o complemento do termo subtractivo do argumento de μ_φ conter o lugar dos pontos $x_m=\xi_m$, a alínea *b)* de N XXXIII e a fórmula 10), por um lado, e a igualdade 8') e a propriedade associativa da adição de conjuntos, por outro lado, conduzam à relação

$$0=\mu_\varphi(\sum_{\ldots,0\leqq q_{m-1}\leqq Q_{m-1},0\leqq q_{m+1}\leqq Q_{m+1},\ldots} \qquad \textit{(continua)}$$

$$[(\prod_{n<m}\{\xi_{n,q_n}\leqq x_n<\xi_{n,q_n+1}\})\times\{\xi_m\}\times(\prod_{n>m}\{\xi_{n,q_n}\leqq x_n<\xi_{n,q_n+1}\})]=$$

$$=\mu_\varphi([\prod_{n<m}\{a_n\leqq x_n<b_n\}]\times\{\xi_m\}\times[\prod_{n>m}\{a_n\leqq x_n<b_n\}])$$

e para que, por fim, a parte de II relativa à continuidade inferior e a convenção de designar por P_m o plano caracterizado pela equação $x_m=\xi_m$ provem o resultado $\mu_\varphi(P_m)=0$.

Ora, se $\varphi(x_1, x_2,\ldots,x_N)=\varphi(x)$ for a densidade (a N dimensões) generalizada duma medida, representamos ainda por ${}^{\mathcal{R}}\!\int_B \varphi(x_1, x_2,\ldots,x_N)\,dx_1\ dx_2\ldots dx_N$ ou, abreviadamente, por ${}^{\mathcal{R}}\!\int_B \varphi(x)\,dx$ o integral de Riemann (N-múltiplo corrente ou generalizado) de $\varphi(x)$, estendido a qualquer campo de integração B incluido nalgum dos tipos anteriormente considerados. Além disso, continuamos a aceitar que, se tivermos o equivalente a um campo limitado e igual à união U de conjuntos não-vazios $C_p\in\mathcal{C}(p=1, 2, 3,\ldots)$, disjuntos dois a dois e com fechos D_p, estes de união igual a V, então a definição de ${}^{\mathcal{R}}\!\int_U \varphi(x)\ dx$ confunde-se com a de ${}^{\mathcal{R}}\!\int_V \varphi(x)\,dx$. Também mantemos a convenção de que ${}^{\mathcal{R}}\!\int_V \varphi(x)\,dx=0$ caso $V\subset X$ seja um campo de integração contido nalguma união finita ou numerável de planos paralelos aos planos coordenados de X.

Posto isso, façamos corresponder a cada parcela de $U=\sum_p C_p$ grandezas $a_{n,p}$, $b_{n,p}$, $q_{n,p}$, $Q_{n,p}$, $\chi_{n,p}$, $\xi_{n,p,q_{n,p}}$ e $\eta_{n,p,\chi_{n,p}}$ sujeitas a convenções decalcadas das referentes às grandezas a_n, b_n, q_n, Q_n, χ_n, ξ_{n,q_n} e η_{n,χ_n} utilizadas a propósito de 88), introduzamos, sejam quais forem n e p, os conjuntos $E_{n,p,2q_{n,p}}=\{\xi_{n,p,q_{n,p}}\}$, $E_{n,p,2q_{n,p}+1}=\{\xi_{n,p,q_{n,p}}<x_n<\xi_{n,p,q_{n,p}+1}\}$ e

$C_{n,p,q_{n,p}}=\{\eta_{n,p,2q_{n,p}}\leqq x_n<\eta_{n,p,2q_{n,p}+1}\}$, com $q_{n,p}=0,\ 1,\ldots,Q_{n,p}$, e suponhamos que cada grandeza $\eta_{n,p,2q_{n,p}}$ tende, ao longo duma sucessão não-crescente *arbitrária,* para o número $\xi_{n,p,q_{n,p}}$ correspondente e que cada grandeza $\eta_{n,p,2q_{n,p}+1}$ tende, ao longo duma sucessão não-decrescente *arbitrária*, para o número $\xi_{n,p,q_{n,p}+1}$ correspondente. Nesta conformidade, a definição dos números $\xi\xi$ e a igualdade 8′) permitem escrever

$$U=\sum_p[\sum_{0\leqq\chi_{1,p}\leqq 2Q_{1,p}+1,\ldots,0\leqq\chi_{N,p}\leqq 2Q_{N,p}+1}(E_{1,p,\chi_{1,p}}\times\cdots\times E_{N,p,\chi_{N,p}})]$$

e, portanto, as proposições XL e XL′ e as propriedades das medidas dão a igualdade

$$\mu_\varphi(U)=\mu_\varphi(V)=$$
$$=\mu_\varphi(\sum_p[\sum_{0\leqq q_{1,p}\leqq Q_{1,p},\ldots,0\leqq q_{N,p}\leqq Q_{N,p}}(E_{1,p,2q_{1,p}+1}\times\cdots\times E_{N,p,2q_{N,p}+1})]),$$

cujo último membro coincide com o limite da medida (variável)

$$\mu_\varphi(\sum_p[\sum_{0\leqq q_{1,p}\leqq Q_{1,p},\ldots,0\leqq q_{N,p}\leqq Q_{N,p}}(C_{1,p,q_{1,p}}\times\cdots\times C_{N,p,q_{N,p}})]),$$

isto por causa de N VI e da parte de II relativa à continuidade inferior. Por outro lado, se designarmos por U' o último argumento (variável) de μ_φ, então não só $\mu_\varphi(U')$ coincide com o integral (corrente) ${}^{\mathcal{R}}\!\int_{U'}\varphi(x)\,dx$, como também este integral tende para ${}^{\mathcal{R}}\!\int_U\varphi(x)\,dx={}^{\mathcal{R}}\!\int_V\varphi(x)\,dx$, isto porque: Primeiro podemos fazer tender para os seus limites sòmente as variáveis $\eta_{n,p,\chi_{n,p}}$ (eventuais) que nos permitam evitar a proximidade de ilimitações da função φ, depois podemos atender à circunstância de que a passagem ao limite (eventual) acabada de mencionar leva a soma das parcelas de U' por ela abrangidas a percorrer uma sucessão ascendente e leva, atendendo a II e a XL′, a grandeza $\mu_\varphi(U')$ a tender para $\mu_\varphi(U^*)$, onde U^* se obtém a partir de U' substituindo cada uma das variáveis $\eta\eta$ tendentes pelo limite respectivo, em seguida podemos igualar (eventualmente) $\mu_\varphi(U^*)$ ao integral *corrente*

${}^{\mathcal{R}}\int_{U^*} \varphi(x)\,dx$ e, por fim, caso o integral com que ficamos ainda não seja o integral (generalizado) estendido a U, neste caso podemos fazer tender para os seus limites as variáveis $\eta_{n,p}, \chi_{n,p}$ remanescentes.

Em face do exposto, não só permanecem válidas as igualdades entre os membros extremos quer de 84) quer de 87), como também ficamos habilitados a retomar as considerações postas entre 87) e XLIV. Consequentemente, vale o seguinte aditamento a XLIV:

XLIV') «A proposição XLIV continua a ser verdadeira se interpretarmos $\varphi(x)$ como a densidade (a N dimensões) generalizada duma medida.»

Observação. Caso $\psi(x)=\psi(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ seja a diferença (não necessàriamente não-negativa) de duas densidades de medida a N dimensões, suponhamos $\varphi^*(x)$ e $\varphi^{**}(x)$, cada uma delas corrente ou generalizada, usamos o símbolo

$$ {}^{\mathcal{R}}\int_B \psi(x_1, x_2, \ldots, x_N)\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_N $$

ou, abreviadamente, o símbolo ${}^{\mathcal{R}}\int_B \psi(x)\,dx$ para indicar o integral (N-múltiplo) de Riemann de $\psi(x)$ (quer corrente quer impróprio ou generalizado), estendido a qualquer conjunto de Borel B que convenha para campo de integração, aplicamos todas as convenções feitas com respeito ao integral (N-múltiplo) de Riemann duma densidade corrente ou generalizada, estendido a qualquer conjunto V do tipo considerado em XLIV e XLIV', e representamos por $\mu_{\varphi^*}(B)$ e por $\mu_{\varphi^{**}}(B)$ as medidas de Lebesgue-Stieltjes (a N dimensões) em relação às quais $\varphi^*(x)$ e $\varphi^{**}(x)$ são densidades, medidas essas que òbviamente atribuem valores finitos a qualquer B limitado. Nesta conformidade, não só as proposições XLIV e XLIV' impõem a igualdade

$$ \text{89)} \qquad {}^{\mathcal{R}}\int_V \varphi^*(x)\,dx - {}^{\mathcal{R}}\int_V \varphi^{**}(x)\,dx = \mu_{\varphi^*}(V) - \mu_{\varphi^{**}}(V) $$

para todos os conjuntos V tais que a diferença entre medidas escrita não apresente a forma indeterminada $(+\infty)-(+\infty)$, como também a definição do conceito de integral de Riemann tem por consequência pràticamente imediata a validade da igualdade

$$90) \qquad {}^{\mathcal{R}}\!\!\int_V \psi(x)\,dx = {}^{\mathcal{R}}\!\!\int_V \varphi^*(x)\,dx - {}^{\mathcal{R}}\!\!\int_V \varphi^{**}(x)\,dx$$

para todos os conjuntos V tais que a diferença entre integrais escrita não apresente a forma indeterminada $(+\infty)-(+\infty)$. Portanto, o integral do primeiro membro de 90) coincide com a diferença de medidas do segundo membro de 89) sobre a classe $\mathcal{V}$ formada pelos conjuntos V para os quais o dito segundo membro sai determinado, classe essa a que pertencem sempre todos os conjuntos V limitados e a que pertencem por vezes conjuntos V ilimitados.

* * *

Consideremos o espaço de Borel $[X(x), \mathcal{B}(B)]$ a $N \geqq 1$ dimensões, de ponto genérico $x=(x_1, x_2, \dots, x_N)$, tomemos aí uma densidade de medida, corrente ou generalizada, seja $\varphi(x)=\varphi(x_1, x_2, \dots, x_N)$, representemos por $\mu_\varphi(B)$ a medida, *contínua* e de Lebesgue-Sieltjes (a N dimensões), determinada por $\varphi(x)$, escolhamos os símbolos $u_n (n=1, 2, \dots, N)$ para designar N variáveis reais finitas, fixemos N números reais c_n, qualquer deles finito ou igual a $+\infty$ ou igual a $-\infty$, e façamos a hipótese $\mu_\varphi(B) < +\infty$ para qualquer $B=\prod\limits_n I_n$ tal que, dado n, o factor I_n é da forma $\{-\infty < x_n < u_n\}$ ou $\{c_n \leqq x_n < u_n\}$ ou $\{u_n \leqq x_n < c_n\}$ conforme tivermos $c_n = -\infty$ ou $-\infty < c_n < u_n$ ou $c_n \geqq u_n$. Claro que a hipótese feita vale sempre para números c_n todos finitos e só representa uma imposição adicional para números c_n nem todos finitos.

A situação descrita, a proposição XXIV e o penúltimo período de XLII mostram que é uma função medidora, *contínua* e associada aos número c_n, a função $F_c(u_1, u_2, \dots, u_N)$ que se obtem restringindo a medida μ_φ aos conjuntos $C(c, u) = \prod\limits_n \{\inf(c_n, u_n) \leqq x_n < \sup(c_n, u_n)\}$, onde, dado n, deve substituir-se $\leqq x_n$ por $< x_n$ caso se tenha $c_n = -\infty$. Por outro lado, as proposições XL', XLIV e XLIV', juntamente com o exemplo 48 na hipótese de haver números c_n infinitos, provam que, seja qual for o ponto u de coordenadas u_n, vale a igualdade

91) $$F_c(u_1, u_2, \ldots, u_N) = {}^{\mathcal{R}}\!\!\int_{D(c,u)} \varphi(x)\, dx,$$

com $D(c, u) = \prod_n \{\inf(c_n, u_n) \leqq x_n \leqq \sup(c_n, u_n)\}$, onde, dado n, deve substituir-se por $<$ qualquer sinal $\leqq$ posto ao pé duma grandeza infinita. Portanto, como podemos fazer coincidir o primeiro membro de 61) com o integral de $\varphi(x)$ estendido ao fecho $D(a, b)$ do argumento da função Θ, como podemos fazer isso, a igualdade 61') dá, para cada $D(a, b)$, uma relação *algébrica* interessante entre o número ${}^{\mathcal{R}}\!\!\int_{D(a,b)} \varphi(x)\, dx$ e os 2^N números que podem obter-se substituindo em ${}^{\mathcal{R}}\!\!\int_{D(c,u)} \varphi(x)\, dx$ cada uma das coordenadas u_n sucessivamente por a_n e por b_n.

Posto isso, suponhamos que é não-vazio o intervalo $\prod_n \{a_n \leqq x_n < u_n\}$ e que existe um número $h > 0$ tal que o intervalo $\prod_n \{a_n \leqq x_n < u_n + h\}$ é de continuidade para a função φ. Nestas condições, vale a igualdade

92) $$\frac{\partial^N \left[{}^{\mathcal{R}}\!\!\int_{D(a,u)} \varphi(x)\, dx \right]}{\partial u_1 \cdot \partial u_2 \ldots \partial u_N} = \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_N)$$

(a qual pode provar-se, por exemplo, seguindo um processo adaptado ao usado para deduzir a igualdade semelhante citada na página 300 do tomo I do «Cours d'Analyse Mathématique» de E. Goursat, quinta edição). Mas, a relação algébrica referida no fim do trecho anterior conduz à igualdade(*)

93) $$\frac{\partial^N \left[{}^{\mathcal{R}}\!\!\int_{D(a,u)} \varphi(x)\, dx \right]}{\partial u_1 \cdot \partial u_2 \ldots \partial u_N} = (-1)^{N(c,u)} \cdot \frac{\partial^N \left[{}^{\mathcal{R}}\!\!\int_{D(c,u)} \varphi(x)\, dx \right]}{\partial u_1 \cdot \partial u_2 \ldots \partial u_N},$$

(*) A seguir subentende-se que a derivação em ordem a u_n é *lateral esquerda* na hipótese $u_n = c_n$.

onde $N(c,u)$ *significa o número de grandezas* u_n *tais que* $u_n \leqq c_n$. Ora, as igualdades 91), 92) e 93) mostram que a relação(*)

$$94) \qquad \frac{\partial^N [F_c(u_1, u_2, \ldots, u_N)]}{\partial u_1 \cdot \partial u_2 \ldots \partial u_N} = (-1)^{N(c,u)} \cdot \varphi(u_1, u_2, \ldots, u_N)$$

se verifica para qualquer ponto u interior a um intervalo de continuidade da função φ. Em tal ponto há, pois, coincidência entre o valor absoluto da densidade dada φ e o valor absoluto(*) da «derivada mista» daquela função medidora associada aos c_n que corresponde à medida determinada por φ.

Exemplo 70. Tomemos $N=2$, $\varphi(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ e $c_1 = c_2 = 0$. A função φ é uma densidade *contínua* (corrente) no plano de Borel e determina aí uma medida μ_φ à qual corresponde a função medidora, associada aos c_n, dada pela igualdade

$$F_{0,0}(u_1, u_2) = {}^{\mathcal{R}}\!\!\int_{D(c,u)} (x_1^2 + x_2^2)\, dx_1\, dx_2,$$

com

$$D(c,u) = \{\inf(0, u_1) \leqq x_1 \leqq \sup(0, u_1)\} \times \{\inf(0, u_2) \leqq x_2 \leqq \sup(0, u_2)\}.$$

O cálculo do integral escrito conduz a $F_{0,0}(u_1, u_2) = (1/3) \cdot \cdot |u_1 u_2| \cdot (u_1^2 + u_2^2)$. Como não pode deixar de ser, a «derivada mista»(*) da função $F_{0,0}$ tem, em toda a parte, um valor igual à soma $u_1^2 + u_2^2$ multiplicada por -1 elevado ao número de grandezas u_n não-positivas.

Admitamos agora que a densidade de medida φ é contínua no conjunto Y, limitado e igual a uma união finita ou numerável de fechos tirados de intervalos a N dimensões, estes disjuntos dois a dois, consideremos N funções $x_p^* = g_p(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ $(p = 1, 2, \ldots, N)$ tais que existam e sejam contínuas em Y as N^2 derivadas parcias da primeira ordem $\partial x_p^* / \partial x_n$ $(n, p = 1, 2, \ldots, N)$ e que o (determinante) jacobiano

(*) A seguir subentende-se que a derivação em ordem a u_n é *lateral esquerda* na hipótese $u_n = c_n$.

$\dfrac{\partial(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_N^*)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_N)}$ dessas derivadas tenha em Y um módulo compreendido entre dois números positivos, interpretemos as variáveis x_p^* como coordenadas do ponto genérico x^* dum novo espaço de Borel $[X^*(x^*), \mathcal{B}^*(B^*)]$, representemos por Y^* o conjunto de X^* em que as funções g_p transformam o conjunto Y donde partimos e suponhamos Y^* um campo de integração que é do primeiro tipo considerado no enunciado de XLIV e que não pode fazer corresponder pontos sobrepostos a pontos distintos tirados de Y. Nesta conformidade, não só é certa a existência duma e apenas duma solução $x_n = g_n^*(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_N^*)$ $(n=1, 2, \ldots, N)$ do sistema das equações de ligação das variáveis x_n para as variáveis x_p^*, tal que Y coincide com o conjunto transformado de Y^* pelas funções g_n^*, que existem e saem contínuas em Y^* as N^2 derivadas parciais da primeira ordem $\partial x_n / \partial x_p^*$ e que se verifica a igualdade entre jacobianos $\dfrac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_N)}{\partial(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_N^*)} = 1 : \dfrac{\partial(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_N^*)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_N)}$, como também vale a igualdade entre integrais

95) $$^{\mathcal{R}}\!\!\int_Y \varphi(x_1, \ldots, x_N)\, dx_1 \ldots dx_N =$$

$$= {}^{\mathcal{R}}\!\!\int_{Y^*} \varphi(g_1^*(x_1^*, \ldots, x_N^*), \ldots, g_N^*(x_1^*, \ldots, x_N^*)) \cdot \left| \frac{\partial(x_1, \ldots, x_N)}{\partial(x_1^*, \ldots, x_N^*)} \right| dx_1^* \ldots dx_N^*,$$

porque primeiro XLIV e XL′ implicam a aditividade-σ de cada um dos integrais de 95) em relação aos intervalos parciais do respectivo campo de integração(*), considerados abertos e disjuntos dois a dois, e depois a transcrição para um N qualquer da propriedade expressa no teorema da pág. 275 do tratado «Théorie des Fonctions» de G. Valiron, segunda edição, quando aplicada aos intervalos parciais abertos compe-

(*) A função integranda do segundo membro de 95) pode *estender-se a uma densidade definida em X^*, atribuindo-lhe o valor zero para cada* $x^* \in Y^{*-}$.

tentes e aos seus transformados [estes quadráveis devido a N XXX''], permite concluir fàcilmente que qualquer um dos membros de 95) não pode exceder o outro.

Talvez valha a pena acrescentar duas coisas: 1.º O resultado 95) permanece válido se substituirmos Y por um conjunto Z limitado ou ilimitado e igual a uma união numerável de conjuntos $Y_P \uparrow (P=1, 2, 3, \ldots)$, todos do mesmo tipo que Y, de transformados Y_P^*, òbviamente ascendentes e supostos do mesmo tipo que Y^*, se substituirmos ainda Y^* pelo transformado Z^* de Z, quer dizer pela união dos Y_P^*(*), e se aceitarmos que a hipótese $P \uparrow \infty$ faz tender o segundo membro(**) de 95) para o respectivo integral estendido a Z^*. 2.º A função integranda do segundo membro de 95) é a *transformada duma densidade de medida* quando $x^* \in Y^*$, mas não se reduz necessàriamente a uma densidade definida em X^*; por exemplo, ela escusa de existir em todos os pontos de X^* [compare-se com a nota(*) da página anterior].

Posto isso, seja $\mathcal{L}^*(B^*)$ a medida de Lebesgue a N dimensões, definida em $(X^*, \mathcal{B}^*)$. Se fixarmos Y e se escolhermos as variáveis $x_p^* = x_p$ para $p > 1$ e a variável x_1^* por forma que $\dfrac{\partial x_1^*}{\partial x_1} = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, então sai $\dfrac{\partial(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_N^*)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_N)} = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ e, portanto, a igualdade 95), o exemplo 69 e a proposição XLIV dão a relação

$$95') \qquad {}^{\mathcal{R}}\!\!\int_Y \varphi(x_1, \ldots, x_N)\, dx_1 \ldots dx_N = \mathcal{L}^*(Y^*),$$

por vezes bastante útil nas aplicações.

Outro caso especial importante de 95) corresponde à escolha duma transformação linear ortogonal (de inversa certamente também ortogonal) $x_n = \sum\limits_{1 \leqq p \leqq N} \alpha_{n,p}\, x_p^* + \beta_n \ (n=1, 2, \ldots, N)$, onde os N símbolos β_n designam constantes reais arbitrárias e

---

(*) Atenda-se a $Z^* \subset \bigcup\limits_P Y_P^* \subset Z^*$.

(**) Quanto ao primeiro membro de 95), com Y_P em lugar de Y, a proposição XLIV *obriga-o* a tender para o integral da função φ, estendido a Z.

onde os N^2 símbolos $\alpha_{n,p}$ significam constantes reais de matriz (quadrada) com transposta igual à sua inversa e, portanto, com determinante igual a ± 1. Neste caso obtemos a relação

$$95'') \qquad {}^{\mathcal{R}}\!\!\int_Y \varphi(x_1,\dots,x_N)\,dx_1\dots dx_N =$$

$$= {}^{\mathcal{R}}\!\!\int_{Y^*} \varphi\Big(\sum_{1\leq p\leq N} \alpha_{1,p}\,x_p^* + \beta_1,\dots,\sum_{1\leq p\leq N} \alpha_{N,p}\,x_p^* + \beta_N\Big)\,dx_1^*\dots dx_N^*,$$

a qual refere uma propriedade de *invariância numérica* interessante, a saber: O valor da função integranda do primeiro membro em qualquer ponto $x \in Y$ é o mesmo que o valor da função integranda do segundo membro no ponto x^* correspondente a x. Evidentemente, a invariância numérica referida tem lugar todas as vezes que o jacobiano do segundo membro de 95) seja constantemente igual a $+1$ ou -1, quer haja transformação linear ortogonal quer não haja.

