UNIVERSIDADE DE LUANDA
UNIVERSIDADE DE LISBOA

ELEMENTOS DA TEORIA DA MEDIDA COM RELEVO PARA A TEORIA DA PROBABILIDADE

PARTE B

CONSTANTES ASSINTÓTICAS E A LEI FRACA DOS GRANDES NÚMEROS

por
Pedro B. T. Braumann
Professor das Universidades de Lisboa e de Luanda

NOVA LISBOA
1969

UNIVERSIDADE DE LUANDA
UNIVERSIDADE DE LISBOA

ELEMENTOS DA TEORIA DA MEDIDA COM RELEVO PARA A TEORIA DA PROBABILIDADE

PARTE B

CONSTANTES ASSINTÓTICAS E A LEI FRACA DOS GRANDES NÚMEROS

por
Pedro B. T. Braumann
Professor das Universidades de Lisboa e de Luanda

NOVA LISBOA
1969

NOTA EXPLICATIVA

Este volume corresponde à parte B inteira do tratado intitulado «Elementos da Teoria da Medida com relevo para a Teoria da Probabildade». A propósito, pode repetir-se tudo quanto se disse na nota explicativa posta no princípio dos fascículos primeiro e segundo