Exemplo 71. Seja(*) $Y(y)$ o produto das duas rectas reais $Y_1(y_1)$ e $Y_2(y_2)$, representemos por $X(x)$ o produto doutras duas rectas reais $X_1(x_1)$ e $X_2(x_2)$ e interpretemos o plano real X como plano euclideano dotado dum referencial cartesiano ortogonal. Então, qualquer recta R situada em X é um conjunto de Borel (veja-se o exemplo 32) caracterizado por uma (e uma só) equação da forma $x_1 \cdot \cos y_1 + x_2 \cdot \operatorname{sen} y_1 - y_2 = 0$, onde y_1 e y_2 são as chamadas *coordenadas pluckerianas* de R, quer dizer onde y_2 significa um número finito, não-negativo e igual à distância de R à origem O do referencial e onde y_1 significa um número não-negativo, menor do que 2π e igual ao ângulo (expresso em radianos e percorrido no sentido positivo) compreendido entre o semieixo positivo das abcissas e a semiperpendicular baixada de O sobre R. Nestas condições, afigura-se razoável considerar uma densidade de medida $\psi(y) = \psi(y_1, y_2)$, definida em Y, como densidade relativa às rectas possíveis em X, desde que a função ψ tome o valor zero para $y_2 < 0$, para $y_1 < 0$ e para $y_1 \geq 2\pi$. Por outro lado, considerações

(*) O símbolo Y a que vamos recorrer em seguida não deve confundir-se com o Y do estudo precedente.

elementares mostram que qualquer transformação linear ortogonal $x_1=\alpha_{1,1}\,x_1^* + \alpha_{1,2}\,x_2^* + \beta_1$, $x_2=\alpha_{2,1}\,x_1^* + \alpha_{2,2}\,x_2^* + \beta_2$ transfere O para o ponto O^* de coordenadas $x_1=\beta_1$ e $x_2=\beta_2$, faz rodar o semieixo positivo das abcissas, no sentido positivo, dum ângulo ρ de coseno igual a $\alpha_{1,1}$ e de seno igual a $\alpha_{2,1}$, é ou deixa de ser seguida da mudança do sentido de percurso sobre o eixo das ordenadas conforme tivermos uma transformação indirecta ou directa, como quem diz conforme tivermos $\alpha_{1,1}=-\alpha_{2,2}$, $\alpha_{1,2}=\alpha_{2,1}$ ou $\alpha_{1,1}=\alpha_{2,2}$, $\alpha_{1,2}=-\alpha_{2,1}$, e converte as coordenadas pluckerianas y_1 e y_2 respectivamente em y_1^* e y_2^*, ficando R com a nova equação $x_1^*\cdot\cos y_1^* + x_2^*\cdot\operatorname{sen} y_1^* - y_2^*=0$. Daí e da equação primitiva de R tiramos, sem dificuldade, as igualdades

$$\frac{\cos y_1^*}{\cos(y_1-\rho)}=\frac{\operatorname{sen} y_1^*}{\pm\operatorname{sen}(y_1-\rho)}=\frac{y_2^*}{y_2-\beta_1\cdot\cos y_1-\beta_2\cdot\operatorname{sen} y_1}=\text{constante},$$

onde vale o sinal $+$ ou $-$ conforme a transformação for directa ou indirecta e onde o quadrado da constante toma o valor 1, pelo que toda a região de continuidade conjunta das derivadas $\partial y_p^*/\partial y_n\,(n,p=1,2)$ abribui a $\partial(y_1^*,y_2^*)/\partial(y_1,y_2)$ a forma $(dy_1^*/dy_1)\cdot(\pm 1)-0\cdot(\partial y_2^*/\partial y_1)$, com dy_1^*/dy_1 igual a $+1$ ou a -1 conforme o tipo da transformação.

Consequentemente, uma transformação linear ortogonal efectuada em X dá invariância numérica simultâneamente para densidades $\varphi(x)$ relativas a pontos de X e para densidades $\psi(y)$ relativas a rectas de X, ambas referidas a conjuntos de continuidade apropriados, comodidade esta que confere muitas vezes carácter de preferência às coordenadas pluckerianas y_1 e y_2 em questões concernentes a medidas (com densidade) de rectas situadas em X.

* * *

Na última parte desta secção vamos tratar das operações da restrição, da marginação, do corte e da multiplicação de medidas com densidade.

Para começar, dado o espaço de Borel $[X(x), \mathscr{B}(B)]$ a $N\geqq 1$ dimensões, suponhamos que $\varphi(x)$ é uma densidade de medida, corrente ou generalizada e definida em X, representemos por $\mu_\varphi(B)$ a (única) medida que $\varphi(x)$ determina em $\mathcal{B}$ (a qual é contínua e de Lebesgue-Stieltjes), designemos por $\mathcal{C}$ a subclasse principal de $\mathcal{B}$ e notemos que as fórmulas 1) e N 14') e as propriedades dos conjuntos pertencentes a $\mathcal{C}$ permitem reduzir qualquer união finita ou numerável de conjuntos $C_p \in \mathcal{C}(p=1, 2, 3,...)$ a uma soma de conjuntos $C'_q \in \mathcal{C}(q=1, 2, 3,...)$, saindo a união dos fechos dos C_p igual à união dos fechos dos C'_q. Nestas condições, se o conjunto $X' \subset X$ for dalgum tipo V dos referidos no enunciado de XLIV, o mesmo sucede à intersecção de X' com o fecho D do conjunto genérico $C \in \mathcal{C}$ e, portanto, a função $\varphi'(x|X')$ que é igual a $\varphi(x)$ para $x \in X'$ e igual a 0 para $x \in X'^{-}$ resulta uma densidade de medida definida em X, a qual não só verifica a relação

$$96) \qquad {}^{\mathcal{R}}\!\!\int_C \varphi'(x|X')\,dx = {}^{\mathcal{R}}\!\!\int_{D \cap X'} \varphi(x)\,dx \neq \infty,$$

como determina também uma (e uma só) medida $\mu_{\varphi'}(B)$, medida esta que fica contínua e de Lebesgue-Stieltjes e cuja restrição à classe $\mathcal{C}$ coincide com o primeiro membro de 96). Por outro lado, a proposição XLIV força a medida $\mu'_\varphi(B|X') = \mu_\varphi(B \cap X')$, dada por 36), a satisfazer à relação

$$97) \qquad \mu'_\varphi(B|X') = {}^{\mathcal{R}}\!\!\int_{B \cap X'} \varphi(x)\,dx$$

todas as vezes que $B \cap X'$ for um campo de integração dalgum tipo V acima citado. Então, como a alínea *b)* de N XXXIII torna contínua a medida $\mu'_\varphi(B)$ que tem um valor igual a $\mu'_\varphi(B|X')$ para cada B, as relações 96) e 97) e a proposição XL' dão $\mu_{\varphi'}(C) = \mu'_\varphi(D|X') = \mu'_\varphi(C)$, de modo que não pode deixar de haver identidade entre as duas medidas $\mu_{\varphi'}(B)$ e $\mu'_\varphi(B)$. Em face do exposto torna-se plausível que consideremos a função $\varphi'(x|X')$ como sendo uma densidade da medida $\mu'_\varphi(B|X')$ e que lhe chamemos *restrição da densidade* $\varphi(x)$ *ao subespaço mensurável* X' ou *(densidade)* $\varphi(x)$ *dado* X' ou *(densidade)* $\varphi(x)$ *na hipótese* (de se verificar) X' ou ainda *(densidade)* $\varphi(x)$ *sob a condição* (de se verificar) X'.

Acrescentamos ao dito que a medida $\mu'_\varphi(B|X')$ sai sempre finita-σ [XLI' e XI] e sai nula, significativa, finita ou infinita juntamente com ${}^{\mathcal{R}}\!\int_{X'} \varphi(x)\,dx$ [97), N 9) e N XXXV].

Consideremos agora $N>1$ rectas de Borel $[X_n(x_n), \mathcal{B}_n(B_n)]$ $(n=1, 2,..., N)$, com produto igual a $[X(x), \mathcal{B}(B)]$, tomemos um número finito e positivo P e uma densidade de medida a N dimensões (corrente ou generalizada), seja $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \varphi(x)$, cindamos a colecção dos valores n possíveis em duas colecções parciais não-vazias, uma de elementos h, $i>h$, $j>i$,... e a outra de elementos s, $t>s$, $u>t$,..., estabeleçamos a convenção(*) $[X'(x'), \mathcal{B}'(B')] = \prod_{n=s,t,u,\ldots} [X_n(x_n), \mathcal{B}_n(B_n)]$, representemos por C' o conjunto genérico da classe $\mathcal{C}'$ coincidente com a subclasse principal do corpo $\mathcal{B}'$, suposto a N' dimensões, e interpretemos cada C' como a base dum cilindro $\tilde{C}$ de geratrizes paralelas a X_h, X_i, X_j,.... Nesta conformidade, se designarmos por μ_φ a medida determinada pela densidade φ e se designarmos por ${}_P\Theta'_\varphi$ a restrição a $\mathcal{C}'$ da medida marginal ${}_P\mu'_\varphi$ de μ_φ no espaço X' de valor prefixado igual a $\mu(X)/P$, então, seja qual for C', a fórmula 66) e a proposição XLIV ou XLIV' conduzem à igualdade

$$98) \qquad P \cdot {}_P\Theta'_\varphi(C') = {}^{\mathcal{R}}\!\int_{\tilde{C}} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_N)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_N.$$

Por outro lado, se admitirmos que pode definir-se uma função ${}_P\varphi'$ do ponto x' ou, equivalentemente, das variáveis $x_s, x_t, x_u,$... pela relação

$$99) \quad {}_P\varphi'(x_s, x_t, x_u, \ldots) = {}^{\mathcal{R}}\!\int_{X_h \times X_i \times X_j \times \ldots} \frac{\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_N)}{P}\, dx_h\, dx_i\, dx_j \ldots,$$

então, caso a função definida resulte uma densidade de medida a N' dimensões, corrente ou generalizada, cujo integral estendido a qualquer conjunto C' terá um valor necessàriamente

(*) O símbolo X' a que vamos recorrer em seguida nada tem que ver com o subespaço X' usado no estudo da restrição duma densidade.

finito, valor este que supomos igual a $1/P$ vezes o integral de $\varphi(x)$ estendido ao cilindro $\tilde{C}$ correspondente a C', caso suceda isso, concluímos de 98) que a medida designada por ${}_P\mu'_\varphi$ possui uma densidade confundida com a função ${}_P\varphi'$, a qual função é denominada *densidade marginal de* φ, *tomada nas variáveis* x_s, x_t, x_u,... *e reduzida na proporção de* P *para* 1, e se considera obtida por *marginação de* φ *com respeito às variáveis* x_h, x_i, x_j,... *e ao factor de escala* P.

Exemplo 72. Se $\mu_\varphi(B)$ for a medida de Lebesgue a 3 dimensões, deduzimos, no exemplo 69, que podemos supor $\varphi(x_1, x_2, x_3) \equiv 1$ em X. Então, quaisquer índices h, i,... tornam ${}^{\mathcal{R}}\!\int_{X_h \times X_i \times \ldots} 1 \cdot dx_h\, dx_i \ldots = +\infty$, pelo que não pode haver densidade marginal de φ, tomada nas variáveis $x_s, x_t, \ldots$ e reduzida na proporção dalgum P para 1. Todavia, dados os números reais finitos a_3 e $b_3 > a_3$, se igualarmos $r_\varphi(B)$ ao valor da restrição de $\mu_\varphi(B)$ ao subespaço $X_1 \times X_2 \times \{a_3 \leqq x_3 \leqq b_3\}$, obtemos uma medida com densidade $\psi(x_1, x_2, x_3)$ igual a 1 ou a 0 conforme x_3 estiver ou deixar de estar situado em $\{a_3 \leqq x_3 \leqq b_3\}$, confundindo-se a constante 1 com a densidade marginal de ψ, tomada nas variáveis x_1 e x_2 e reduzida na proporção de $b_3 - a_3$ para 1 [veja-se 99)]. O resultado que acabamos de mencionar está ligado ao assunto tratado na observação terminal da primeira parte da secção n.º 31.

Posto isso, conservemos a notação usada no texto precedente, acrescentemos a convenção $X''(x'') = \prod_{n=h,i,j,\ldots} X_n(x_n)$, escolhamos arbitràriamente $(N - N')$ números reais finitos ξ_h, ξ_i, ξ_j,... e representemos por $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_N)/(\xi_h, \xi_i, \xi_j, \ldots)$ ou, abreviadamente, por $\varphi(x_s, x_t, x_u, \ldots; \xi_h, \xi_i, \xi_j, \ldots)$ ou, ainda mais simplesmente, por $\varphi(x'; \xi'')$ a função em que se transforma a densidade $\varphi(x)$ quando se substituem nela as variáveis x_h, x_i, x_j,... pelos números ξ_h, ξ_i, ξ_j,.... Ora, caso exista e seja finito o integral de Riemann (N'-múltiplo corrente ou generalizado) da função $\varphi(x'; \xi'')$, estendido a qualquer conjunto $C' \neq O$, caso suceda isso, a função integranda fica instituida em densidade de medida (a N' dimensões) e o integral admite uma e uma só extensão a uma medida definida em $(X', \mathcal{B}')$, extensão esta que vamos indicar pelo símbolo $\mu_\varphi(B)/(\xi_h, \xi_i, \xi_j, \ldots)$ ou por $\mu_\varphi(B'; \xi_h, \xi_i, \xi_j, \ldots)$ ou ainda por $\mu_\varphi(B'; \xi'')$. Chegados a este ponto, como N XXVII identifica $(X', \mathcal{B}')$ com o corte feito em $(X, \mathcal{B})$ pelo ponto $\xi'' \in X''$, é natural que chamemos à densidade $\varphi(x'; \xi'')$ *corte feito na densidade* $\varphi(x)$ *pelo ponto* ξ'' e que consideremos a medida $\mu_\varphi(B'; \xi'')$ como *um*(*) *corte feito na medida* $\mu_\varphi(B)$ *pelo ponto* ξ''. Escusado será dizer que a medida $\mu_\varphi(B'; \xi'')$ toma, em geral, valores numéricos bem distintos dos da medida (nula) obtida por restrição de $\mu_\varphi(B)$ à intersecção de X e dos planos caracterizados pelas equações $x_h = \xi_h, x_i = \xi_i, x_j = \xi_j, \ldots$.

Chamamos a atenção do leitor para o facto de, dada uma medida dotada de densidades, o corte feito por um ponto fixo poder variar ou até esvanecer quando se altera a densidade escolhida para determinar a medida. Exemplifiquemos com a medida de Lebesgue plana, no caso de ser $h = 2$, $s = 1$ e $\xi_2 = 0$, escolhendo primeiro a densidade $\varphi(x_1, x_2) \equiv 1$, depois $\varphi(x_1, x_2)$ igual a 1 ou a 0 conforme tivermos $x_2 \neq 0$ ou $x_2 = 0$ e, por fim, $\varphi(x_1, x_2)$ igual a 1 para $x_2 \neq 0$, igual a $1/|x_1|$ para $x_2 = 0$ e $x_1 \neq 0$ e igual a 0 para $x_2 = x_1 = 0$.

Terminamos a secção n.º 42, considerando dois ou mais números naturais N', $N'' > N'$, etc., tais que o último seja igual a N, e admitindo que as funções φ', φ'', etc. são densidades de medida correntes ou generalizadas, a primeira nas variáveis $x_1, \ldots, x_{N'}$, a segunda nas variáveis $x_{N'+1}, \ldots, x_{N''}$, etc.. Então, a função φ do ponto x ou das N variáveis x_n definida pela relação

$$100) \qquad \varphi(x_1, \ldots, x_N) = \varphi'(x_1, \ldots, x_{N'}) \cdot \varphi''(x_{N'+1}, \ldots, x_{N''}) \ldots$$

resulta uma densidade de medida a N dimensões, porque: Primeiro, a função φ é finita e não-negativa em X; segundo, aos

(*) Escrevemos *um* corte e não *o* corte por um motivo que veremos algumas linhas mais abaixo.

diversos valores de n correspondem números reais finitos ρ_{n,g_n}, constituindo colecções finitas, de modo tal que cada factor do membro direito de 100) sai limitado em qualquer intervalo de fecho isento de pontos com alguma coordenada igual a algum número ρ_{n,g_n}, propriedade esta que se transmite ao respectivo produto ou seja ao membro esquerdo de 100); terceiro, sabe-se da teoria do integral de Riemann, corrente ou generalizado, que quaisquer $2N$ números reais finitos a_n e $b_n \geqq a_n$ sujeitam os intervalos $C = \prod_{1 \leqq n \leqq N} \{a_n \leqq x_n < b_n\}$, $C' = \prod_{1 \leqq n \leqq N'} \{a_n \leqq x_n < b_n\}$, $C'' = \prod_{N'+1 \leqq n \leqq N''} \{a_n \leqq x_n < b_n\}$, etc. à relação

$$\text{100}') \qquad {}^{\mathcal{R}}\!\!\int_C [\varphi'(x_1, \ldots, x_{N'}) \cdot \varphi''(x_{N'+1}, \ldots, x_{N''}) \ldots]\, dx_1 \ldots dx_N =$$
$$= \left[{}^{\mathcal{R}}\!\!\int_{C'} \varphi'(x_1, \ldots, x_{N'})\, dx_1 \ldots dx_{N'}\right] \cdot$$
$$\cdot \left[{}^{\mathcal{R}}\!\!\int_{C''} \varphi''(x_{N'+1}, \ldots, x_{N''})\, dx_{N'+1} \ldots dx_{N''}\right] \ldots \neq \infty .$$

Mas, se designarmos por μ_φ, $\mu_{\varphi'}$, $\mu_{\varphi''}$,... as medidas de densidades respectivamente φ, φ', φ'',..., então o integral do primeiro membro de 100'), com números a_n e $b_n \geqq a_n$ arbitrários, não só sai igual à restrição a $\mathcal{C}$ da medida μ_φ, isto devido às propriedades das densidades, como também sai igual à restrição a $\mathcal{C}$ do único produto das medidas $\mu_{\varphi'}$, $\mu_{\varphi''}$, etc., isto devido à proposição XXII. Pois bem, as considerações que acabamos de efectuar e a observação posta a seguir a XXII provam a proposição seguinte:

XLV) «Se φ', φ'', etc. forem densidades de medida em número finito e tais que quaisquer duas entre elas não tenham variáveis comuns, então existe um só produto das medidas correspondentes a φ', φ'', etc., o qual admite uma densidade igual ao produto (vulgar) de φ', φ'', etc..»

43. Extremantes de certas medidas definidas em espaços de Borel com um número finito de dimensões. Nesta secção vamos introduzir alguns conceitos que se revestem, por vezes, duma certa importância teórica e prática.

Consideremos uma medida $\mu(B)$, definida no espaço de Borel $[X(x), \mathscr{B}(B)]$ com um número finito $N \geqq 1$ de dimensões, e *suponhamos que é não-vazio o conjunto* Y *formado pelos pontos* $y \in X$ *tais que* $0 < \mu(\{y\}) < \mu(X)$. Quanto aos pontos (eventuais) $x \in Y^-$, pomo-los de lado no estudo subsequente, isto porque não haverá qualquer possibilidade de especulação a respeito dos factos de $\mu(\{x\}) = \mu(X)$ não ser excedido por e de $\mu(\{x\}) = 0$ não exceder nenhum outro valor da função μ.

Nesta conformidade, se existir um ponto $z \in Y$ que torne

101) $\mu(\{z\}) \geqq \mu(\{y\}) \quad [\text{ou } \mu(\{z\}) \leqq \mu(\{y\})]$

para qualquer y, diremos que $\mu(\{z\})$ é um (valor) *máximo* [ou *mínimo*] *absoluto* da medida considerada e que esta admite z como *ponto maximizante* [ou *minimizante*] *absoluto,* também chamado *ponto de medida (absolutamente) máxima* [ou *mínima*]. Além disso, dá-se o nome comum de (valores) *extremos absolutos* aos máximos e mínimos absolutos, ficando os pontos maximizantes e minimizantes absolutos com a designação comum de pontos *extremantes absolutos* ou ainda de *pontos de medida (absolutamente) extrema.* Note-se que os dois extremos absolutos existem todas as vezes que Y for um conjunto finito.

Posto isso, representemos por x_n, y_n e z_n $(n = 1, 2, \ldots, N)$ as coordenadas respectivamente de x, y e z. Então, obtemos uma ampliação útil das definições acima dadas se considerarmos um $z \in Y$ e se admitirmos a existência dum conjunto $Z \subset X$ tal que z pertença a Z, que a desigualdade 101) tenha lugar para qualquer $y \in Z$ e que Z satisfaça às seguintes condições adicionais: Escolhidos arbitràriamente os valores dos parâmetros reais e não conjuntamente nulos a_n, tome-se uma variável *positiva* t e represente-se por $x(t)$ o ponto móvel $(z_1 + a_1 t, \ldots, z_N + a_N t)$; então, se $x(t) \in Y^-$ para cada t, ponha-se $x(t) \in Z^-$ também para cada t e, se $x(t) \in Y$ para certas determinações τ de t, seleccione-se uma dessas determinações (quanto menor tanto melhor), seja τ', e ponha-se $x(t) \in Z$ para $t \leqq \tau'$. Nestes termos, $\mu(\{z\})$ resulta um (valor) *extremo* [máximo ou mínimo] *relativo* da medida considerada e o ponto z diz-se tanto *extremante* [maximizante ou minimizante] *relativo,* como também de *medida (relativamente) extrema* [máxima ou mínima]. Claro que podemos obter conceitos de extremos ainda mais restritos caso limitemos a arbitrariedade dos parâmetros a_n acima referidos.

Mencionamos, de passagem, que há quem chame *modas* aos pontos de medida (absoluta ou relativamente) máxima e chame *antimodas* aos pontos de medida (absoluta ou relativamente) mínima, muito embora estas designações costumem reservar-se para o caso em que a medida μ é normada.

Observação. Um caso particular frequente das nossas considerações é o de Y tomar a forma dum conjunto vazio, finito ou numerável. É o que sucede, em particular, quando μ é uma medida elementar [veja-se a definição respectiva na primeira parte da secção 41], quando μ é uma medida de Lebesgue-Stieltjes [iguale-se X ao somatório dos possíveis produtos $\prod\limits_{1 \leqq n \leqq N} \{k_n - 1 \leqq x_n < k_n\}$, definidos do modo indicado no texto intercalado entre 58) e 59), e atenda-se à definição de medida de Lebesgue-Stieltjes e à proposição N XXXVI] e ainda quando μ é a soma duma medida elementar com uma medida de Lebesgue-Stieltjes [veja-se N XXXIV].

Exemplo 73. Faça-se $N = 2$ e retome-se a medida μ do exemplo 45. Então, $Y = \{(1,1), (2,2)\}$ e logo se vê que cada um dos pontos $(1,1)$ e $(2,2)$ é simultâneamente maximizante e minimizante (absoluto e relativo).

* * *

Na segunda parte desta secção vamos retomar o enquadramento da primeira parte estabelecendo, porém, a hipótese de que a medida $\mu(B)$ admite uma densidade $\varphi(x_1, \ldots, x_N) = \varphi(x)$, corrente ou generalizada. Então, como a medida μ resulta contínua, a proposição XL e a alínea *b)* de N XXXIII dão $Y = O$, pelo que o estudo precedente se torna inoperante

A fim de facilitarmos a chegada a conceitos úteis, vamos supor que X se reduz à soma (finita ou numerável) de campos de integração, no sentido de Riemann, cada um dos quais é um *conjunto de continuidade* da função φ e é formado por pontos interiores, eventualmente acrescidos de pontos de acumulação dos primeiros. *Estas condições determinam a densidade φ univocamente,* isto por causa de 94) para pontos interiores e devido a passagens ao limite para os pontos restantes que houver. Assim, esquivamo-nos à indeterminação de φ no caso geral.

Posto isso, *suponhamos que é não-vazio o conjunto $\mathcal{Y}$ formado pelos pontos $y \in X$ tais que* $0 < \varphi(y)$. Quanto aos pontos (eventuais) $x \in \mathcal{Y}^-$, pomo-los de lado no estudo subsequente, isto porque não haverá qualquer possibilidade de especulação a respeito do facto de $\varphi(x) = 0$ não exceder nenhum outro valor da função φ. Então, podemos retomar as considerações da primeira parte desta secção, com φ em lugar de μ, com $\mathcal{Y}$ em lugar de Y e com supressão do símbolo $\}\ \ \{$ junto às letras z e y, salvaguardando, porém, a diferença que consiste em que o conjunto $\mathcal{Y}$ não pode ser finito, ao contrário de Y, e em que a existência dum τ (positivo) mínimo agora leva, por conveniência, a excluir de Z todos os pontos $x(t)$ admissíveis $(t > 0)$. Nestes termos, transcrevem-se as definições e as designações anteriormente introduzidas, concernentes a extremos (absolutos ou relativos), sob a reserva de ser preferível substituir o substantivo «medida» pela expressão «densidade de medida» ou, abreviadamente, pela palavra «densidade».

Observação. Como é óbvio, o estudo dos extremos aqui delineado pode tornar-se mais fácil, ocasionalmente, em regiões onde a densidade em causa tenha propriedades de derivabilidade adequadas.

Exemplo 74. Faça-se $N = 2$ e retome-se a densidade $\varphi(x) = x_1^2 + x_2^2$ do exemplo 70, a qual é contínua no plano de Borel inteiro e admite aí derivadas parciais contínuas de todos os tipos. Então, o conjunto dos pontos de positividade da função φ é $X - \}(0,0)\{$, pelo que não existe qualquer moda ou ponto de densidade máxima. Quanto ao ponto $(0,0)$, o único ponto que anula $\varphi(x)$, não é abrangido pela nossa definição de antimoda ou ponto de densidade mínima, o que evidentemente não quer dizer que esse ponto deixa de ter importância para o estudo da medida determinada por φ.

44. Momentos de medidas elementares e de medidas com densidade. Nesta secção vamos fazer um estudo apenas provisório do assunto que figura em epígrafe, porque o tratamento circunstanciado dos momentos das medidas referidas e doutras medidas exige que se disponha duma teoria da integração em espaços de medida arbitrários.

Para começar, suponhamos que é *elementar* a medida $\mu(B)$, definida na recta de Borel $[X(x), \mathcal{B}(B)]$, representemos por $\{\xi_p\}$ $(p=1, 2, 3,...)$ os conjuntos elementares $\{x\}$ (eventuais) tais que μ atribui um valor positivo a cada um deles, igualemos, para cada p, a grandeza $\mu(\{\xi_p\})$ a μ_p, fixemos arbitràriamente um número real c e um número finito $r \geqq 0$, introduzamos as convenções $\infty \cdot 0 = 0$ e $0^0 = 1$, admitamos que $(\xi_p - c)^r$ pode assumir um valor real para cada p e escolhamos o valor positivo de $(\xi_p - c)^r$ nos casos em que esta potência possui dois valores reais. Então, se (e só se) for finito o somatório $\sum_p [\mu_p \cdot |\xi_p - c|^r]$, chama-se *momento (ordinário) da ordem r* ou *r-ésimo momento (ordinário), centrado no ponto c, da medida* μ ao número $\sum_p [\mu_p \cdot (\xi_p - c)^r]$, certamente também finito, e dá-se o nome de *momento absoluto da ordem r* ou *r-ésimo momento absoluto, centrado no ponto c, da medida* μ ao valor do primeiro dos dois somatórios escritos, este finito por hipótese. Na prática omite-se correntemente a indicação «centrado no ponto c» quando $c=0$ e dá-se frequentemente a preferência aos números $r \geqq 0$ inteiros (quase sempre menores do que 5).

Escolhido o ponto c e considerada a recta de Borel $[X^*(x^*), \mathcal{B}^*(B^*)]$ de ponto genérico $x^* = x - c$, é óbvio que cada um dos momentos ordinários e absolutos acima referidos pode igualar-se ao momento homónimo da mesma ordem, subentende-se centrado no ponto 0, da nova medida $\mu^*(B^*)$ definida pelas relações $\mu_p^* = \mu^*(\{\xi_p^*\}) = \mu_p$, para cada p, e

$\mu^*(\{\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots, \{^{-})=0$, medida esta que é também elementar e a que se chama *desvio da medida* μ *com respeito ao ponto* c.

Evidentemente, o momento (ordinário ou absoluto) da ordem 0, centrado no ponto c, da medida μ vale $\mu(X)$ ou deixa de existir conforme μ for uma medida finita ou infinita. Mais, caso exista o momento da ordem 1 ou primeiro momento, centrado no ponto c, da medida μ, ele denomina-se também quer *valor médio (proporcional)*(*), *centrado no ponto* c, ou *esperança matemática (proporcional)*(**), *centrada no ponto* c, *da medida* μ, quer *valor médio (proporcional)*(*) ou *esperança matemática (proporcional)*(**) *do desvio de* μ *com respeito a* c.

Quando existe a esperança matemática, subentende-se centrada no ponto 0, da medida μ, esperança esta que é costume representar pelo símbolo E, recorre-se muitas vezes aos momentos ordinários e absolutos, centrados no ponto E, da medida μ, os quais se confundem com os momentos homólogos do *desvio da medida* μ *com respeito à sua esperança matemática*, desvio este que é costume designar abreviadamente por *desvio da medida* μ. Em particular, caso existam quer o valor médio (proporcional), quer o primeiro momento absoluto quer o segundo momento do desvio de μ, estas grandezas denominam-se respectivamente *desvio médio*, *desvio médio absoluto* ou *desvio médio linear* e *variância* ou *dispersão* da medida μ, sendo óbvio que as duas últimas grandezas resultam não-negativas e sendo frequente chamar-se *desvio médio quadrático* ou *desvio-padrão* à raiz quadrada não-negativa da última grandeza.

(*) A escolha da designação usada no texto deriva do facto de a hipótese $0<\mu(X)<+\infty$ instituir $\sum_p [\mu_p \cdot (\xi_p - c)]/\mu(X)$ em *média* ou *valor médio dos números* $\xi_p - c$ *dotados dos pesos* $\mu_p/\mu(X)$ (ou seja afectados dos coeficientes positivos $\mu_p/\mu(X)$ de soma igual a 1). Em particular, se p tiver um último valor P e se $\mu_p = 1/P$ para cada p, então fica $(1/P) \cdot \sum_p (\xi_p - c)$, como quem diz *a média aritmética* ou *o valor médio aritmético dos números* $\xi_p - c$.

(**) A escolha da designação usada no texto explica-se como segue: Suponha-se que um jogador disputa um jogo em que pode ganhar uma e uma só das quantias $\xi_p - c$ tais que $\xi_p - c > 0$ ou pode perder uma e uma só das quantias $-(\xi_p - c)$ tais que $\xi_p - c < 0$. Se for $0<\mu(X)<+\infty$ e se cada

Devemos observar que muitos autores reservam as designações de desvio, de esperança matemática e de variância ou dispersão para a hipótese de a medida μ ser normada.

Posto isso, escolhido um número natural r, a fórmula do binómio de Newton, bem conhecida da Álgebra elementar, permite exprimir o momento da ordem r, centrado no ponto c, da medida μ através da relação

102) $$\sum_p [\mu_p \cdot (\xi_p - c)^r] = \sum_{0 \leqq \rho \leqq r} \left[\frac{r!}{\rho!(r-\rho)!} \cdot (-c)^{r-\rho} \cdot \sum_p (\mu_p \, \xi_p^\rho) \right]$$

todas as vezes que existam os momentos das ordens $0, 1, \ldots, r-1, r$ da medida μ. Em especial, se existirem os momentos das ordens 0 e 1 da medida μ, então o desvio médio de μ, seja E', satisfaz à relação

102') $$E' = E \cdot [1 - \mu(X)]$$

e, se existirem os momentos das ordens 0, 1 e 2 da medida μ, então a variância ou dispersão de μ, seja V, fica ligada ao segundo momento de μ, seja F, pela relação

102'') $$V = F + E^2 \cdot [\mu(X) - 2].$$

Passamos a supor que a medida $\mu(B)$, definida em $(X, \mathscr{B})$, é contínua e de Lebesgue-Stieltjes linear e admite densidades correntes ou generalizadas, entre elas as densidades $\varphi(x)$ e $\tilde{\varphi}(x)$. Então, se $\psi(x)$ for uma função contínua e não-negativa em X, a teoria dos integrais de Riemann ensina-nos que os produtos $\psi(x) \cdot \varphi(x)$ e $\psi(x) \cdot \tilde{\varphi}(x)$ resultam ambos densidades de medida correntes ou generalizadas, pelo que existem os integrais generalizados ${}^{\mathscr{R}}\!\int_W \psi(x) \cdot \varphi(x)\, dx$ e ${}^{\mathscr{R}}\!\int_W \psi(x) \cdot \tilde{\varphi}(x)\, dx$,

---

$\mu_p / \mu(X)$ juntar ao seu significado habitual o de ser a medida que o conjunto $\{\xi_p - c\}$ tem em relação ao jogador, então a grandeza $\sum_p [\mu_p \cdot (\xi_p - c)] / \mu(X)$, suposta existente, pode representar, em certo sentido (que nos abstemos de especificar aqui), a quantia que o jogador tem o direito de *esperar* como resultado pessoal do jogo, considerando-se a quantia ganha se ela for positiva e perdida com o sinal trocado se ela for negativa.

com W a significar um conjunto ilimitado (arbitrário) e igual à união duma sucessão ascendente formada por campos de integração elementares, estes definidos no texto anterior a 84). Além disso, se a função contínua $\psi(x) \geqq 0$ for monótona, os dois integrais escritos saem forçosamente iguais, porque no caso contraditório podíamos encontrar um intervalo $D = \{a \leqq x \leqq b\}$ tal que as funções φ e $\tilde{\varphi}$ se apresentassem conjuntamente limitadas em D e que se verificasse a relação

$$0 \neq {}^{\mathcal{R}}\!\!\int_D \psi(x) \cdot \varphi(x)\, dx - {}^{\mathcal{R}}\!\!\int_D \psi(x) \cdot \tilde{\varphi}(x)\, dx =$$
$$= {}^{\mathcal{R}}\!\!\int_D \psi(x) \cdot [\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)]\, dx,$$

uma situação incompatível com o teorema da média devido a O. Bonnet, teorema este que faz corresponder à hipótese do não-crescimento da função $\psi(x)$ um conjunto $D' = \{a \leqq x \leqq b'\} \subset D$ com a propriedade de tornar

$${}^{\mathcal{R}}\!\!\int_D \psi(x) \cdot [\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)]\, dx =$$
$$= \psi(a) \cdot \left[{}^{\mathcal{R}}\!\!\int_{D'} \varphi(x)\, dx - {}^{\mathcal{R}}\!\!\int_{D'} \tilde{\varphi}(x)\, dx \right] = 0$$

e que faz corresponder à hipótese do não-decrescimento da função $\psi(x)$ um conjunto $D' = \{a' \leqq x \leqq b\} \subset D$ com a propriedade de tornar

$${}^{\mathcal{R}}\!\!\int_D \psi(x) \cdot [\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)]\, dx =$$
$$= \psi(b) \cdot \left[{}^{\mathcal{R}}\!\!\int_{D'} \varphi(x)\, dx - {}^{\mathcal{R}}\!\!\int_{D'} \tilde{\varphi}(x)\, dx \right] = 0\,.$$

Em suma, vale a *regra* seguinte: «Seja $\psi(x)$ uma função contínua e não-negativa na recta real, seja $\varphi(x)$ uma densidade de medida, corrente ou generalizada, e seja μ a medida determinada por φ. Então, existe o integral de Riemann do produto $\psi(x) \cdot \varphi(x)$, estendido a qualquer campo de integração W do tipo acima referido. Além disso, caso a função $\psi(x)$ seja monótona, tal integral resulta insensível à substituição de $\varphi(x)$ por outra densidade representativa de μ.»

Posto isso, mantemos os significados dos símbolos c e r, bem como a convenção $0^0=1$, admitimos que $(x-c)^r$ só pode deixar de assumir valores reais para pontos x situados em intervalos significativos onde φ tenha integral nulo e escolhemos o valor positivo de $(x-c)^r$ nos casos em que esta potência possui dois valores reais. Então, se (e só se) for finito o integral ${}^{\mathcal{R}}\int_X |x-c|^r \cdot \varphi(x)\, dx$, integral este independente(*) da escolha da densidade φ representativa de μ, chamamos *momento (ordinário) da ordem r* ou *r-ésimo momento (ordinário), centrado no ponto c, da medida* μ ao número ${}^{\mathcal{R}}\int_X (x-c)^r \cdot \varphi(x)\, dx$, também finito e independente(*) da escolha da densidade representativa de μ, e damos o nome de *momento absoluto da ordem r* ou *r-ésimo momento absoluto, centrado no ponto c, da medida* μ ao valor do primeiro dos dois integrais escritos.

Anàlogamente ao caso das medidas elementares, também aqui, escolhido o ponto c e considerada a recta de Borel $[X^*(x^*), \mathcal{B}^*(B^*)]$ de ponto genérico $x^*=x-c$, podemos definir o *desvio da medida* μ (B) *com respeito ao ponto c,* agora igual à medida $\mu^*(B^*)$ determinada pela função $\varphi^*(x-c)\equiv\varphi(x)$, função esta que claramente resulta uma densidade.

Nestes termos, estamos aptos a transcrever as considerações desenvolvidas a propósito duma medida μ elementar(**) até chegarmos à relação 102), a qual se modifica para

102''')
$$ {}^{\mathcal{R}}\int_X (x-c)^r \cdot \varphi(x)\, dx = $$
$$ = \sum_{0\leqq\rho\leqq r} \left[\frac{r!}{\rho!\,(r-\rho)!} \cdot (-c)^{r-\rho} \cdot {}^{\mathcal{R}}\int_X x^\rho \cdot \varphi(x)\, dx \right], $$

ficando inalteradas as formas das relações 102') e 102'').

(*) A independência alegada no texto pode reconhecer-se igualando o campo de integração W da regra precendente primeiro a $\{c \leqslant x < +\infty\}$ e depois a $\{-\infty < x < c\}$.

(**) Agora, na nota(*) da página 290, o produto de $[1/\mu(X)]$ por ${}^{\mathcal{R}}\int_X (x-c)\cdot\varphi(x)\, dx$ é *a média* ou *o valor médio* dos números $x-c$ dotados

* * *

Suponhamos agora que é *elementar* a medida $\mu(B)$, definida no produto $[X(x), \mathcal{B}(B)]$ das $N>1$ rectas de Borel $[X_n(x_n), \mathcal{B}_n(B_n)]$ $(n=1, 2,\ldots, N<+\infty)$, representemos por $\{\xi_p\}=\{(\xi_{1,p},\xi_{2,p},\ldots, \xi_{N,p})\}$ $(p=1, 2, 3,\ldots)$ os conjuntos elementares $\{x\}$ (eventuais) tais que μ atribui um valor positivo a cada um deles, igualemos, para cada p, a grandeza $\mu(\{\xi_p\})$ a μ_p, fixemos arbitràriamente um ponto $c=(c_1, c_2,\ldots, c_N)\in X$ e N números finitos $r_n\geqq 0$, conservemos as convenções $\infty\cdot 0=0$ e $0^0=1$, admitamos que $(\xi_{n,p}-c_n)^{r_n}$ pode assumir um valor real para cada par de índices n e p e escolhamos o valor positivo de $(\xi_{n,p}-c_n)^{r_n}$ nos casos em que esta potência possui dois valores reais. Então, se (e só se) for finito o somatório $\sum\limits_p[\mu_p\cdot\prod\limits_n|\xi_{n,p}-c_n|^{r_n}]$, chama-se *momento (ordinário) da medida* μ, *centrado no ponto* c, *da ordem global* $\sum\limits_n r_n$ *e da ordem* r_n *em relação à recta* X_n *para cada* n, ao número $\sum\limits_p[\mu_p\cdot\prod\limits_n(\xi_{n,p}-c_n)^{r_n}]$, certamente finito, e dá-se o nome de *momento absoluto da medida* μ, *centrado no ponto* c, *da ordem global* $\sum\limits_n r_n$ *e da ordem* r_n *em relação à recta* X_n *para cada* n, ao valor do primeiro dos dois somatórios escritos, este finito por hipótese. Na prática omite-se correntemente a indicação «centrado no ponto c» quando $c_n=0$ para cada n e preferem-se em geral números $r_n\geqq 0$ inteiros (quase sempre de soma menor do que 5 ou até menor do que 3). Acrescentamos que os momentos se classificam, muitas vezes, em *mistos* ou *puros* conforme r_n for ou deixar de ser positivo com mais do que um valor de n e que, repartida a colecção dos N valores n por duas colecções parciais não-vazias, uma de elementos $h, i>h, j>i,\ldots$ e a outra de elementos $s, t>s, u>t,\ldots$, feito isso, se dá o nome de *momento marginal com respeito a* $X_h\times X_i\times X_j\times\ldots$

---

das densidades (locais) $\varphi(x)/\mu(X)$ [que conduzem, por integração ao longo de X, ao número 1] e, na nota[**] da página 290, não só a quantia $x-c$ toma o lugar de ξ_p-c, como também a densidade $\varphi(x)/\mu(X)$ toma o lugar da medida $\mu_p/\mu(X)$.

ou *marginal tomado em* $X_s \times X_t \times X_u \times ...$ a qualquer momento tal que $r_n = 0$ para cada n diferente de $s, t, u, ...$.

Ora, escolhido o ponto c de coordenadas c_n e considerado o produto $[X^*(x^*), \mathcal{B}^*(B^*)]$ das N rectas de Borel $[X_n^*(x_n^*), \mathcal{B}_n^*(B_n^*)]$ de pontos genéricos $x_n^* = x_n - c_n$, é óbvio que qualquer um dos momentos ordinários e absolutos acima referidos pode igualar-se ao momento homónimo [subentende-se centrado no ponto $(0, 0, ..., 0)$], da ordem global $\sum_n r_n$ e da ordem r_n em relação a X_n^* para cada n, que se obtém substituindo $\mu(B)$ pela nova medida $\mu^*(B^*)$ definida pelas relações $\mu_p^* = \mu^*(\{\xi_p^*\}) = \mu_p$, para cada p, e $\mu^*(\overline{\{\xi_1^*, \xi_2^*, ...\}}) = 0$, medida esta que é também elementar e a que se chama *desvio da medida* μ *com respeito ao ponto c.*

Evidentemente, o momento (puro) ordinário ou absoluto de μ, centrado no ponto c e da ordem global 0 é um momento que vale $\mu(X)$ ou deixa de existir conforme μ for uma medida finita ou infinita.

Além disso, caso exista o momento (ordinário) puro de μ, centrado no ponto c, marginal tomado em X_s e da ordem global 1, ele denomina-se também quer *valor médio (proporcional)* ou *esperança matemática (proporcional) de* μ, *marginal tomado* ou *tomada em* X_s *e centrado* ou *centrada no ponto* c_s, quer *valor médio (proporcional)* ou *esperança matemática (proporcional) marginal tomado* ou *tomada em* X_s, agora ambas as coisas *do desvio de* μ *com respeito a c.* Caso a grandeza definida exista quando se põe $c_s = 0$, então vamos representá-la pelo símbolo E_s e, caso exista o ponto $(E_1, E_2, ..., E_N) = E$, vamos chamar-lhe *valor médio (proporcional)* ou *esperança matemática (proporcional) de* μ, subentende-se centrado ou centrada no ponto $(0, 0, ..., 0)$.

Sempre que possível, é frequente recorrer-se aos momentos ordinários e absolutos de μ centrados no ponto E, os quais se confundem com os momentos homólogos do *desvio da medida* μ *com respeito à sua esperança matemática,* desvio este que em geral se designa abreviadamente por *desvio da medida* μ. Em particular, quando existe o momento (ordinário) do desvio de μ que é da ordem global 2 e da ordem 0 em relação a cada uma das rectas (eventuais) X_n de índices n diferentes de s e t, representamo-lo por $V_{s,s}$ (ou $V_{t,t}$) se ele for da ordem 2 em relação a X_s (ou X_t) e por $V_{s,t}=V_{t,s}$ se ele for da ordem 1 em relação a X_s e a X_t, chamamos ao momento (marginal) puro $V_{s,s}$ (ou $V_{t,t}$), òbviamente não-negativo, *variância* ou *dispersão marginal de* μ, *tomada em* X_s (ou *em* X_t), chamamos ao momento mixto $V_{s,t}$ (ou $V_{t,s}$) *covariância* (marginal se $N>2$) *de* μ *em relação ao par de rectas* X_s *e* X_t (ou X_t *e* X_s), definimos, na hipótese $V_{s,s}\cdot V_{t,t}>0$, as grandezas $\rho_{s,t}$ e $\rho_{t,s}$ pela igualdade

$$103)\qquad \rho_{s,t}=V_{s,t}/(+\sqrt{V_{s,s}\cdot V_{t,t}})=\rho_{t,s}$$

e intitulamos as grandezas definidas *coeficientes de correlação* (marginais se $N>2$) *de* μ *em relação aos pares de rectas* respectivamente X_s, X_t e X_t, X_s. Por fim, caso exista a matriz quadrada de elemento genérico $V_{m,n}(m,n=1,2,\ldots N)$, evidentemente simétrica e de elementos diagonais principais não-negativos, é costume atribuir-lhe o nome de *matriz das variâncias e covariâncias da medida* μ.

Devemos acrescentar, como anteriormente, que muitos autores reservam para a hipótese de a medida μ ser normada as designações de desvio, de esperança matemática (marginal), de variância ou dispersão marginal e de covariância e de coeficiente de correlação em relação a um par de rectas.

Ora, dado μ, admitamos que existem o momento da ordem global 0 e a grandeza E_n para um certo n. Então, um cálculo muito simples permite exprimir a esperança matemática de μ, marginal tomada em X_n e centrada no ponto E_n, seja E'_n, através da relação

$$104')\qquad E'_n=E_n\cdot[1-\mu(X)],$$

a qual se apresenta muito semelhante a 102').

Posto isso, tomemos um número natural $m\leqq N$ e admitamos que existem os momentos de μ mencionados a propósito de 104'), mais a esperança matemática marginal E_m na hipótese $m\neq n$ e ainda o momento da ordem global 2, seja o momento $F_{m,n}=F_{n,m}$, que tem a ordem 2 em relação a X_m

se $m=n$ e que tem a ordem 1 em relação a X_m e a X_n se $m \neq n$. Então, outro cálculo também simples conduz à relação

$$104'') \qquad V_{m,n}=F_{m,n}+E_m \cdot E_n \cdot [\mu(X)-2],$$

esta semelhante a 102'').

Passamos a supor que a medida $\mu(B)$ é de Lebesgue-Stieltjes a $N>1$ dimensões e admite *densidades* correntes ou generalizadas, entre elas as densidades $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_N)=\varphi(x)$ e $\tilde{\varphi}(x_1, x_2, \ldots, x_N)=\tilde{\varphi}(x)$. Então, se $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_N)=\psi(x)$ for uma função contínua e não-negativa em X, concluímos, como no caso $N=1$, que existem os integrais generalizados $^{\mathcal{R}}\int_W \psi(x) \cdot \varphi(x)\,dx$ e $^{\mathcal{R}}\int_W \psi(x) \cdot \tilde{\varphi}(x)\,dx$. Além disso, se cada uma das funções $\varphi(x)$ e $\tilde{\varphi}(x)$ for *moderadamente descontínua,* quer dizer contínua no espaço X inteiro com excepção possível dum número finito de planos paralelos aos planos coordenados(•), nesta hipótese os dois integrais escritos resultam forçosamente iguais, porque no caso contraditório podíamos encontrar um intervalo $D=\prod\limits_n \{a_n \leqq x_n \leqq b_n\}$ tal que φ e $\tilde{\varphi}$ saissem conjuntamente contínuas em D e que se verificasse a relação

$$^{\mathcal{R}}\int_D \psi(x) \cdot \varphi(x)\,dx \neq {}^{\mathcal{R}}\int_D \psi(x) \cdot \tilde{\varphi}(x)\,dx,$$

situação esta incompatível com o facto de o resultado expresso através de 94) fazer coincidir φ e $\tilde{\varphi}$ em todos os pontos interiores a D.

Em suma, vale a *regra* seguinte: «Seja $\psi(x)$ uma função contínua e não-negativa no espaço real a $N>1$ dimensões, seja $\varphi(x)$ uma densidade de medida, corrente ou generalizada, e seja μ a medida determinada por φ. Então, existe o integral de Riemann do produto $\psi(x) \cdot \varphi(x)$, estendido a qualquer campo de integração W do tipo acima referido. Além disso, caso a função $\varphi(x)$ seja moderadamente descontínua, tal inte-

(•) Esta definição serve também para $N=1$ conduzindo, então, a um número máximo finito de pontos de descontinuidade.

gral resulta insensível à substituição de $\varphi(x)$ por outra densidade moderadamente descontínua e representativa de μ.»

Chegados a este ponto, mantemos os significados dos símbolos n, X, B, X_n, c, c_n, r_n e 0^0, supomos que $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ é uma densidade moderadamente descontínua e representativa da medida $\mu(B)$, admitimos que $\prod_n (x_n - c_n)^{r_n}$ só pode deixar de assumir valores reais para pontos x situados em produtos de intervalos lineares significativos onde φ tenha integral nulo e escolhemos o valor positivo de $(x_n - c_n)^{r_n}$ nos casos em que esta potência possui dois valores reais. Então, se (e só se) for finito o integral $^{\mathcal{R}}\!\int_X [\prod_n |x_n - c_n|^{r_n}] \cdot \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_N)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_N$ integral este independente da escolha da densidade φ moderadamente descontínua e representativa de μ, chamamos *momento (ordinário) de μ, centrado no ponto c, da ordem global $\sum_n r_n$ e da ordem r_n em relação à recta X_n para cada n*, ao número $^{\mathcal{R}}\!\int_X [\prod_n (x_n - c_n)^{r_n}] \cdot \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_N)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_N$, também finito e independente(*) da escolha da densidade moderadamente descontínua e representativa de μ, e damos o nome de *momento absoluto de μ, centrado no ponto c, da ordem global $\sum_n r_n$ e da ordem r_n em relação a X_n para cada n*, ao valor do primeiro dos dois integrais escritos.

Anàlogamente ao caso das medidas elementares, também aqui pode definir-se o *desvio da medida $\mu(B)$ com respeito ao ponto c*, que agora se identificará com a nova medida $\mu^*(B^*)$ determinada pela densidade $\varphi^*(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_N^*) \equiv \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, onde, convém lembrá-lo, vale $x_n^* = x_n - c_n$ para cada n. Em consequência disso, estamos aptos a transcrever as considerações desenvolvidas a propósito duma medida μ elementar e definida no espaço de Borel a $N > 1$ dimensões, ficando inalteradas as conclusões expressas através das relações 104') e 104'').

(*) Caso se tenha $\prod_n (x_n - c_n)^{r_n} < 0$ numa parte de X, a independência alegada no texto pode reconhecer-se por um processo semelhante ao usado na nota(*) da página 293.

* * *

Na última parte desta secção vamos tomar $N>1$ e vamos tratar de três questões suplementares.

1. Consideremos uma medida μ de densidade $\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_N)$, admitamos que existe a matriz das variâncias e covariâncias de μ, formada à custa de φ, recordemos os significados dos símbolos X, E_n e $V_{m,n}$ $(m,n=1,2,\ldots,N)$ e introduzamos N variáveis auxiliares reais z_n. Então, podemos estabelecer a relação

105) $$\sum_{1\leqq m,n\leqq N}(V_{m,n}\,z_m\,z_n)=$$

$$=\sum_{1\leqq n\leqq N}\left\{\left[{}^{\mathcal{R}}\!\!\int_X (x_n-E_n)^2\cdot\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_N)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_N\right]\cdot z_n^2\right\}+$$

$$+2\cdot\sum_{1\leqq m<n\leqq N}\left\{\left[{}^{\mathcal{R}}\!\!\int_X (x_m-E_m)\cdot(x_n-E_n)\cdot\right.\right. \quad \textit{(continua)}$$

$$\left.\left.\cdot\,\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_N)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_N\right]\cdot z_m\,z_n\right\}=$$

$$={}^{\mathcal{R}}\!\!\int_X\Big\{\sum_{1\leqq n\leqq N}[(x_n-E_n)\,z_n]\Big\}^2\cdot\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_N)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_N\geqq 0.$$

Em seguida, reconhecemos que a desigualdade entre os membros extremos de 105) permanece válida para uma medida μ elementar, bastando, para o efeito, lembrar os significados dos símbolos μ_p e $\xi_{n,p}$ e substituir em 105) cada integral de Riemann (absolutamente convergente) do tipo

$${}^{\mathcal{R}}\!\!\int_X \psi(x_1,x_2,\ldots,x_N)\cdot\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_N)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_N$$

pelo correspondente somatório (absolutamente convergente)

$$\sum_p[\mu_p\cdot\psi(\xi_{1,p},\xi_{2,p},\ldots,\xi_{N,p})].$$

Em face do exposto, podemos afirmar que a forma quadrática $\sum\limits_{1\leqq m,n\leqq N}(V_{m,n}\,z_m\,z_n)$, suposta existente, é semidefinida positiva nas variáveis zz, isto quer no caso duma medida elementar quer no caso duma densidade de medida. Portanto, em qualquer dos dois casos é impossível ficar negativo algum menor principal extraído do determinante de elemento genérico $V_{m,n}$; em particular, dados dois inteiros s e t tais que $1 \leqq s < t \leqq N$, tem-se a desigualdade $V_{s,s} \cdot V_{t,t} - V_{s,t}^2 \geqq 0$ ou ainda, na hipótese $V_{s,s} \cdot V_{t,t} > 0$, a desigualdade equivalente $|\rho_{s,t}| \leqq 1$ [veja-se 103)]. Enfim, vale a conclusão seguinte:

XLVI) «Ficam compreendidos entre -1 e $+1$, extremos incluídos, todos os coeficientes de correlação que podem formar-se a partir duma matriz das variâncias e covariâncias correspondente a uma medida (definida num espaço de Borel a muitas dimensões) que seja elementar ou que possua densidades.»

2. Consideremos uma medida μ definida no espaço de Borel a N dimensões, recordemos os significados dos símbolos X_n, c_n, r_n e 0^0, repartamos a colecção dos N valores n possíveis por duas colecções parciais não-vazias, uma de elementos h, $i > h$, $j > i, \ldots$ e a outra de elementos s, $t > s$, $u > t, \ldots$, e representemos por ${}_1\mu_{s,t,u,\ldots}$ a medida marginal de μ no espaço $X_s \times X_t \times X_u \times \cdots = X'$ de valor prefixado igual a $\mu(X)$. Se μ for uma medida elementar e se $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N)$ for o ponto genérico dum conjunto finito ou numerável $Y \subset X$ com a propriedade $\mu(Y^-) = 0$, então a definição da medida ${}_1\mu_{s,t,u,\ldots}$ faz corresponder a valores $\xi_s, \xi_t, \xi_u, \ldots$ arbitràriamente fixados a igualdade

$$ {}_1\mu_{s,t,u,\ldots}(\{(\xi_s, \xi_t, \xi_u, \ldots)\}) = \sum_{\xi_h, \xi_i, \xi_j, \ldots} \mu(\{(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N)\}) $$

e, portanto, as propriedades dos somatórios, juntamente com a convenção de atribuir o valor 0 a um produto de números com algum factor nulo, conduzem à fórmula

$$ \sum_{(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N)} \Big[\Big(\prod_{n=s,t,u,\ldots} (\xi_n - c_n)^{r_n}\Big) \cdot \mu(\{(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N)\})\Big] = $$
$$ = \sum_{(\xi_s, \xi_t, \xi_u, \ldots)} \Big[\Big(\prod_{n=s,t,u,\ldots} (\xi_n - c_n)^{r_n}\Big) \cdot {}_1\mu_{s,t,u,\ldots}(\{(\xi_s, \xi_t, \xi_u, \ldots)\})\Big] $$

ou à fórmula análoga com $|\xi_n - c_n|^{r_n}$ em lugar de $(\xi_n - c_n)^{r_n}$, a qualquer uma delas todas as vezes que o seu primeiro membro se apresentar absolutamente convergente; por outras palavras, caso exista o momento ordinário ou absoluto do desvio da medida elementar μ com respeito ao ponto $(c_1, c_2, \ldots, c_N)$, marginal tomado em X' e das ordens $r_s, r_t, r_u, \ldots$ em relação a respectivamente $X_s, X_t, X_u, \ldots$, ele é também o momento homónimo do desvio da medida marginal ${}_1\mu_{s,t,u,\ldots}$ com respeito ao ponto $(c_s, c_t, c_u, \ldots)$, das ordens $r_s, r_t, r_u, \ldots$ em relação a respectivamente $X_s, X_t, X_u, \ldots$. Tal sobreposição de momentos ocorre também na hipótese de μ ficar determinado por uma densidade $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, desde que exista a densidade marginal de φ, tomada em $x_s, x_t, x_u, \ldots$ e reduzida na proporção de 1 para 1, e desde que o integral N-múltiplo igual ao momento marginal possa ser calculado por duas integrações consecutivas, a primeira em $X_h \times X_i \times X_j \times \cdots$ e a outra em X'; pois, as condições postas e a relação 99) permitem escrever a igualdade

$$^{\mathcal{R}}\!\!\int_X \Big[\prod_{n=s,t,u,\ldots} (x_n - c_n)^{r_n} \Big] \cdot \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_N)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_N =$$

$$= {}^{\mathcal{R}}\!\!\int_{X'} \Big[\prod_{n=s,t,u,\ldots} (x_n - c_n)^{r_n} \Big] \cdot {}_1\varphi'(x_s, x_t, x_u, \ldots)\, dx_s\, dx_t\, dx_u \ldots$$

ou a igualdade análoga com $|x_n - c_n|^{r_n}$ em lugar de $(x_n - c_n)^{r_n}$.

3. Suponhamos agora que se verifica a situação apresentada através da relação 100). Então, as propriedades dos integrais de Riemann e as convenções(*) $X' = X_1 \times \cdots \times X_{N'}$, $X'' = X_{N'+1} \times \cdots \times X_{N''}, \cdots$ permitem escrever a igualdade

$$^{\mathcal{R}}\!\!\int_{X' \times X'' \times \cdots} [(x_1 - c_1)^{r_1} \cdots (x_{N'} - c_{N'})^{r_{N'}} \cdot \qquad \textit{(continua)}$$

$$\cdot (x_{N'+1} - c_{N'+1})^{r_{N'+1}} \cdots (x_{N''} - c_{N''})^{r_{N''}} \cdots \varphi'(x_1, \cdots, x_{N'}) \cdot \qquad \textit{(continua)}$$

$$\cdot \varphi''(x_{N'+1}, \cdots, x_{N''}) \cdots]\, dx_1 \cdots dx_{N'}\, dx_{N'+1} \cdots dx_{N''} \cdots =$$

$$= \Big[{}^{\mathcal{R}}\!\!\int_{X'} (x_1 - c_1)^{r_1} \cdots (x_{N'} - c_{N'})^{r_{N'}} \cdot \varphi'(x_1, \cdots, x_{N'})\, dx_1 \cdots dx_{N'} \Big] \cdot$$

(*) O símbolo X' posto a seguir nada tem que vêr com o símbolo análogo usado no estudo precedente.

$$\cdot \left[{}^{\mathscr{R}}\!\!\int_{X''} (x_{N'+1} - c_{N'+1})^{r_{N'+1}} \cdots (x_{N''} - c_{N''})^{r_{N''}} \cdot \right. \qquad \textit{(continua)}$$

$$\left. \cdot\, \varphi''(x_{N'+1}, \cdots, x_{N''})\, dx_{N'+1} \cdots dx_{N''} \right] \cdots$$

[ou a igualdade análoga com $|x_n - c_n|$ em lugar de $(x_n - c_n)$, isto para cada n] todas as vezes que os factores do segundo membro forem absolutamente convergentes. Portanto, a proposição XLV, as propriedades das funções moderadamente descontínuas e o facto de qualquer momento duma medida com densidades moderadamente descontínuas ser independente da escolha de tal densidade, tudo isso prova a *regra* seguinte:

«Se tivermos medidas μ', μ'', etc., em número finito, *possuindo as densidades moderadamente descontínuas* φ', φ'', etc., a primeira definida no produto X' das rectas de Borel $X_1, \ldots, X_{N'}$, a segunda definida no produto X'' das rectas de Borel $X_{N'+1}, \ldots, X_{N''}$, etc., então a hipótese de a φ' corresponder um momento ordinário [ou absoluto], centrado no ponto $(c_1, \ldots, c_{N'})$ e da ordem r_n em relação a X_n para $1 \leqq n \leqq N'$, de a φ'' corresponder um momento ordinário [ou absoluto], centrado no ponto $(c_{N'+1}, \ldots, c_{N''})$ e da ordem r_n em relação a X_n para $N'+1 \leqq n \leqq N''$, etc., esta hipótese não só implica que à densidade moderadamente descontínua $\varphi' \cdot \varphi'' \cdot \ldots$ corresponde um momento ordinário [ou absoluto], centrado no ponto $(c_1, \ldots, c_{N'}, c_{N'+1}, \ldots, c_{N''}, \ldots)$ e da ordem r_n em relação a X_n para $n = 1, \ldots, N', N'+1, \ldots, N'', \ldots$, como implica também que o momento referido em último lugar pertence ao (único) produto $\mu' \times \mu'' \times \cdots$, resulta da multiplicação (aritmética) dos momentos restantes e fica insensível à substituição de φ', φ'', etc. por quaisquer outras densidades moderadamente descontínuas das medidas μ', μ'', etc.»

Outra regra semelhante à anterior é a seguinte:

«Se tivermos medidas *elementares* μ', μ'', etc., em número finito, a primeira definida no produto X' das rectas de Borel $X_1, \ldots, X_{N'}$ e tal que $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{N'})$ é o ponto genérico dum conjunto finito ou numerável $Y' \subset X'$ com a propriedade $\mu'(Y'^{-}) = 0$, a segunda definida no produto X'' das rectas de Borel $X_{N'+1}, \ldots, X_{N''}$ e tal que $\xi'' = (\xi_{N'+1}, \ldots, \xi_{N''})$ é o ponto genérico dum conjunto finito ou numerável $Y'' \subset X''$ com a propriedade $\mu''(Y''^{-}) = 0$, etc., então a hipótese de existir o momento ordinário [ou absoluto] de μ', centrado no ponto $(c_1, ..., c_{N'})$ e da ordem r_n em relação a X_n para $1 \leqq n \leqq N'$, de existir o momento ordinário [ou absoluto] de μ'', centrado no ponto $(c_{N'+1}, \ldots, c_{N''})$ e da ordem r_n em relação a X_n para $N'+1 \leqq n \leqq N''$, etc., esta hipótese não só implica que existe o momento ordinário [ou absoluto] do (único) produto $\mu' \times \mu'' \times \cdots$, centrado no ponto $(c_1, \ldots, c_{N'}, c_{N'+1}, \ldots, c_{N''}, \ldots)$ e da ordem r_n em relação a X_n para $n = 1, ..., N', N'+1, ..., N'', ...$, como implica também que o momento referido em último lugar resulta da multiplicação (aritmética) dos momentos restantes.»

Prova-se esta regra pondo em lugar da igualdade entre integrais acima escrita a igualdade entre somatórios

$$\sum_{(\xi', \xi'', \ldots)} [(\xi_1 - c_1)^{r_1} \cdots (\xi_{N'} - c_{N'})^{r_{N'}} \cdot \qquad \textit{(continua)}$$

$$\cdot (\xi_{N'+1} - c_{N'+1})^{r_{N'+1}} \cdots (\xi_{N''} - c_{N''})^{r_{N''}} \cdots \mu'(\{\xi'\}) \cdot \mu''(\{\xi''\}) \cdots] =$$

$$= \Big(\sum_{\xi'} [(\xi_1 - c_1)^{r_1} \cdots (\xi_{N'} - c_{N'})^{r_{N'}} \cdot \mu'(\{\xi'\})]\Big) \cdot$$

$$\cdot \Big(\sum_{\xi''} [(\xi_{N'+1} - c_{N'+1})^{r_{N'+1}} \cdots (\xi_{N''} - c_{N''})^{r_{N''}} \cdot \mu''(\{\xi''\})]\Big) \cdots$$

[ou a igualdade análoga com $|\xi_n - c_n|$ em lugar de $\xi_n - c_n$, isto para cada n] e tomando em conta que *qualquer* produto $\mu' \times \mu'' \times \cdots$ não pode deixar de atribuir o valor $\mu'(\{\xi'\}) \cdot \cdot \mu''(\{\xi''\}) \cdots$ a todo o conjunto elementar formado por um ponto $\xi = (\xi', \xi'', \ldots) = (\xi_1, \ldots, \xi_{N'}, \xi_{N'+1}, \ldots, \xi_{N''}, \ldots)$ e o valor zero ao complementar do conjunto dos pontos ξ possíveis [veja-se a relação de inclusão 9)].

Observação. As regras acima dadas podem adaptar-se ao caso em que os factores de X', X'', etc. não se sucedem pela ordem natural, recorrendo-se, para o efeito, à correspondência biunívoca existente entre X e o espaço que resulta de X por uma permutação das coordenadas (do ponto genérico) convenientemente escolhida.

e) **Espaços de probabilidade**

45. Generalidades. A seguir vamos analisar, em pormenor, o caso particular do estudo feito nas alíneas *c)* e *d)* que corresponde às *funções aferidoras normadas,* caso este sumamente interessante dos pontos de vista teórico e das aplicações. Para este efeito, convém recordar ràpidamente algumas noções expostas no princípio da secção 21.

Dados um espaço $\Omega(\omega)$ e uma classe $\mathcal{A}$ de conjunto genérico $A \subset \Omega$ tal que $\Omega \in \mathcal{A}$, chamamos *normada* a toda a função aferidora $\varphi(A)$ sujeita à igualdade $\varphi(\Omega)=1$. Entre as funções aferidoras normadas merecem destaque os *conteúdos* e os *conteúdos-σ normados,* no caso de $\mathcal{A}$ ser um corpo, e as *quase-medidas* e as *medidas normadas,* no caso de $\mathcal{A}$ ser um corpo-σ. Em lugar de quase-medida normada diz-se também *quase-probabilidade* e em lugar de medida normada diz-se também **probabilidade.**

Se a medida $\mu(A)$ estiver definida no espaço mensurável $[\Omega(\omega), \mathcal{A}(A)]$ e for uma probabilidade, muitas vezes se afigura conveniente assinalar esta situação peculiar substituindo a letra μ por P. Então, todo o conjunto mensurável fixo A_0 fica com um valor ou uma medida igual ao número $\mathsf{P}(A_0)$, número este a que é uso chamar *probabilidade de A_0*. Nesta conformidade, podemos chamar *função probabilidade* à probabilidade $\mathsf{P}(A)$, variável com A, desde que queiramos estabelecer a distinção verbal entre probabilidades interpretadas como funções e probabilidades interpretadas como valores.

Caso mergulhemos a (função) probabilidade $\mathsf{P}(A)$, abreviadamente P, no espaço mensurável acima referido, constituímos o terno $[\Omega(\omega), \mathcal{A}(A), \mathsf{P}(A)]$, abreviadamente $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$, ao qual damos o nome de *espaço de medida normado* ou, preferìvelmente, de **espaço de probabilidade.**

Atendendo à grande importância do conceito de probabilidade, vamos retomar a sua definição desde o princípio: *Uma probabilidade é uma função aferidora normada, aditiva-σ e definida num corpo-σ ou, talvez melhor, definida num espaço mensurável.* Por outras palavras, dado o espaço mensurável

$[\Omega(\omega), \mathcal{A}(A)]$, a função de conjunto $\mathsf{P}(A)$ é uma probabilidade se (e só se) ela tiver as propriedades seguintes:

1.ª $\mathsf{P}(A) \geqq 0$ para qualquer conjunto $A \in \mathcal{A}$. — 2.ª $\mathsf{P}(\Omega) = 1$. — 3.ª Qualquer colecção finita ou numerável formada por conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{A}$, disjuntos dois a dois, impõe a igualdade $\mathsf{P}(A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots) = \mathsf{P}(A_1) + \mathsf{P}(A_2) + \cdots + \mathsf{P}(A_n) + \cdots$.

O caso especial dos espaços de probabilidade é o mais relevante no âmbito geral dos espaços de medida.

Passamos a apresentar um exemplo simples duma probabilidade ou, equivalentemente, dum espaço de probabilidade.

Exemplo 75. Dados os números 1, 2 e 3, considerem-se o espaço $\Omega = \{1, 2, 3\}$ e o corpo-σ mais amplo que pode definir-se em Ω, seja $\mathcal{A}$, formado pelos oito conjuntos contidos em Ω [vejam-se o exemplo 20 e a proposição N XVII]. Então, a função de conjunto P sujeita às igualdades $2 \cdot \mathsf{P}(\{2\}) = \mathsf{P}(\{3\}) = 1/3$ define uma e uma só probabilidade no espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{A})$, a qual atribui os valores 0, 1/2, 1/2, 2/3, 5/6 e 1 aos conjuntos O, $\{1\}$, $\{2,3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ e Ω, tomados pela ordem indicada.

* * *

Dado um espaço de probabilidade $[\Omega(\omega), \mathcal{A}(A), \mathsf{P}(A)]$, a nomenclatura habitual relativa a espaços de medida arbitrários costuma substituir-se por outra *exclusivamente reservada* ao caso particular em consideração e escolhida de modo que os termos usados correspondam o melhor possível a numerosas situações ocorrentes em problemas práticos.

Chama-se *casos possíveis* ou, abreviadamente, *casos* aos pontos ω e também aos conjuntos elementares $\{\omega\}$.

Os conjuntos mensuráveis A denominam-se *acontecimentos*, considerando-se o acontecimento A *possível* ou *impossível* conforme for $A \neq O$ ou $A = O$ e *certo* ou *incerto* conforme for $A = \Omega$ ou $A \neq \Omega$ [veja-se a propriedade 18 *a)*]. O complemento A^- de qualquer A diz-se *acontecimento complementar* ou *contraditório de* A, saindo A complementar ou contraditório de A^- [vejam-se a condição 2.ª da definição dum corpo-σ e a propriedade N 5)].

As relações $\omega \in A$ e $\omega \in A^{-}$ exprimem-se classificando o caso ω respectivamente como *favorável a A* e como *desfavorável a A*. Evidentemente, um caso é favorável a um acontecimento quando e só quando for desfavorável ao acontecimento contraditório e um acontecimento é possível ou impossível [incerto ou certo] conforme houver ou deixar de haver casos favoráveis [desfavoráveis] a ele.

Quando os acontecimentos A e A' satisfizerem às duas relações equivalentes $A' \subset A$ e $A \supset A'$, todo o caso favorável a A' [desfavorável a A] resulta favorável a A [desfavorável a A'] e costuma dizer-se, indiferentemente, que A' é um *acontecimento particular* em relação a A ou que A é um *acontecimento geral* em relação a A'. De qualquer modo, quer se tenha $A' \subset A$ quer não se tenha esta relação, a diferença $A - A'$, um acontecimento por causa de 18 *b)*, recebe o nome de *acontecimento A sem A'*.

Dada uma colecção finita ou numerável de acontecimentos $A_n (n=1, 2, 3, \ldots)$, o conjunto $A = \bigcap_n A_n$ resulta um acontecimento, isto por causa de 18 *c)*, sendo uso chamar a A *composição dos A_n* e a estes *acontecimentos componentes*. Por outro lado, o conjunto $A' = \bigcup_n A_n$ resulta também um acontecimento, isto devido à condição 3.ª da definição dum corpo-σ, podendo considerar-se cada A_n uma *forma de A'* e podendo classificar-se A' como *(pelo menos) um dos acontecimentos A_n*, já que um caso é favorável a A' se e só se for favorável a (pelo menos) um dos A_n.

À (função) probabilidade $\mathsf{P}(A)$ ou P chama-se também **lei de probabilidade** ou, abreviadamente, **lei.** Se a lei P atribuir um valor nulo, positivo, menor do que 1 ou igual a 1 ao acontecimento A, este diz-se respectivamente *quase-impossível, nìtidamente possível, nìtidamente incerto* ou *quase-certo.* Nesta conformidade, o acontecimento impossível [certo] é quase-impossível [quase-certo], um acontecimento quase-impossível [quase-certo] escusa de ser impossível [certo], um acontecimento nìtidamente possível pode ser também nìtidamente incerto, um acontecimento quase-certo [quase-impossível] é nìtidamente possível [nìtidamente incerto], etc.

Dois acontecimentos A e A', ambos situados em $\mathcal{A}$, declaram-se *incompatíveis* ou *compatíveis* conforme forem ou deixarem de ser disjuntos, quer dizer conforme tiverem uma composição impossível ou uma composição possível [veja-se N III]. Além disso, A e A' declaram-se *quase-incompatíveis* se tiverem uma composição quase-impossível e declaram-se *nìtidamente compatíveis* se tiverem uma composição nìtidamente possível. Quando os acontecimentos A e A' forem incompatíveis, quase-incompatíveis, compatíveis ou nìtidamente compatíveis, também se diz que eles *se excluem, quase se excluem, não se excluem* ou *nìtidamente não se excluem*. Nesta conformidade, tem-se $\bigcup\limits_n A_n = \sum\limits_n A_n$ quando e só quando os acontecimentos A_n forem incompatíveis dois a dois ou, equivalentemente, se excluirem dois a dois.

Em face do exposto, podemos reformular as três propriedades características duma lei (de probabilidade) $\mathsf{P}(A)$, definida no espaço mensurável $[\Omega(\omega), \mathcal{A}(A)]$, como segue:

1.ª *Qualquer acontecimento tem probabilidade não-negativa.*

2.ª *O acontecimento certo tem probabilidade igual a 1.*

3.ª *Primeira versão: Escolhida qualquer colecção finita ou numerável de acontecimentos incompatíveis dois a dois, a soma das suas probabibidades sai sempre igual à probabilidade de (pelo menos) um entre eles.*

Segunda versão: Quando um acontecimento admite uma colecção finita ou numerável de formas incompatíveis duas a duas, a probabilidade do acontecimento sai sempre igual à soma das probabilidades das suas formas.

A propriedade 3.ª atribui à lei $\mathcal{P}(A)$ qualidades que lhe pertencem por definição e, portanto, qualquer das duas versões dessa propriedade deve ser classificada de axioma. Tal *axioma* costuma denominar-se *das probabilidades totais.*

Exemplo 76. Na prática aparecem muitas vezes situações em que é dado um espaço mensurável $[\Omega(\omega), \mathcal{A}(A)]$ dotado duma lei $\mathsf{P}(A)$ perfeitamente caracterizada, parcialmente conhecida ou totalmente ignorada e em que os casos ω se encontram suficientemente materializados para que possa-mos proceder à separação efectiva dum deles usando, para tal efeito, um critério julgado conveniente na ocasião. É uso chamar ao processo de separação adoptado *prova* conducente a um caso ou *observação* dum caso, feita em $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ segundo o critério escolhido. Quanto ao caso separado, diz-se *caso observado*. Em geral, é possível fazer outra observação dum caso num espaço de probabilidade igual a $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, mais uma vez segundo um critério apropriado, isto ou porque dispomos desde o início duma repetição de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ ou porque este espaço deixa reconstituir-se, por reposição do caso observado em primeiro lugar(*). Em seguida, é corrente poder fazer-se outra observação dum caso em condições análogas às da anterior e assim consecutivamente. Nesta conformidade, se $N \geqq 1$ for o número total de observações feitas, a cada acontecimento A fica correspondendo o inteiro ${}_N r(A)$ igual ao número de casos observados situados em A, número este que denominamos *frequência* ou, mais explìcitamente, *frequência absoluta* de A nas N observações, reservando-se para a função ${}_N r(A)/N$ o nome de *frequência relativa* de A nas N observações. Posto isso, a função ${}_N\mathbf{P}$ determinada, para qualquer A, pela igualdade ${}_N\mathbf{P}(A) = {}_N r(A)/N$ resulta uma probabilidade definida em $(\Omega, \mathcal{A})$, porque primeiro ${}_N r(A) \geqq 0$ para qualquer A, depois ${}_N r(\Omega) = N$ e, finalmente, quaisquer acontecimentos $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ incompatíveis dois a dois dão a relação $\sum_n {}_N r(A_n) = {}_N r(\sum_n A_n)$. Evidentemente, a lei ${}_N\mathbf{P}$, uma lei construida a partir das observações feitas, só excepcionalmente coincidirá com a lei inicial $\mathbf{P}$ e costuma ser influenciada por $\mathbf{P}$, pelo valor de N e pelos critérios seguidos nas observações sucessivas (muito embora esta última influência não venha declarada nos símbolos ${}_N r$ e ${}_N\mathbf{P}$). Assim se explica o facto de observações intencionalmente orientadas poderem conduzir a leis ${}_N\mathbf{P}$ mais ou menos pré-fabricadas, com alguma despreocupação pela lei autêntica $\mathbf{P}$. Eis porque muitos que não con-

(*) Nas aplicações sucede, por vezes, que a separação dum ponto de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ produz outro espaço de probabilidade igual ao primeiro sem erro sensível.

seguem ou não desejam aperceber-se do facto apontado podem ser manejados de várias maneiras por pessoas que o conheçam de qualquer modo (possivelmente intuitivo sem ser científico). Cabe à ciência chamada *estatística* a procura de valores de N e de critérios de observação respeitadores da lei P que permitam construir uma lei ${}_N\mathsf{P}$ apta a dar, com margem de segurança razoável, uma aproximação da lei P suficientemente rigorosa para os fins em vista.

* * *

Vejamos agora algumas propriedades das probabilidades, todas decorrentes da definição respectiva e obtidas por particularização de propriedades homólogas relativas a medidas arbitrárias.

Para começar, consideremos a proposição N XXXIII, omitamos nela a alínea *c)* (equivalente ao axioma das probabilidades totais) e mudemos a letra da alínea *d)* para *c)*. Fazendo isto tudo, resulta a proposição que passamos a enunciar.

XLVII) «Dado um espaço mensurável, toda a probabilidade $\mathsf{P}(A)$ nele definida possui as propriedades seguintes:

a) $\mathsf{P}(O)=0$ ou, equivalentemente, o acontecimento impossível tem probabilidade nula.

b) Dados dois acontecimentos A e A', a relação $A' \subset A$ implica $\mathsf{P}(A') \leqq \mathsf{P}(A)$ e $\mathsf{P}(A-A')=\mathsf{P}(A)-\mathsf{P}(A')$ ou, a mesma coisa dita por outras palavras, se o primeiro acontecimento for geral em relação ao segundo, a probabilidade deste não pode exceder a do primeiro e a probabilidade do primeiro acontecimento sem o segundo sai igual à diferença entre as probabilidades do primeiro e do segundo. Em particular, qualquer acontecimento A satisfaz às relações $\mathsf{P}(A) \leqq 1$ e $\mathsf{P}(A)=1-\mathsf{P}(A^-)$, quer dizer tem uma probabilidade que não pode exceder o número 1 e que é igual à diferença entre esse número e a probabilidade do acontecimento contraditório.

c) A desigualdade $\mathsf{P}(\bigcup_n A_n) \leqq \sum_n \mathsf{P}(A_n)$ é correcta para quaisquer acontecimentos $A_n (n=1, 2, 3, \ldots)$ formando uma colecção finita ou numerável. Esta propriedade admite duas versões verbais, a saber:

c') Escolhida qualquer colecção finita ou numerável de acontecimentos, a soma das suas probabilidades não pode ser excedida pela probabilidade de (pelo menos) um entre eles.

c'') Quando um acontecimento admite uma colecção finita ou numerável de formas, a probabilidade do acontecimento não pode exceder a soma das probabilidades das suas formas.»

De N XXXIV, de N XXXV' e de 24) tiramos a proposição seguinte:

XLVIII) «Considere-se o espaço mensurável $[\Omega(\omega), \mathcal{A}(A)]$ e escolham-se arbitràriamente constantes $c_q \geqq 0 \, (q=1, 2, 3, \ldots)$, formando uma colecção finita ou numerável. Então, dadas quaisquer leis $\mathsf{P}_q(A)$, a função $\sum_q c_q \mathsf{P}_q(A)$ será uma medida e, dadas quaisquer medidas $\mu_q(A)$, a função $\sum_q c_q \mu_q(A)$ [sujeita à convenção $0 \cdot \infty = 0$] será uma lei se e só se tiver lugar a igualdade $\sum_q c_q \mu_q(\Omega) = 1$.

Em aditamento, dada qualquer medida finita-σ e significativa, suponhamos $\mu(A)$, a finitude da função μ institui $\mu(A)/\mu(\Omega)$ em probabilidade e a infinitude de μ permite escolher conjuntos mensuráveis A_q, formando uma colecção numerável, disjuntos dois a dois, de medidas finitas e positivas, sujeitos à igualdade $\mu((\sum_q A_q)^-) = 0$ e tais que $\mu(A) = \sum_q \mu(A_q) \cdot \mathsf{P}_q(A)$, onde, seja qual for q, a função $\mathsf{P}_q(A)$ significa a probabilidade igual a $\mu(A \cap A_q)/\mu(A_q)$.»

De N XXXVI tiramos a proposição seguinte:

XLIX) «Dado um espaço de probabilidade, é impossível a existência duma infinidade não-numerável de acontecimentos nìtidamente possíveis e incompatíveis dois a dois.»

De N XXXVII e de N XXXVII' tiramos a proposição seguinte:

L) «Considere-se uma sucessão de quase-medidas $\varphi_q(A)$ $(q=1, 2, 3, \ldots)$, todas definidas no mesmo espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{O})$ e tais que existe $\lim_{q \to \infty} \varphi_q(A) = \varphi(A)$. Então, a quase-medida $\varphi(A)$ será uma quase-probabilidade quando e só quando $\lim_{q \to \infty} \varphi_q(\Omega) = 1$. Verificada esta condição, resulta $\varphi(A)$ uma probabilidade se a sucessão dos números q contiver uma subsucessão ao longo da qual as funções $\varphi_q(A)$ são medidas não-decrescentes.»

De II tiramos a proposição seguinte:

LI) «Dado um espaço mensurável, toda a probabilidade $\mathsf{P}(A)$ nele definida resulta uma função aferidora inferiormente e superiormente contínua. Por outras palavras, qualquer sucessão monótona de acontecimentos $A_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$ verifica uma das duas relações $\mathsf{P}(A_n) \uparrow \mathsf{P}(\bigcup_n A_n)$ e $\mathsf{P}(A_n) \downarrow \mathsf{P}(\bigcap_n A_n)$, com limite igual à probabilidade de (pelo menos) um dos A_n se a sucessão considerada for ascendente e com limite igual à probabilidade da composição de todos os A_n se a sucessão considerada for descendente.»

A matéria tratada em LI, III, IV, N XXXIII e na observação final da secção n.º 25 conduz à proposição seguinte:

LII) «Dado um espaço mensurável, qualquer quase-probabilidade $\mathsf{Q}(A)$ nele definida resulta uma probabilidade quando e só quando ela verificar uma das duas condições seguintes:

a) $\mathsf{Q}(A)$ é uma quase-probabilidade inferiormente contínua.

b) Seja qual for a sucessão de conjuntos mensuráveis $A_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$, disjuntos dois a dois, a hipótese $n \uparrow \infty$ implica a relação $\mathsf{Q}(A_{n+1} + A_{n+2} + \cdots) \downarrow 0$.»

Suponhamos agora que $\mathsf{P}(A)$ é uma probabilidade e que são dados $N < +\infty$ acontecimentos $A_n (n = 1, 2, \ldots, N)$. Nesta conformidade, a fórmula N 15') e a aditividade de P dão

$$106_0) \qquad \mathsf{P}\Big(\bigcup_{1 \leq n \leq N} A_n\Big) = \sum_{1 \leq p \leq 2^N - 1} \mathsf{P}(A_p^0),$$

onde os A_p^0 são os acontecimentos formalmente diferentes que resultam de substituir em $\bigcap_{1 \leqq n \leqq N} B_n$ cada símbolo B_n ou por A_n ou por A_n^- e de suprimir, em seguida, $\bigcap_{1 \leqq n \leqq N} A_n^-$ das composições assim obtidas.

Por outro lado, evita-se o recurso a acontecimentos contraditórios, adaptando a fórmula 25), que toma agora o aspecto

$$106) \qquad \mathsf{P}\Big(\bigcup_{1 \leqq n \leqq N} A_n\Big) =$$

$$= \sum_{1 \leqq n \leqq N} \Big[(-1)^{n-1} \cdot \sum_{1 \leqq m_1 < m_2 < \ldots < m_n \leqq N} \mathsf{P}(A_{m_1} \cap A_{m_2} \cap \cdots \cap A_{m_n})\Big].$$

Caso queiramos, podemos fazer corresponder a 106) um enunciado verbal, que é conhecido pelo nome de *teorema das probabilidades totais* e que admite duas versões as quais passamos a apresentar.

LIII) «*Primeira versão*: Dada uma colecção finita formada por N acontecimentos, a probabilidade de (pelo menos) um entre eles é a soma das probabilidades dos acontecimentos considerados, menos a soma das probabilidades das composições dos acontecimentos tomados dois a dois, mais a soma das probabilidades das composições dos acontecimentos tomados três a três, menos a soma das probabilidades das composições dos acontecimentos tomados quatro a quatro, mais etc., terminando a operação com a adição ou subtracção, adição se N for ímpar e subtracção se N for par, da probabilidade da composição dos acontecimentos tomados todos duma só vez.

Segunda versão: Quando um acontecimento comporta um número finito N de formas, a probabilidade do acontecimento é a soma das probabilidades das formas consideradas, menos a soma das probabilidades das composições das formas tomadas duas a duas, mais a soma das probabilidades das composições das formas tomadas três a três, menos a soma das probabilidades das composições das formas tomadas quatro a quatro, mais etc., terminando a operação com a adição ou subtracção, adição se N for ímpar e subtracção se N for par, da probabilidade da composição das formas tomadas todas duma só vez.»

Na hipótese de ser dada uma sucessão de acontecimentos $A_n (n=1, 2, 3, \ldots)$, podemos reproduzir as considerações que nos levaram de 25) a 27) para alcançarmos a fórmula

$$106') \qquad \mathsf{P}(\bigcup_{1 \leq n < \infty} A_n) =$$
$$= \lim_{N \uparrow \infty} \{ \sum_{1 \leq n \leq N} [(-1)^{n-1} \cdot \sum_{1 \leq m_1 < \ldots < m_n \leq N} \mathsf{P}(A_{m_1} \cap \cdots \cap A_{m_n})] \},$$

a qual poderia enunciar-se sob a forma dum *aditamento ao teorema das probabilidades totais,* aditamento este correspondente ao caso-limite duma colecção numerável de acontecimentos ou de formas.

As fórmulas 106) e 106') ou as proposições correspondentes simplificam-se notàvelmente quando os acontecimentos A_n forem quase-incompatíveis dois a dois. Em tal caso, a alínea *b)* de XLVII dá $\mathsf{P}(A_{m_1} \cap A_{m_2} \cap \cdots \cap A_{m_n}) = 0$ para $n \geq 2$ e, portanto, vale o seguinte *corolário do teorema das probabilidades totais e do seu aditamento:*

LIII') «*Primeira versão:* Dada uma colecção finita ou numerável de acontecimentos quase-incompatíveis dois a dois, a probabilidade de (pelo menos) um entre eles sai igual à soma das probabilidades dos acontecimentos considerados.

Segunda versão: Quando um acontecimento comporta um número finito ou uma infinidade numerável de formas quase-incompatíveis duas a duas, a probabilidade do acontecimento sai igual à soma das probabilidades das formas consideradas.»

Observação. O axioma das probabilidades totais é o caso particular do corolário LIII' em que a quase-incompatibilidade se reduz à incompatibilidade.

* * *

Tomemos o espaço de probabilidade $[\Omega(\omega), \mathcal{C}(A), \mathsf{P}(A)]$. Vimos, na secção n.º 27, que o corpo-σ *completivo* de $\mathcal{C}$ com respeito à lei ou probabilidade P é a classe $\mathcal{C}_{\mathsf{P}}$ formada pelos conjuntos $A \cup N$, onde N significa um subconjunto arbitrário de qualquer acontecimento quase-impossível. Na mesma secção ainda vimos que a função $\tilde{\mathsf{P}}(A \cup N) = \mathsf{P}(A)$ é uma medida definida no espaço mensurável $[\Omega(\omega), \mathcal{A}_{\mathsf{P}}(A \cup N)]$, como quem diz no espaço mensurável *completivo* de $(\Omega, \mathcal{A})$ com respeito a P. Como $\tilde{\mathsf{P}}(\Omega) = \tilde{\mathsf{P}}(\Omega \cup O) = \mathsf{P}(\Omega) = 1$, a medida $\tilde{\mathsf{P}}$ fica normada(*) e, por isso, é uso chamar-lhe *lei completiva* ou *probabilidade completiva de* P. Finalmente, o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}_{\mathsf{P}}, \tilde{\mathsf{P}})$ considera-se *completivo* de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$.

Nesta altura talvez convenha recordar ao leitor que $\tilde{\mathsf{P}}(A) = \mathsf{P}(A)$ para todo o A e que a propriedade de qualquer conjunto N ser também um conjunto A se constitui em condição necessária e suficiente não só para que $\tilde{\mathsf{P}}$ coincida com P, como também para que $(\Omega, \mathcal{A}_{\mathsf{P}}, \tilde{\mathsf{P}})$ coincida com $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$.

Ora, o espaço $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ e a função P dizem-se *completos* ou *incompletos* conforme coincidirem ou deixarem de coincidir com os seus completivos.

Exemplo 77. Retome-se o exemplo 36 e substitua-se aí o número 7 pelo número 1.

Fechamos esta última parte da secção n.º 45 adaptando as proposições V e V′ e a nota respectiva à situação presente.

LIV) «Dados um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ e o seu completivo $(\Omega, \mathcal{A}_{\mathsf{P}}, \tilde{\mathsf{P}})$, verifica-se a igualdade $\tilde{\mathsf{P}}(A_1) = \tilde{\mathsf{P}}(Q) = \tilde{\mathsf{P}}(A_2)$ todas as vezes que Q for um conjunto extraído de Ω e enquadrado por dois acontecimentos A_1 e $A_2 \supset A_1$, ambos situados em $\mathcal{A}$ e tais que P lhes confere a mesma probabilidade. Além disso, o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}_{\mathsf{P}}, \tilde{\mathsf{P}})$ é completo e admite como acontecimento qualquer conjunto enquadrado por dois dos seus acontecimentos que tenham igual probabilidade.»

(*) A afirmação feita no texto está também contida em VI.

46. O problema da extensão de funções aferidoras a probabilidades. A hipótese dos casos igualmente prováveis. Aqui estudamos o problema referido em epígrafe apenas nos casos que podem obter-se por particularização das considerações feitas nas secções n.^{os} 28 e 29.

Para começar, suponhamos que o espaço mensurável $[\Omega(\omega), \mathcal{A}(A)]$ admite a decomposição irredutível igual à classe $\mathcal{D} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$ e tomemos uma função ψ que seja aferidora aditiva definida na classe $\mathcal{D} + \{O\}$ e que satisfaça também à relação $\sum_n \psi(A_n) = 1$. Como a alínea *a)* de N XXXI dá $\psi(O) = 0$, concluimos que a função ψ fica determinada em, toda a classe $\mathcal{D} + \{O\}$ desde que conheçamos os seus valores nos conjuntos de $\mathcal{D}$ à excepção dum.

Evidentemente, qualquer medida $\mu(A)$ que estenda a função ψ à classe $\mathcal{A}$ tem de satisfazer a $\mu(\Omega) = \sum_n \mu(A_n) = \sum_n \psi(A_n)$ e, portanto, não pode deixar de ser uma probabilidade.(*) Consequentemente, as considerações feitas à volta de 29) dão uma e uma só medida que estende ψ a $\mathcal{A}$ e que é uma probabilidade $\mathsf{P}(A)$, a qual verifica a igualdade

$$107) \qquad \mathsf{P}(A_{n_1} + A_{n_2} + \cdots + A_{n_p} + \cdots) = \psi(A_{n_1}) + \psi(A_{n_2}) + \cdots + \psi(A_{n_p}) + \cdots$$

para toda a colecção de índices $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$ extraída da colecção dos valores n possíveis. Claro que a lei definida por 107) resulta incompleta se e só se algum dos acontecimentos A_n for quase-impossível sem se reduzir a um caso.

Exemplo 78. Seja Ω o espaço formado pelos números $1, 2, \ldots, n, \ldots$ e seja $\mathcal{A}$ o corpo-σ mais amplo que pode instituir-se em Ω. Então, o espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{A})$ admite a decomposição irredutível $\mathcal{D} = \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}, \ldots\}$ e podemos tomar $\psi(\{n\}) = 1/[n(n+1)]$ para cada n, já que $\sum_n \{1/[n(n+1)]\} = = \sum_n \{[1/n] - [1/(n+1)]\} = 1$.

(*) Caso se tenha $\sum_n \psi(A_n) \neq 1$, qualquer medida $\mu(A)$ nas condições do texto encontra-se, evidentemente, impossibilitada de ser uma probabilidade.

* * *

Adaptemos agora o exposto na primeira parte desta secção a um tipo particular que, além de ser muito frequente nas aplicações, tem um *interesse histórico elevado,* isto porque foi através dele que se encarou pela primeira vez com leis de probabilidade.

O tipo em questão é o seguinte: Cada A_n é um conjunto elementar $\{\omega_n\}$ do espaço Ω e $\psi(\{\omega_n\})$ não depende do valor atribuido ao índice n. A hipótese posta obriga a probabilidade P definida por 107) a tomar o mesmo valor para cada um dos casos (possíveis) e, por isso, é conhecida pelo nome sugestivo de *hipótese dos casos igualmente prováveis.* Também se fala, embora com um pouco menos de propriedade, da *hipótese dos casos igualmente possíveis.*

Quando se verifica a hipótese referida, a relação óbvia $\sum_n \mathsf{P}(\{\omega_n\})=1$ implica que cada probabilidade $\mathsf{P}(\{\omega_n\})$ saia igual a 1 a dividir pelo número de casos situados em Ω. Nesta conformidade, é forçoso que exista um último valor N de n, porque de contrário ficava a igualdade absurda $0+0+\cdots+0+\cdots=1$. Portanto, não só resulta $\mathcal{Q}$ igual ao corpo-σ mais amplo que pode instituir-se em Ω [veja-se N XIV], como também resulta $\mathsf{P}(\{\omega_n\})=1/N$ para cada n, o que mostra que a probabilidade P é *completa* e que todos os seus 2^N valores [veja-se N XVII] ficam determinados pelo valor comum dos N casos possíveis, este por sua vez ligado dum modo fácil ao número N. Enfim, estamos em presença do máximo de simplicidade que pode alcançar-se na caracterização duma lei com o auxílio de conhecimentos parciais relativos a ela.

Uma vez admitida a hipótese dos casos igualmente prováveis, escolhamos arbitràriamente um acontecimento A que supomos formado por casos $\omega', \omega'', \ldots$, em número igual a $f_A \geq 0$. Como $A=\{\omega'\}+\{\omega''\}+\cdots$, a igualdade 107) dá a fórmula

$$108) \qquad \mathsf{P}(A)=f_A/N$$

e, portanto, vale a proposição seguinte:

LV) «Quando se verifica a hipótese dos casos igualmente prováveis, a probabilidade de qualquer acontecimento A sai igual à razão entre o número de casos favoráveis a A e o número total de casos igualmente prováveis.»

Observação. Quando se considera a fórmula 108) como *igualdade de definição* da função $\mathsf{P}(A)$, esta fica dotada das duas primeiras propriedades características duma lei de probabilidade, referidas na segunda parte da secção n.º 45, e fica dotada também da terceira dessas propriedades características, porque, se os acontecimentos $A_m (m=1,2,3,\ldots)$ forem incompatíveis dois a dois e se cada A_m tiver $f_m \geqq 0$ casos favoráveis, sai igual a $\sum_m f_m$ o número de casos favoráveis a $\sum_m A_m$ e, portanto, a relação óbvia $(\sum_m f_m)/N = \sum_m (f_m/N)$ resulta equivalente a $\mathsf{P}(\sum_m A_m) = \sum_m \mathsf{P}(A_m)$. Por outras palavras, a razão f_A/N pode servir para definir um conceito rudimentar de probabilidade, ao qual falta muito para abarcar o conceito geral.

* * *

Apresentámos a hipótese dos casos igualmente prováveis recorrendo a uma certa particularização da teoria geral da probabilidade. Dada a comodidade dessa hipótese, pode encarar-se como circunstância feliz o facto de numerosas questões práticas ligadas a espaços finitos inculcarem a dita hipótese como sendo a mais adequada, muito embora não a imponham como necessidade absoluta. Aliás, a natureza nunca ordena a utilização de nenhuma teoria determinada, mas consente, por vezes, no emprego de várias teorias que conduzem todas a resultados proveitosos. E quando há possibilidade de escolha sem prejuízo dos benefícios a tirar, a teoria preferida costuma ser a menos complicada, nas condições presentes a que corresponde à hipótese dos casos igualmente prováveis.

Vejamos agora alguns exemplos.

Exemplo 79. Uma *moeda* diz-se *perfeita* se for de construção simétrica com respeito às suas duas faces, a face chamada *cara* e a chamada *cruz*, e um lançamento de uma ou mais moedas perfeitas diz-se *imparcial* ou *casual* se for isento de qualquer premeditação. Nas condições usuais, caso consideremos um lançamento casual duma moeda perfeita, não é de prever outro resultado senão cara ou cruz e, portanto, podemos trabalhar no espaço Ω cujos pontos são as $N=2$ faces da moeda. Então, se $\mathcal{C}$ for o corpo-σ mais amplo que pode instituir-se em Ω, o espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{C})$ fica com a decomposição irredutível finita $\mathcal{D}=\{A_1, A_2\}$, onde A_1 e A_2 significam os conjuntos elementares correspondentes às faces respectivamente cara e cruz. Atendendo à situação apresentada, a hipótese dos casos igualmente prováveis conduz à probabilização mais indicada para $(\Omega, \mathcal{C})$. Assim vale 1/2 qualquer das duas probabilidades $\mathsf{P}(A_1)$ e $\mathsf{P}(A_2)$, sendo $\mathsf{P}(A_1)$ a probabilidade duma cara e $\mathsf{P}(A_2)$ a probabilidade duma cruz. —Mais geralmente, se $n \geq 1$ for um número natural e se considerarmos um lançamento casual (simultâneo) de n moedas perfeitas ou n lançamentos casuais (consecutivos) da mesma moeda perfeita, não é de prever outro resultado senão um determinado agrupamento ordenado de n faces, correspondendo cada face agrupada a uma certa moeda ou a um certo lançamento, e, portanto, convém-nos trabalhar no espaço Ω cujos pontos são os $N=2^n$ agrupamentos possíveis, espaço este igual ao produto $\prod_{1 \leq m \leq n} \Omega_m$ cujo factor n.º m é o espaço formado pelas 2 faces da m-ésima moeda ou do m-ésimo lançamento. Então, se $\mathcal{C}$ for o corpo-σ mais amplo que pode instituir-se em Ω, a hipótese dos casos igualmente prováveis conduz à probabilização mais indicada para o espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{C})$. Portanto, a fórmula 108) atribui a qualquer acontecimento A do espaço de probabilidade resultante um valor $\mathsf{P}(A)=f_A/2^n$, onde f_A significa o número de casos favoráveis a A; por exemplo, a probabilidade de n faces iguais entre si será $1/2^{n-1}$, visto ter-se $f_A=2$.—Em tudo isso, quando se diz ocasionalmente que $\mathsf{P}(A)$ é a *probabilidade da realização de A*, pretende-se assinalar que o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{C}, \mathsf{P})$, de início imaginado abstractamente, se vai concretizar, permitindo a realização (material) de A, em virtude de proceder-se efectivamente a um lançamento casual (simultâneo) de n moedas perfeitas ou a n lançamentos casuais (consecutivos) da mesma moeda perfeita.

Exemplo 80. Um *dado* (para jogar) diz-se perfeito se for de construção simétrica com respeito às suas seis faces, denominadas *ás, duque, terna, quadra, quina* e *sena* conforme se tratar da face com respectivamente 1, 2, 3, 4, 5 e 6 pontos, e um lançamento de um ou mais dados perfeitos diz-se imparcial ou casual se for isento de qualquer premeditação. Nas condições usuais, se $n \geq 1$ for um número natural e se considerarmos um lançamento casual (simultâneo) de n dados perfeitos ou n lançamentos casuais (consecutivos) do mesmo dado perfeito, não é de prever outro resultado senão um determinado agrupamento ordenado de n faces, correspondendo cada face agrupada a um certo dado ou lançamento, e, portanto, convém-nos trabalhar no espaço Ω cujos pontos são os $N=6^n$ agrupamentos possíveis, espaço este igual ao produto $\prod\limits_{1 \leq m \leq n} \Omega_m$ cujo factor n.º m é o espaço formado pelas 6 faces do m-ésimo dado ou lançamento. Então, se $\mathcal{A}$ for o corpo-σ mais amplo que pode instituir-se em Ω, a hipótese dos casos igualmente prováveis conduz à probabilização mais indicada para o espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{A})$. Portanto, a fórmula 108) atribui a qualquer acontecimento A do espaço de probabilidade resultante um valor $\mathsf{P}(A)=f_A/6^n$, onde f_A significa o número de casos favoráveis a A; por exemplo, a probabilidade de n faces iguais entre si será $1/6^{n-1}$, visto ter-se $f_A=6$. Também aqui, quando se diz ocasionalmente que $\mathsf{P}(A)$ é a probabilidade da realização de A, pretende-se assinalar que o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$, de início imaginado abstractamente, se vai concretizar, permitindo a realização de A, em virtude de proceder-se efectivamente a um lançamento casual (simultâneo) de n dados perfeitos ou a n lançamentos casuais (consecutivos) do mesmo dado perfeito. – Posto isso, se A significar a presença de *menos duma* sena ou, equivalentemente, a ausência de senas, sai $f_A=5^n$, donde $\mathsf{P}(A)=(5/6)^n$. Mais, se A_1 significar a presença de *pelo menos uma* sena, quer dizer de uma ou mais senas, tem-se $A_1=A^-$, pelo que a alínea *b)* de XLVII torna $\mathsf{P}(A_1)=(6^n-5^n)/6^n$. Depois, se A_2

significar a presença de *uma* sena, quer dizer de exactamente uma sena, basta pôr $A_2 = \sum_m A'_m$, onde, dado m, o acontecimento A'_m indica a presença duma sena no dado ou lançamento n.º m e a ausência de senas nos dados ou lançamentos restantes, basta fazer isso para que primeiro a fórmula 108) dê $\mathsf{P}(A'_m) = 5^{n-1}/6^n$, com cada m, e para que em seguida o axioma das probabilidades totais conduza ao resultado $\mathsf{P}(A_2) = n \cdot 5^{n-1}/6^n$. Por outro lado, se A_3 significar a presença de *mais duma* sena ou, equivalentemente, de pelo menos duas senas, sai $A_3 = A_1 - A_2$, com $A_2 \subset A_1$, pelo que a alínea *b)* de XLVII implica $\mathsf{P}(A_3) = [6^n - (n+5) \cdot 5^{n-1}]/6^n$. Por fim, se A_4 significar a presença de *quando muito uma* sena, quer dizer de uma ou menos senas, tiramos de $A_4 = A_3^-$ que $\mathsf{P}(A_4) = (n+5) \cdot 5^{n-1}/6^n$.

Exemplo 81. Considerem-se duas lotarias, a primeira com a emissão de L bilhetes numerados de 1 a L, a outra com a emissão de M bilhetes numerados de 1 a M e cada uma com um único prémio. Quem comprar dois bilhetes, um de cada lotaria, encontra-se em face do espaço Ω formado pelos $N = L \cdot M$ pontos que são os pares de números possìvelmente premiados. Nas condições de sorteio usuais, a convenção de designar por $\mathfrak{A}$ o corpo-σ mais amplo que pode instituir-se em Ω inculca a hipótese dos casos igualmente prováveis como o caminho mais apropriado para probabilizar o espaço mensurável $(\Omega, \mathfrak{A})$. Então, escolhido um acontecimento A, a sua probabilidade $\mathsf{P}(A)$ é dada por 108). Caso o jogador esteja interessado materialmente no resultado dos sorteios relativos às duas lotarias, como sucede usualmente, a situação proporciona-lhe um motivo excelente para encarar $\mathsf{P}(A)$ como a probabilidade da realização de A. — Posto isso, atribuamos a A o significado da presença de pelo menos um prémio no par de bilhetes adquiridos. Se pusermos $A = A_1 \cup A_2$, onde, dado o índice n $(n = 1, 2)$, o acontecimento A_n indica a incidência dum prémio no bilhete correspondente à lotaria n.º n (acompanhada seja do que for na outra lotaria), se fizermos isso, primeiro a fórmula 108) dá $\mathsf{P}(A_1) = M/(LM)$, $\mathsf{P}(A_2) = L/(LM)$ e $\mathsf{P}(A_1 \cap A_2) = 1/(LM)$ e depois a fórmula 106) conduz a $\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(A_1) + \mathsf{P}(A_2) - \mathsf{P}(A_1 \cap A_2) = (L + M - 1)/(LM)$. — Em termos de maior generalidade, considerem-se agora $p\,(1 \leqq p < +\infty)$ lotarias, a n-ésima $(n=1, 2, \ldots, p)$ com a emissão de N_n bilhetes e cada uma com um único prémio, e suponha-se que um jogador compra p bilhetes, um de cada lotaria. Então, Ω será formado pelos $N = \prod_{1 \leqq n \leqq p} N_n$ agrupamentos ordenados de números possìvelmente premiados e a exposição seguirá os mesmos moldes acima descritos. Em particular, se A significar a presença de pelo menos um prémio no agrupamento dos p bilhetes adquiridos, interprete-se A_n, para cada n, como a incidência dum prémio no bilhete correspondente à lotaria n.º n (acompanhada seja do que for em qualquer lotaria com número diferente de n). Então, ter-se-á $A = \bigcup_{1 \leqq n \leqq p} A_n$, a igualdade 108) dará $\mathsf{P}(A_{m_1} \cap A_{m_2} \cap \cdots \cap A_{m_n}) = 1/(N_{m_1} \cdot N_{m_2} \cdots N_{m_n})$ sempre que for $1 \leqq m_1 < m_2 < \cdots < m_n \leqq p$ e a fórmula 106), com p em lugar de N, conduzirá a

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{1 \leqq n \leqq p} \left[(-1)^{n-1} \cdot \sum_{1 \leqq m_1 < m_2 < \ldots < m_n \leqq p} \frac{1}{N_{m_1} \cdot N_{m_2} \cdots N_{m_n}} \right].$$

O cálculo pode fazer-se, porém, por um caminho mais simples, se tomarmos em conta que o número de casos favoráveis a A^{-} é $\prod_{1 \leqq n \leqq p} (N_n - 1)$, pelo que a alínea *b)* de XLVII e a igualdade 108) permitem escrever $\mathsf{P}(A) = 1 - \prod_{1 \leqq n \leqq p} (1 - 1/N_n)$.

*
* *

Vamos agora particularizar, para a conjuntura presente, o teorema VII ou teorema fundamental sobre a extensão de conteúdos-σ a medidas. Resulta a seguinte proposição, a que podemos chamar *teorema fundamental sobre a extensão de conteúdos-σ normados a probabilidades.*

LVI) «Dados um espaço Ω, um corpo $\mathcal{G}$ de conjunto genérico $G \subset \Omega$ e um conteúdo-σ normado, seja $\varphi(G)$, considere-se a função $\Phi(C)$ que se obtém fazendo corresponder a cada conjunto $C \subset \Omega$ a relação *a)* $\Phi(C) = \inf\limits_{\bigcup\limits_n G_n \supset C} \sum\limits_n \varphi(G_n)$, onde o ínfimo se refere a todas as colecções finitas ou numeráveis de conjuntos $G_n \in \mathcal{G}$ tais que $\bigcup\limits_n G_n \supset C$.

Então, constitui-se em corpo-σ a classe $\mathcal{A}$ daqueles conjuntos $A \subset \Omega$ que satisfazem à relação

b) $\Phi(C) \geqq \Phi(A \cap C) + \Phi(A^- \cap C)$ para qualquer C.

Além disso, a restrição da função $\Phi(C)$ à classe $\mathcal{A}$ resulta uma probabilidade completa, seja $\mathsf{P}(A)$, a qual coincide com a única medida que estende a função $\varphi(G)$ à classe $\mathcal{A}$.»

Observação. Caso se tome para ponto de partida um conteúdo-σ não-normado, a desigualdade $\varphi(\Omega) \neq 1$ [veja-se 17 *a)*] impede de ser uma probabilidade qualquer medida que estenda φ a um corpo-σ.

Posto isso, o mesmo caminho que nos levou de VII para VIII, VIII' e IX vai-nos levar agora de LVI para a proposição seguinte:

LVII) «Atribua-se a cada um dos símbolos $\Omega, \mathcal{G}, \varphi(G), \mathcal{A}$ e $\mathsf{P}(A)$ o mesmo significado que no enunciado de LVI e suponha-se que a classe $\mathcal{K}$ de conjunto genérico K é um corpo-σ com a propriedade $\mathcal{G} \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{A}$. Nesta conformidade, não só a função $\mathsf{P}(K)$ é uma probabilidade tal que a sua completiva coincide com $\mathsf{P}(A)$, como também cada conjunto A determina dois conjuntos K particulares, digamos K' e K'', que satisfazem simultâneamente às duas relações $K' \subset A \subset K''$ e $\mathsf{P}(K') = \mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(K'')$. Em aditamento, se a classe $\mathcal{H}$ de conjunto genérico H for o corpo-σ gerado por $\mathcal{G}$, tem-se $\mathcal{H} \subset \mathcal{A}$ e a probabilidade $\mathsf{P}(H)$ resulta a única medida que estende $\varphi(G)$ a $\mathcal{H}$.»

Observação. Escolhido o corpo-σ designado por $\mathcal{K}$, de conjunto genérico K, no enunciado de VIII, então $\mu(K)$ é a única medida que estende a função $\varphi(G)$, *suposta finita-σ e significativa,* a uma medida definida em $\mathcal{K}$, conforme pode ver-se aplicando a 4.ª fase da demonstração de VII, em particular, aos conjuntos $A \in \mathcal{K}$. Logo, atendendo à proposição X e à observação anexa, podemos afirmar, em face de LVII, que a função $\mu(K)$ acima referida coincide com uma soma de produtos de constantes positivas por probabilidades que são as únicas extensões de certos conteúdos-σ normados a medidas definidas em $\mathcal{K}$.

47. Combinatória. Esta secção é intercalar e destina-se a facilitar a solução de certas questões relativas à contagem de números de casos, as quais questões aparecem em vários problemas, por exemplo quando se verifica a hipótese dos casos igualmente prováveis e se recorre à proposição LV para o cálculo da probabilidade dum acontecimento.

Vamos partir dum conjunto finito e não-vazio com digamos n pontos, pontos estes que representamos abreviadamente por $1, 2, \ldots, n$ e que denominamos também *objectos*, isto porque são literalmente objectos em numerosas aplicações a problemas concretos fornecidos pela prática.

Caso queiramos efectuar um número finito de tiragens ou extracções consecutivas dum ponto ou objecto do conjunto dado, há três maneiras de proceder: Primeiro, por *tiragens sem reposição,* quer dizer deixamos de fora cada objecto extraído, de modo que uma eventual tiragem seguinte se fará dum conjunto com menos um ponto; depois, por *tiragens com reposição,* quer dizer repomos cada objecto extraído antes de qualquer nova tiragem, de modo que todas as extracções se fazem do conjunto inicial; finalmente, por *tiragens mistas,* quer dizer repomos certos objectos extraídos e não repomos outros.

Seja qual for a técnica usada nas tiragens consecutivas, forma-se uma colecção de objectos extraídos a que podemos chamar *coordenação,* se quisermos usar um termo análogo ao que se emprega em espanhol. Uma coordenação diz-se *simples* e também *sem repetição, completa* e também *com repetição* ou *mista* conforme tiverem sido sem reposição, com reposição ou mistas as tiragens que lhe deram origem. Em geral, dedica-se atenção especial às coordenações simples e completas, procurando-se obter as mistas por associação conveniente das outras.

Escolhida uma coordenação, cada objecto que nela entra recebe o nome de *elemento da coordenação*. Chama-se *grau* duma coordenação ao número dos seus elementos. Por uma questão de conveniência, admite-se a existência duma e duma só coordenação sem elementos ou do grau zero, a qual se considera simultâneamente simples e completa. Nesta conformidade, se uma coordenação for simples, o seu grau k é tal que $0 \leqq k \leqq n$ e os seus elementos resultam todos diferentes. Por outro lado, se uma coordenação for completa, o seu grau k é tal que $0 \leqq k < +\infty$ e os seus elementos podem repetir-se.

As coordenações mais empregadas são os arranjos, as permutações e as combinações, cabendo a estas um papel de relevo. Por isso, a teoria das coordenações é conhecida também pelo nome de *combinatória*. Foi este nome o escolhido para o título da secção.

Observação. Seja C o conjunto com n objectos donde partimos e seja Ω um espaço onde C está contido. Então, o conceito de subconjunto de C formado por k objectos determinados não conta com qualquer compromisso quanto à ordem desses objectos, ao passo que o conceito de coordenação simples formada por k objectos determinados extraídos (um a um) de C faculta a liberdade de atender à ordem dos objectos tirados. Por outro lado, admitindo agora que $k \geqq 1$, se cada número natural $j \leqq k$ determinar um conjunto C_j com a constituição de C e um espaço Ω_j com a constituição de Ω, toda a coordenação completa formada por k elementos dispostos por ordem corresponde-se recìprocamente com o ponto do conjunto $C_1 \times C_2 \times \cdots \times C_k \subset \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_k$ cujas coordenadas são os k elementos considerados, dispostos sem alteração da sua ordem. Em face do exposto, afigura-se perfeitamente compreensível, em primeira análise, que muitas vezes se recorra a coordenações para efeitos de contagem de casos (talvez igualmente prováveis).

* * *

Em primeiro lugar, vamos tratar das coordenações simples correntes. O assunto é conhecido dos cursos elementares e, por isso, limitamo-nos a apresentar, sem demonstração, os seus aspectos mais importantes.

Dado um conjunto com $n>0$ objectos, chama-se *arranjo simples* ou *arranjo sem repetição* ou ainda, abreviadamente, *arranjo dos n objectos tomados k a k* a toda a coordenação simples do grau k cuja identificação se faz a partir dos elementos que a constituem e, cumulativamente, a partir da ordem por que se sucedem esses elementos. Assim, se $n=4$ e $k=3$, o arranjo de elementos 1, 2, 4 difere do arranjo de elementos 2, 4, 1, isto apesar de estarmos na presença de duas coordenações formadas pelos mesmos elementos.

Usaremos o símbolo ${}_nA_k$ para representar o número total de arranjos (simples) de n objectos dados tomados k a k. Se fizermos $0!=1$ e se interpretarmos a única coordenação do grau 0 como o único arranjo (simples) dos n objectos considerados tomados 0 a 0, então tem-se $0\leqq k\leqq n$ e verifica-se, para qualquer k admissível, a igualdade bem conhecida

109) $$ {}_nA_k=n!/(n-k)!. $$

O caso particar $k=n$ merece uma menção especial. Os arranjos (simples) de n objectos dados tomados n a n dizem-se também *permutações (simples) desses n objectos.* Evidentemente, o seu número é ${}_nA_n=n!$.

Exemplo 82. Dados os números naturais a, b, k e n tais que $a+b=n$ e $k\leqq a$, consideremos uma urna com n bolas ou esferas, de que a são brancas e b pretas, suponhamos as bolas perfeitamente iguais entre si salvo na cor e pensemos em k tiragens ou extracções *casuais* consecutivas, sem reposição, de uma bola da urna. Aqui, quando classificamos de casual uma tiragem, pretendemos exprimir que ela deve ter igual acesso a todas as bolas ainda disponíveis na urna e que a escolha da bola a extrair não deve ser influenciada pela sua cor. Nestas condições, o mais natural é partirmos do espaço Ω formado por todos os arranjos (simples) das n bolas tomadas k a k e probabilizarmos em seguida Ω, dotado do corpo-σ mais amplo, por intermédio da hipótese dos casos igualmente prováveis. Logo a probabilidade $\mathsf{P}(A)$ de [eventualmente, da realização de] qualquer acontecimento A será dada por 108), com $N = {}_nA_k$. Então, se A significar a extracção de k bolas brancas, sai $f_A = {}_aA_k$, donde, atendendo a 109), o resultado $\mathsf{P}(A) = [a! \cdot (n-k)!]/[(a-k)! \cdot n!]$.

Dado ainda um conjunto com $n > 0$ objectos, chama-se *combinação simples* ou *combinação sem repetição* ou ainda, abreviadamente, *combinação dos n objectos tomados k a k* a toda a coordenação simples do grau k cuja identificação se faz apenas a partir dos elementos que a constituem, sem atender à ordem por que se sucedem esses elementos. Assim, se $n=4$ e $k=3$, a combinação de elementos 1, 2, 4 não se distingue da combinação de elementos 2, 4, 1, isto apesar da diferença na disposição dos elementos.

Usaremos o símbolo ${}_nC_k$ e, por vezes, também o símbolo $\binom{n}{k}$, este devido a Newton, para representar o número total de combinações (simples) de n objectos dados tomados k a k. Se interpretarmos a única coordenação do grau 0 como a única combinação (simples) dos n objectos considerados tomados 0 a 0, então tem-se $0 \leq k \leq n$ e verifica-se, para qualquer k admissível, a igualdade bem conhecida

$$110) \qquad {}_nC_k = n!/[k! \cdot (n-k)!] = {}_nA_k/k! = \binom{n}{k}.$$

Chamamos a atenção do leitor para a fórmula de simetria ${}_nC_k = {}_nC_{n-k}$ e para a fórmula de recorrência ${}_nC_k = {}_{n-1}C_k + {}_{n-1}C_{k-1}$, a primeira válida sem restrição e a outra válida para $n > 1$ e $1 \leq k \leq n$. As duas fórmulas aqui referidas facultam uma explicação cómoda da construção do chamado *triângulo aritmético* ou *triângulo de Pascal* que regista, como o leitor sabe, quaisquer números de combinações de n objectos, com n a percorrer os primeiros números naturais até ao limite fixado para o dispositivo.

Exemplo 83. Tomemos duas variáveis x e y e um número natural arbitrário n. Então, a bem conhecida ***fórmula do binómio*** ou ***de Newton***

$$(x+y)^n = \sum_{0 \leq k \leq n} {}_nC_k \cdot x^k y^{n-k}$$

dá, pondo $x=y=1$, a igualdade ${}_nC_0+{}_nC_1+\cdots+{}_nC_n=2^n$, a qual prova que é igual a 2^n o número total de combinações (simples) que podem formar-se com n objectos dados, resultado este de que já nos servimos algumas vezes, por exemplo na primeira parte da secção n.º 11. Por outro lado, se fizermos $-x=y=1$ e se usarmos o símbolo $\mathcal{J}(z)$ para representarmos o maior inteiro contido no número real z, fica $\sum_{0\leqq k\leqq \mathcal{J}(n/2)} {}_nC_{2k}=$ $=\sum_{0\leqq k\leqq \mathcal{J}((n-1)/2)} {}_nC_{2k+1}$, pelo que a convenção de considerar 0 como um número par conduz à igualdade entre o número total de combinações de n objectos dados com qualquer grau par e o número total de combinações dos mesmos objectos com qualquer grau ímpar.

Exemplo 84. Consideremos uma urna com $M\geqq 1$ bolas ou esferas, numeradas de 1 a M e perfeitamente iguais salvo na numeração, e pensemos em M extracções *casuais* consecutivas, sem reposição, de uma bola da urna. Aqui, a definição de extracção casual é a mesma que no exemplo 82, desde que se leia «pela sua numeração» em vez de «pela sua cor». Portanto, o mais natural é partirmos do espaço Ω formado por todas as permutações (simples) das M bolas e probabilizarmos em seguida Ω, dotado do corpo-σ mais amplo, mediante a hipótese dos casos igualmente prováveis. Logo a probabilidade $\mathsf{P}(A)$ de qualquer acontecimento A será dada por 108), com $N=M!$. Posto isso, chamemos *encontro* a toda a coincidência entre o número duma extracção e o número da bola extraída correspondente. Então, o acontecimento A_0 caracterizado por pelo menos um encontro nas M extracções tem M formas A_m $(m=1,2,\ldots,M)$, com A_m a significar um encontro na extracção número m. Seja qual for m e sejam quais forem os m inteiros $l_1, l_2,\ldots,l_m$ tais que $1\leqq l_1<l_2<\cdots<l_m\leqq M$, a composição $A_{l_1}\cap A_{l_2}\cap\cdots\cap A_{l_m}$ tem tantos casos favoráveis quantas aquelas permutações dos M primeiros naturais em que cada um dos ll ocupa o lugar de número igual ao l considerado e os restantes M-m elementos podem distribuir-se livremente pelos lugares ainda disponíveis. Portanto, as fórmulas 108) e 106), a segunda com l, m e M em lugar de respec-

tivamente m, n e N e com ${}_M C_m$ parcelas iguais a $(M-m)!/M!$ para cada escolha de m, dão

$$\mathsf{P}(A_0) = \sum_{1 \leq m \leq M} \left[(-1)^{m-1} \cdot \frac{M!}{m!(M-m)!} \cdot \frac{(M-m)!}{M!}\right] =$$

$$= \sum_{1 \leq m \leq M} [(-1)^{m-1}/m!]$$

ou seja um número que valores de M não muito grandes aproximam notàvelmente de $\sum_{1 \leq m < +\infty} [(-1)^{m-1}/m!] = 1 - 1/e$. Eis a solução do problema de achar $\mathsf{P}(A_0)$, conhecido pelo nome de *problema do encontro*.

*
* *

Posto isso, vamos tratar das coordenações completas mais usadas.

Dado um conjunto com $n > 0$ objectos, chama-se *arranjo completo* ou *arranjo com repetição dos n objectos tomados k a k* a toda a coordenação completa do grau k cuja identificação se faz a partir dos elementos que a constituem e, cumulativamente, a partir da ordem por que se sucedem esses elementos. Assim, se $n = 3$ e $k = 4$, o arranjo completo de elementos 1, 2, 2, 3 difere do arranjo completo de elementos 2, 2, 3, 1, isto apesar de estarmos na presença de duas coordenações formadas pelos mesmos elementos.

Usaremos o símbolo ${}_n\overline{A}_k$ para representar o número total de arranjos completos de n objectos dados tomados k a k e interpretaremos a única coordenação do grau 0 como o único arranjo completo dos n objectos considerados tomados 0 a 0. Então, é óbvio que ${}_n\overline{A}_k = {}_nA_k$ para $k \leq 1$ e que ${}_n\overline{A}_k > {}_nA_k$ para $k > 1$. Por outro lado, escolhido qualquer $k > 1$, os arranjos completos de n objectos dados tomados k a k são tantos quantas são as colecções ordenadas com k números que podem formar-se em k passos consecutivos, cada um dos quais consiste em seleccionar arbitràriamente um dos n primeiros naturais. Consequentemente, tem-se, para cada $k \geq 0$, a igualdade

111) $${}_n\overline{A}_k = n^k.$$

Aqui o caso particular $k=n$, correspondente às *permutações completas ou permutações com repetição de n objectos dados,* não oferece interesse de maior, já que k pode exceder n.

Exemplo 85. Retome-se o exemplo 82 substituindo, porém, as tiragens casuais consecutivas sem reposição por outras com reposição. Então, Ω será formado por todos os arranjos completos das n bolas tomadas k a k. Logo $N={}_n\bar{A}_k$ e $f_A={}_a\bar{A}_k$ dá, atendendo a 108) e a 111), o resultado $\mathsf{P}(A)=(a/n)^k>[a!(n-k)!]/$ $/[(a-k)!n!]$.

Dado ainda um conjunto com $n>0$ objectos, chama-se *combinação completa* ou *combinação com repetição dos n objectos tomados k a k* a toda a coordenação completa do grau k cuja identificação se faz apenas a partir dos elementos que a constituem, sem atender à ordem por que se sucedem esses elementos. Assim, se $n=3$ e $k=4$, a combinação completa de elementos 1, 2, 2, 3 não se distinge da combinação completa de elementos 2, 2, 3, 1, isto apesar da diferença na disposição dos elementos.

Usaremos o símbolo ${}_n\bar{C}_k$ para representar o número total de combinações completas de n objectos dados tomados k a k e interpretaremos a única coordenação do grau 0 como a única combinação completa dos n objectos considerados tomados 0 a 0. Então, é óbvio que ${}_n\bar{C}_k={}_nC_k$ para $k\leqq 1$, que ${}_n\bar{C}_k>{}_nC_k$ para $k>1$ e que ${}_1\bar{C}_k=1$ para todo o k.

Posto isso, servimo-nos da *técnica das colecções ordenadas formadas por letras* a fim de calcularmos o valor de ${}_n\bar{C}_k$ para $n>1$ e $k>0$ arbitrários. Incidentemente, a técnica referida resulta cómoda não só no caso presente, como também em vários outros problemas de combinatória.

Escolhida arbitràriamente uma combinação completa de $n>1$ objectos dados tomados k a k, com $k>0$, tomem-se $n-1$ letras a, faça-se anteceder o primeiro a de tantas letras b quantos os elementos da combinação iguais a 1, coloquem-se a seguir ao último a tantos b quantos os elementos da combinação iguais a n e intercalem-se entre as letras a números r e $r+1$, com $1\leqq r\leqq n-2$, tantos b quantos os elementos da combinação iguais a $r+1$. Procedendo do modo indicado, forma-se uma colecção ordenada abrangendo $n+k-1$ letras, das quais $n-1$ coincidem com a e as k restantes coincidem com b. Por exemplo, se $n=3$, a combinação completa de elementos 1, 2, 2, 3 determina a colecção ordenada formada pelas letras b, a, b, b, a, b.

Inversamente, escolhida arbitràriamente uma colecção ordenada formada por $n+k-1$ letras, das quais $n-1>0$ coincidem com a e as restantes $k>0$ coincidem com b, podemos fazer corresponder aquela combinação completa de n objectos dados tomados k a k que tem tantos elementos iguais a 1 quantos os b anteriores ao primeiro a, que tem tantos elementos iguais a n quantos os b posteriores ao último a e que tem tantos elementos iguais a $r+1$, com $1 \leqq r \leqq n-2$, quantos os b intercalados entre as letras a números r e $r+1$. Por exemplo, se $n=4$, a colecção formada pelas letras a, a, b, b, b, b, b, a determina a combinação completa de elementos 3, 3, 3, 3, 3.

Como as duas correspondências descritas são recíprocas uma da outra, estamos aptos a afirmar que as hipóteses $n>1$ e $k>0$ tornam o número ${}_n\overline{C}_k$ igual ao número de maneiras por que $n-1$ letras a e k letras b podem dispor-se em colecções ordenadas diferentes. Este facto, a fórmula 110) e os resultados anteriores relativos às hipóteses $n=1$ e $k=0$ provam que vale, em todos os casos, a igualdade

112) $${}_n\overline{C}_k = {}_{n+k-1}C_k = (n+k-1)!/[k!(n-1)!].$$

Assim, existem 15 combinações completas de 3 objectos dados tomados 4 a 4.

Exemplo 86. Considere-se uma função f das n variáveis reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e suponham-se contínuas, num ponto determinado, todas as derivadas da ordem k que podem formar-se a partir de f. Então, o número máximo de derivadas distintas da ordem k coincide com o número total de combinações completas das n variáveis consideradas tomadas k a k. Em particular, se $n=2$, esse número máximo sai igual a $k+1$ e, se $k=2$, o dito número sai igual a $n(n+1)/2$.

*
* *

Fechamos esta secção tratando dum tipo de coordenações especiais que podem obter-se quando se igualam entre si certos pontos do conjunto finito e não-vazio donde se parte.

Dado um conjunto com $n>0$ objectos, suponhamos que estes se dividem em $q>0$ classes tais que a classe número $p\,(p=1, 2, \ldots, q)$ fica com $n_p \geqq 0$ objectos, que se consideram iguais entre si todos os objectos pertencentes à mesma classe e que se distingue entre quaisquer objectos situados em classes diferentes. Nesta conformidade, chama-se *permutação por classes dos n objectos dados* a toda a coordenação simples do grau n cuja identificação se faz a partir dos tipos de classe dos elementos que a constituem e, cumulativamente, a partir da ordem por que se sucedem esses tipos de classe.

Por exemplo, dado um conjunto de 7 bolas, suponhamos que cada uma está marcada com uma letra que é um a em 3 das bolas, um b noutras 3, um c na última e um d em bola alguma. Se convencionarmos considerar iguais entre si bolas marcadas com a mesma letra, as permutações (simples) das bolas dadas cedem o lugar a permutações por classes, resultando $n=7$, $q=4$, $n_1=n_2=3$, $n_3=1$ e $n_4=0$. Então, escolhidas três permutações (simples) distintas, a primeira de elementos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, a segunda de elementos 3, 2, 1, 5, 4, 6, 7 e a terceira de elementos 1, 4, 2, 5, 7, 6, 3, as duas primeiras determinam a mesma permutação por classes, a formada pelas letras a, a, a, b, b, b, c, e a última determina uma permutação por classes diferente da anterior, a formada pelas letras a, b, a, b, c, b, a.

Representemos pelo símbolo ${}_nP_{n_1, n_2, \ldots, n_q}$ o número total de permutações por classes de n objectos dados que se dividem em q classes segundo as condições acima referidas. Evidentemente, tem-se

$$n=n_1+n_2+\cdots+n_q \quad \text{e} \quad {}_nP_{n_1, n_2, \ldots, n_q} \leqq {}_nA_n\,,$$

verificando-se o sinal de igualdade da última relação quando e só quando $n_p \leqq 1$ para todo o p admissível. Por outro lado, se n'_1, $n'_2,\dots,n'_r$ forem os inteiros n_p positivos, então o número total em causa resulta igual ao número de maneiras diferentes por que n'_1 símbolos todos iguais a 1, n'_2 símbolos todos iguais a 2, etc. e n'_r símbolos todos iguais a r podem distribuir-se por n lugares numerados de 1 a n, número de maneiras este que vamos determinar pela *técnica da marcação de lugares numerados* (a qual não é privativa do problema presente).

De início há ${}_nA_{n'_1}/n'_1!$ modos de marcar n'_1 dos n lugares disponíveis para os n'_1 símbolos *todos iguais* a 1, a seguir há ${}_{n-n'_1}A_{n'_2}/n'_2!$ modos de marcar n'_2 dos $n-n'_1$ lugares restantes para os n'_2 símbolos *todos iguais* a 2, etc. e, por fim, há ${}_{n-n'_1-\dots-n'_{r-1}}A_{n'_r}/n'_r!$ modos de marcar os n'_r lugares sobrantes para os n'_r símbolos *todos iguais* a r. Daí e de 110) tiramos a igualdade

$$113)\qquad {}_nP_{n_1,n_2,\dots,n_q}={}_nC_{n'_1}\cdot{}_{n-n'_1}C_{n'_2}\cdot\dots\cdot{}_{n-n'_1-\dots-n'_{r-1}}C_{n'_r}.$$

Portanto, se recorrermos mais uma vez a 110) e se tomarmos em conta a convenção $0!=1$, obtemos a nova igualdade

$$114)\qquad {}_nP_{n_1,n_2,\dots,n_q}=\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdots n_q!}.$$

Em particular, tem-se ${}_7P_{3,3,1,0}=7!/(3!\cdot 3!\cdot 1!\cdot 0!)=140$.

Exemplo 87. Tomemos $q\geqq 2$ variáveis x_1, $x_2,\dots,x_q$ e um número natural arbitrário n. Então, sejam quais forem os inteiros não-negativos n_1, $n_2,\dots,n_q$, *tomados pela ordem da sua escolha* e com soma igual a n, o desenvolvimento da potência de expoente n e de base $x_1+x_2+\dots+x_q$ contém o monómio $x_1^{n_1}\cdot x_2^{n_2}\cdots x_q^{n_q}$ um número de vezes igual ao número de permutações por classes de n variáveis dadas quando estas se dividem em q classes tais que a classe número $p\,(p=1,\,2,\dots,q)$ fica com $n_p\geqq 0$ variáveis todas iguais a x_p e que se faz a distinção entre quaisquer variáveis portadoras de índices diferentes. Como o desenvolvimento referido conduz a um polinómio homogéneo do grau n nas variáveis x_p, concluímos de 114) que se verifica a fórmula

$$(x_1+x_2+\cdots+x_q)^n=$$

$$=\sum_{n_1+n_2+\cdots+n=n}\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdots n_q!}\,x_1^{n_1}\cdot x_2^{n_2}\cdots x_q^{n_q},$$

a qual é conhecida pela designação de *fórmula do multinómio* e se reduz à fórmula do binómio, dada no exemplo 83, se pusermos $q=2$, $n_1=k$, $x_1=x$ e $x_2=y$ e se atendermos à igualdade 110). Na prática são fundamentais as colecções formadas por q inteiros não-negativos, considerados sem atender à sua ordem e tendo uma soma igual a n, visto o coeficiente numérico $n!/(n_1!\cdot n_2!\cdots n_q!)$ se mostrar insensível a qualquer permutação por classes das grandezas n_p, supostas fixadas e divididas nas $n+1$ classes que se obtêm tomando sucessivamente os n_p iguais a 0, os iguais a 1, etc. e os iguais a n. Além disso, se atribuirmos o valor 1 a cada uma das variáveis x_p da fórmula do multinómio, tiramos o valor q^n para o número total de permutações por classes que podem construir-se a partir de n objectos dados dividindo-os, dos diversos modos possíveis, em q classes (compreendendo classes vazias) tais que se consideram iguais entre si todos os objectos da mesma classe e que se consideram distintos quaisquer objectos situados em classes diferentes.

48. Espaços de probabilidade obtidos por marginação e por multiplicação de espaços de medida. Na primeira parte desta secção vamos adaptar o estudo feito na secção 31 ao caso particular em que o ente marginal é uma probabilidade ou um espaço de probabilidade.

Seja $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ um espaço de medida e suponhamos que Ω é o produto dum número finito ou duma infinidade numerável de espaços $\Omega_n\,(n=1,\,2,\,3,\ldots)$. Se α denotar um número finito e positivo e se repartirmos a colecção dos índices n admissíveis por duas colecções parciais não-vazias, uma formada pelos números $h,\ i>h,\ j>i,\ldots$ e a outra formada pelos números $r, s>r, t>s,\ldots$, então a igualdade $\alpha=\mu(\Omega)$, impossível caso μ seja uma medida infinita ou nula e sempre possível caso μ seja uma medida finita e significativa [N XXXV], constitui-se em condição necessária e suficiente para que a medida marginal ${}_{\alpha}\mu_{(h,i,j,\ldots)} = {}_{\alpha}\mu_{r,s,t,\ldots}$, definida por 37), resulte uma probabilidade, a qual representaremos suprimindo, no símbolo respectivo, o índice esquerdo α, òbviamente supérfluo. Evidentemente, o exposto aplica-se ao caso particular de a medida inicial μ ser uma probabilidade, caso este em que a nossa condição necessária e suficiente toma a forma $\alpha = 1$.

Nesta conformidade, suponhamos que a medida μ, definida em $(\Omega, \mathcal{A})$, é finita e significativa ou, em particular, é uma probabilidade P, representemos por C o cilindro mensurável genérico ou, em particular, o acontecimento cilíndrico genérico, de geratrizes paralelas a $\Omega_h, \Omega_i, \Omega_j, \ldots$, e escrevamos $C_{(h,i,j,\ldots)} = C_{r,s,t,\ldots}$ para referir a base de C em $\Omega_{(h,i,j,\ldots)} = = \Omega_{r,s,t,\ldots}$. Então, a função definida em $(\Omega, \mathcal{A})_{(h,i,j,\ldots)} = (\Omega, \mathcal{A})_{r,s,t,\ldots}$ através da relação

$$115) \qquad \mu_{(h,i,j,\ldots)}(C_{(h,i,j,\ldots)}) = \mu_{r,s,t,\ldots}(C_{r,s,t,\ldots}) = \mu(C)/\mu(\Omega)$$

ou, em particular, através da relação

$$115') \qquad \mathsf{P}_{(h,i,j,\ldots)}(C_{(h,i,j,\ldots)}) = \mathsf{P}_{r,s,t,\ldots}(C_{r,s,t,\ldots}) = \mathsf{P}(C)$$

é a **única** *lei ou probabilidade que resulta da marginação de* μ *ou, em particular, de* P *com respeito a* $\Omega_{(r,s,t,\ldots)} = \Omega_{h,i,j,\ldots}$ e que denominaremos, muito naturalmente, *lei ou probabilidade marginal de* μ *ou, em particular, de* P, *tomada no espaço* $\Omega_{r,s,t,\ldots}$. Corresponde um espaço de probabilidade que representamos por $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)_{(h,i,j,\ldots)} = (\Omega, \mathcal{A}, \mu)_{r,s,t,\ldots}$ ou, em particular, por $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})_{(h,i,j,\ldots)} = (\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})_{r,s,t,\ldots}$, que consideramos resultante da *marginação de* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ou, em particular, de* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ *com respeito a* $\Omega_{h,i,j,\ldots}$ e a que chamamos *espaço de probabilidade marginal de* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ou, em particular, de* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$, *tomado em* $\Omega_{r,s,t,\ldots}$.

Evidentemente, se tomarmos números positivos $\alpha_h, \alpha_i, \ldots$ tais que o produto $\alpha_h \cdot \alpha_i \cdot \ldots$ resulte absolutamente convergente e de valor igual a $\mu(\Omega)$, então o espaço de probabilidade proveniente da marginação de $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ com respeito a $\Omega_{h,i,j,\ldots}$ pode obter-se por marginações simples consecutivas tais que a primeira elimina Ω_h e introduz o factor de escala α_h, a segunda elimina Ω_i e introduz o factor de escala α_i, etc. No caso particular supramencionado acresce que pode tomar-se $\alpha_h = \alpha_i = \cdots = 1$, eventualidade esta em que todas as marginações parciais conduzem a espaços de probabilidade. Em qualquer dos casos, as marginações simples possuem as propriedades comutativa e associativa.

Semelhantemente ao que se viu na observação da página 138, pode utilizar-se 115) para partir dum primeiro membro confundido com uma probabilidade, substituir em seguida a grandeza $\mu(\Omega)$ do segundo membro por um número finito e positivo que se queira escolher e alcançar assim uma medida $\mu(C)$ finita e significativa que resultará uma probabilidade se e só se o número escolhido tiver sido a unidade.

Observação. Pode exprimir-se a essência de 115') através do enunciado abreviado seguinte: «A probabilidade de qualquer acontecimento cilíndrico é igual à probabilidade marginal da sua base.»

Vamos acrescentar duas proposições relativas ao assunto em estudo.

Para começar, temos a proposição seguinte:

LVIIII) «Para que um espaço de medida ou de probabilidade seja completo, temos a condição necessária, embora insuficiente, que resulte completo qualquer espaço de probabilidade proveniente da marginação do espaço de medida inicial.»

Demonstração de LVIII. A condição necessária do enunciado é uma consequência imediata da proposição XII. Pode vêr-se que a mesma condição é insuficiente retomando a função μ do exemplo 41 ou substituindo essa função pelo seu dobro.

A outra das proposições anunciadas é a seguinte:

LIX) «A propriedade dum espaço de probabilidade de satisfazer à hipótese dos casos igualmente prováveis é uma condição suficiente, embora desnecessária, para que a mesma hipótese se verifique simultâneamente em todos os espaços de probabilidade que possam obter-se por marginação do primeiro.»

Demonstração de LIX. Suponhamos que Ω é o produto dos espaços Ω_n e que o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ satisfaz à hipótese dos casos igualmente prováveis. Então, os textos que precedem 108) e N VI obrigam Ω a ter um número finito de pontos $N = \prod_n N_n$, onde, dado n, o símbolo N_n representa o número de pontos de Ω_n.(*) Logo, escolhidos arbitràriamente valores dos índices $r, s, t, \ldots$, o espaço $\Omega_{r,s,t,\ldots}$ fica com $N_r \cdot N_s \cdot N_t \cdot \ldots$ pontos e qualquer conjunto elementar extraido de $\Omega_{r,s,t,\ldots}$ confunde-se com a base dum cilindro, extraido de Ω, que tem $N_h \cdot N_i \cdot N_j \cdot \ldots$ pontos e que pertence ao corpo-σ designado por $\mathcal{A}$. Nesta conformidade, seja qual for o ponto $(\omega_r, \omega_s, \omega_t, \ldots) \in \Omega_{r,s,t,\ldots}$, a relação 115') dá

$$\mathsf{P}_{r,s,t,\ldots}(\{(\omega_r, \omega_s, \omega_t, \ldots)\}) = \frac{N_h \cdot N_i \cdot N_j \cdot \ldots}{N} = \frac{1}{N_r \cdot N_s \cdot N_t \cdot \ldots}$$

e, portanto, está provado que se verifica a hipótese dos casos igualmente prováveis em todos os espaços de probabilidade marginais $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})_{r,s,t,\ldots}$.

Posto isso, consideremos os dois espaços Ω_1 e Ω_2, qualquer deles formado pelos dois pontos 1 e 2. Então, se $\mathcal{A}$ for o corpo-σ mais amplo que pode instituir-se em $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, a probabilidade P definida, em $(\Omega, \mathcal{A})$, pelas igualdades $\mathsf{P}(\{(1, 1)\}) = \mathsf{P}(\{(2, 2)\}) = 1/3$ e $\mathsf{P}(\{(1, 2)\}) = \mathsf{P}(\{(2,1)\}) = 1/6$ dá probabilidades marginais $\mathsf{P}_r (r=1, 2)$ tais que $\mathsf{P}_r(\{1\}) = \mathsf{P}_r(\{2\}) = 1/2$ para

(*) Imediatamente se reconhece que a desigualdade $N_n > 1$ só é possível para um número finito de valores do índice n.

cada r. Portanto, é perfeitamente possível que um espaço de probabilidade não satisfaça à hipótese dos casos igualmente prováveis quando esta se verifica em todos os espaços de probabilidade que possam obter-se por marginação do primeiro.

Por fim, retomemos o quadro sinóptico dado na parte final da secção 31 e vejamos as acomodações a fazer para que surja a particularização presentemente adoptada.

Evidentemente, dada a medida μ finita e significativa ou, em particular, dada a probabilidade P, cada um dos números β e γ não pode deixar de tomar o valor $\mu(\Omega)$ ou, em particular, o valor 1 e os índices esquerdos podem suprimir-se, por se tornarem supérfluos.

Exemplo 88. Tomemos os espaços Ω_1 e Ω_2, o primeiro formado pelos números 1, 2 e 3 e o outro formado pelos números 1 e 2, interpretemos $\mathcal{A}$ como o corpo-σ mais amplo que pode instituir-se em $\Omega=\Omega_1\times\Omega_2$ e consideremos os cilindros $B=\{1\}\times\Omega_2$, $B'=\{2\}\times\Omega_2$, $B''=\{3\}\times\Omega_2$, $C=\Omega_1\times\{1\}$ e $C'=\Omega_1\times\{2\}$. Nesta conformidade, se partirmos duma lei particular definida em $(\Omega,\mathcal{A})$, o quadro sinóptico acima referido pode tomar o aspecto que passamos a apresentar.

$\mathcal{C} \backslash \mathcal{B}$	B	B'	B''	Ω
C	$\mathsf{P}(B\cap C)=0$	$\mathsf{P}(B'\cap C)=1/10$	$\mathsf{P}(B''\cap C)=1/5$	$\mathsf{P}_2(\{1\})=3/10$
C'	$\mathsf{P}(B\cap C')=3/10$	$\mathsf{P}(B'\cap C')=2/5$	$\mathsf{P}(B''\cap C')=0$	$\mathsf{P}_2(\{2\})=7/10$
Ω	$\mathsf{P}_1(\{1\})=3/10$	$\mathsf{P}_1(\{2\})=1/2$	$\mathsf{P}_1(\{3\})=1/5$	$\mathsf{P}(\Omega)=1$

Aqui a linha e a coluna *marginais* do quadro são inteiramente suficientes para definir as probabilidades ou leis marginais, respectivamente P_1 e P_2.

*
* *

Passamos a adaptar o estudo feito na secção 32 ao caso particular em que o produto é uma probabilidade ou um espaço de probabilidade.

Para começar, vejamos a nova forma da proposição XIII e do texto que a precede.

LX) «Dado um número finito de espaços de medida $[\Omega_n(\omega_n), \mathcal{A}_n(A_n), \mu_n(A_n)]$ $(n=1, 2, \ldots, N)$, eles não podem admitir nenhum produto igual a um espaço de probabilidade se tiver lugar a desigualdade $\prod_{1 \leq n \leq N} \mu_n(\Omega_n) \neq 1$ e, em particular, se alguma das medidas μ_n for nula ou infinita.

Pelo contrário, caso se tenha $\prod_{1 \leq n \leq N} \mu_n(\Omega_n) = 1$ ou, em particular, caso cada medida μ_n seja uma lei P_n, então os espaços de medida dados admitem um e um só produto confundido com o espaço de probabilidade $[\Omega(\omega), \mathcal{A}(A), \mathsf{P}(A)]$, onde $(\Omega, \mathcal{A}) = \prod_{1 \leq n \leq N} (\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ e onde P significa o único produto das medidas μ_n ou, em particular, das leis P_n. A lei P atribui a qualquer conjunto da forma $\prod_{1 \leq n \leq N} A_n$ uma probabilidade igual ao produto (aritmético) das medidas ou, em particular, das probabilidades dos conjuntos A_n e atribui ao conjunto genérico A uma probabilidade dada pela relação

$$a) \quad \mathsf{P}(A) = \inf_{\bigcup_m (A_{m,1} \times A_{m,2} \times \ldots \times A_{m,N}) \supset A} \sum_m [\mu_1(A_{m,1}) \cdot \mu_2(A_{m,2}) \ldots \mu_N(A_{m,N})],$$

onde os diversos símbolos μ_n devem substituir-se por P_n no caso particular referido e onde o ínfimo diz respeito a todas as coberturas de A formadas por uniões finitas ou numeráveis cuja parcela número m seja um produto de conjuntos $A_{m,n} \in \mathcal{A}_n$.

Em aditamento, para que o produto P ou $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ fique completo, é condição necessária, embora insuficiente, que todos os seus factores sejam completos.»

Demonstração de LX. Quanto à parte introdutória do enunciado, veja-se N XXXV e a igualdade 40), na qual a função Θ não pode deixar de ser a restrição comum de todos os produtos das medidas μ_n à classe dos conjuntos $\prod_n A_n$. Na parte central do teorema, trata-se do aproveitamento duma parte de XIII. Quanto ao aditamento ao enunciado, basta atender à parte final de XIII e ao contraexemplo seguinte:

Seja $\mathcal{C}_1$ o corpo-σ gerado pelo conjunto $\{1, 2\} = A_1 \subset \Omega_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ e seja $\mathcal{C}_2$ o corpo-σ mais amplo que pode instituir-se no espaço $\Omega_2 = \{1, 2\}$. Então, se P_1 for a probabilidade completa definida em $(\Omega_1, \mathcal{C}_1)$ pela igualdade $\mathsf{P}_1(A_1) = 1/2$ e se P_2 for a probabilidade completa definida em $(\Omega_2, \mathcal{C}_2)$ pela igualdade $\mathsf{P}_2(\{1\}) = 0$, a lei $\mathsf{P} = \mathsf{P}_1 \times \mathsf{P}_2$ atribui o valor 0 ao produto $A = A_1 \times \{1\}$, o qual contém o conjunto $M = \{1\} \times \{1\}$. Por outro lado, como $\mathcal{D}_1 = \{A_1, \overline{A_1}\}$ é uma decomposição irredutível de $(\Omega_1, \mathcal{C}_1)$, isto por causa de N XVI, inferimos primeiro a impossibilidade da relação $\{1\} \in \mathcal{C}_1$ e inferimos em seguida, atendendo a N XXVII', a impossibilidade da relação $M \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$. Portanto, a lei P resulta incompleta [veja-se o texto da secção 45 que precede o exemplo 77].

Segue uma proposição que adapta XVI à situação presente.

LXI) «Dada uma infinidade numerável de espaços de probabilidade $[\Omega_n(\omega_n), \mathcal{C}_n(A_n), \mathsf{P}_n(A_n)]\ (n = 1, 2, 3, \ldots)$, eles admitem um e só um produto confundido com o espaço de probabilidade $[\Omega(\omega), \mathcal{C}(A), \mathsf{P}(A)]$, onde $(\Omega, \mathcal{C}) = \prod_{1 \leq n < +\infty} (\Omega_n, \mathcal{C}_n)$ e onde P significa o único produto das leis P_n. A lei P atribui a qualquer conjunto da forma $\prod_{1 \leq n < +\infty} A_n$ uma probabilidade igual ao produto (aritmético) das probabilidades dos acontecimentos A_n e atribui ao conjunto genérico A uma probabilidade dada pela relação

$$a) \qquad \mathsf{P}(A) = \inf_{\bigcup_m (A_{m,1} \times A_{m,2} \times \ldots \times A_{m,n} \times \ldots) \supset A} \sum_m [\mathsf{P}_1(A_{m,1}) \cdot \mathsf{P}_2(A_{m,2}) \ldots \mathsf{P}_n(A_{m,n}) \ldots],$$

onde o ínfimo diz respeito a todas as coberturas de A formadas por uniões finitas ou numeráveis cuja parcela número m seja um produto de conjuntos $A_{m,n} \in \mathcal{C}_n$ tais que $A_{m,n} \neq \Omega_n$ quando muito um número finito de vezes.

Em aditamento, para que o produto P ou $(\Omega, \mathcal{C}, \mathsf{P})$ fique completo, é condição necessária, embora insuficiente, que todos os seus factores sejam completos.»

Demonstração de LXI. Na parte principal do teorema, tome-se em conta o enunciado de XVI, a definição da classe $\mathcal{G}$ considerada no texto a seguir a 52) e a parte do primeiro trecho da 3.ª fase da demonstração de XVI onde se alude à relação 49). Quanto ao aditamento ao nosso teorema, basta atender à parte final de XVI e ao contra exemplo seguinte:

Tomem-se os mesmos espaços de probabilidade completos $(\Omega_1, \mathcal{C}_1, \mathsf{P}_1)$ e $(\Omega_2, \mathcal{C}_2, \mathsf{P}_2)$ usados na segunda parte da demonstração de LX e acrescentem-se infinitos espaços de probabilidade $(\Omega_n, \mathcal{C}_n, \mathsf{P}_n)$ $(n=3, 4, 5, \ldots)$, todos iguais a $(\Omega_2, \mathcal{C}_2, \mathsf{P}_2)$. Então, a lei $\mathsf{P} = \prod_{1 \leqq n < +\infty} \mathsf{P}_n$ atribui o valor 0 ao produto $A = A_1 \times \times \{1\} \times \{1\} \times \cdots \times \{1\} \times \cdots$, o qual contém o conjunto $M = \{1\} \times \times \{1\} \times \{1\} \times \cdots \times \{1\} \times \cdots$. A relação $M \in \prod_{1 \leqq n < +\infty} \mathcal{C}_n$ torna-se impossível e, portanto, a lei P resulta incompleta.

Separámos as proposições LX e LXI, apesar de serem bastante semelhantes, porque na altura pretendíamos discriminar os casos dum número finito e duma infinidade numerável de factores. Todavia, deixaremos de fazer tal distinção nas proposições restantes desta secção.

Posto isso, tiramos de XIV e de XVII a proposição seguinte:

LXII) «Quando se trabalha com um número finito ou com uma infinidade numerável de factores, a propriedade associativa da multiplicação vale todas as vezes que o produto for uma probabilidade ou um espaço de probabilidade.»

Semelhantemente, tiramos de XV e de XVIII a proposição seguinte:

LXIII) «Dado um número finito ou uma infinidade numerável de espaços de probabilidade $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mathsf{P}_n)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, considere-se qualquer colecção não-vazia que seja formada por números $h, i>h, j>i, \ldots$ e que seja extraida da colecção dos valores n possíveis sem coincidir com ela. Então, a marginação do (único) produto de todas as probabilidades P_n [ou de todos os espaços de probabilidade $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mathsf{P}_n)$] com respeito ao espaço $\Omega_h \times \Omega_i \times \Omega_j \times \cdots$ (e ao factor de escala 1) dá o (único) produto daquelas probabilidades P_n [ou daqueles espaços de probabilidade $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mathsf{P}_n)$] para as [ou os] quais $n \neq h, i, j, \ldots$.»

Acrescentamos uma proposição relativa à hipótese dos casos igualmente prováveis, a saber:

LXIV) «Dado um número finito ou uma infinidade numerável de espaços de probabilidade, considere-se o seu (único) produto e suponha-se finito o número de pontos do espaço em que se encontra definido esse produto. Então, para que o produto satisfaça à hipótese dos casos igualmente prováveis, é condição necessária e suficiente que a mesma hipótese se verifique em cada um dos seus factores.»

Demonstração de LXIV. Representemos por $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mathsf{P}_n)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ os espaços de probabilidade dados, designemos por $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ o seu (único) produto e indiquemos pelo símbolo N o número (finito) de pontos de Ω. Nesta conformidade, se Ω_n tiver N_n pontos, o texto que precede N VI dá a igualdade numérica $N = \prod_n N_n$ [a propósito da qual pode repetir-se a nota à demonstração de LIX].

Admitamos agora a hipótese dos casos igualmente prováveis em cada um dos espaços de probabilidade dados. Então, escolhido arbitràriamente um valor admissível de n, qualquer ponto $\omega_n \in \Omega_n$ permite escrever $\mathsf{P}_n(\{\omega_n\}) = 1/N_n$. Logo todo o ponto $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots) \in \Omega$ dá a relação

$$116) \qquad 1/N = \prod_n \mathsf{P}_n(\{\omega_n\}) = \mathsf{P}(\prod_n \{\omega_n\}) = \mathsf{P}(\{\omega\}),$$

a qual prova que $(\Omega, \mathcal{A}, \mathsf{P})$ satisfaz à hipótese dos casos igualmente prováveis.

Acabamos de deduzir a condição suficiente referida no enunciado. Quanto à condição necessária, ela é uma consequência imediata das proposições LIX e LXIII. Fica assim terminada a demonstração de LXIV.

Observação. A relação 116) vale, sem dúvida, se $(\Omega, \mathcal{Q}, \mathsf{P})$ satisfizer à hipótese dos casos igualmente prováveis. Nesta conformidade, se a dita hipótese falhar num factor de $(\Omega, \mathcal{Q}, \mathsf{P})$ de índice digamos m, podemos escolher pontos $\omega'_n \in \Omega_n$ tais que $\mathsf{P}_n(\{\omega'_n\}) \leqq 1/N_n$ para cada n, com o sinal $<$ para $n=m$, donde a relação absurda $1/N=(1/N_m)\cdot \prod_{n \neq m} (1/N_n) > \prod_n \mathsf{P}_n(\{\omega'_n\})$. Eis uma alternativa (bastante elementar) para a dedução da condição necessária de LXIV.

Fechamos a secção com a seguinte proposição, por vezes bastante útil:

LXV) «Dados os espaços de probabilidade $(\Omega_n, \mathcal{Q}_n, \mathsf{P}_n)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ formando uma colecção finita ou numerável, admita-se que cada um deles satisfaz à hipótese dos casos igualmente prováveis e que o espaço $\Omega = \prod_n \Omega_n$ tem um número finito de pontos. Então, se $(\Omega, \mathcal{Q}, \mathsf{P})$ for um espaço de probabilidade satisfazendo à hipótese dos casos igualmente prováveis, não pode deixar de ter lugar a igualdade $(\Omega, \mathcal{Q}, \mathsf{P}) = \prod_n (\Omega_n, \mathcal{Q}_n, \mathsf{P}_n)$.»

Demonstração de LXV. Como $\Omega = \prod_n \Omega_n$ e como LX e LXI asseguram a existência e a unicidade de $(\prod_n \Omega_n, \prod_n \mathcal{Q}_n, \prod_n \mathsf{P}_n)$, só falta deduzir as igualdades $\mathcal{Q} = \prod_n \mathcal{Q}_n$ e $\mathsf{P} = \prod_n \mathsf{P}_n$.

Em primeiro lugar, se os símbolos N e N_n conservarem os significados referidos na demonstração de LXIV, então cada Ω_n terá um número finito de pontos ω_{n,p_n} $(p_n=1,\ldots, N_n)$ e Ω terá um número finito de pontos ω_p $(p=1,\ldots, N)$. Por outro lado, o texto anterior a 108) mostra que $\mathcal{Q}=2^\Omega$ e que $\mathcal{Q}_n = 2^{\Omega_n}$ para cada n. Daí e da nota à demonstração de N XXVI concluímos que $\mathcal{Q} = \{\{\omega_1\},\ldots,\{\omega_N\}\}^* = \prod_n \{\{\omega_{n,1}\},\ldots,\{\omega_{n,N_n}\}\} = \prod_n \mathcal{Q}_n$.

Posto isso, seja qual for n, escolhamos arbitràriamente um acontecimento $A_n \in \mathcal{Q}_n$ e designemos por f_n o número de casos favoráveis a A_n. Então, a definição da multiplicação de medidas e a relação $\mathsf{P}(\prod_n A_n) = (\prod_n f_n)/(\prod_n N_n) = \prod_n \mathsf{P}_n(A_n)$ permitem terminar a nossa demonstração.

INDICE REMISSIVO

Letra G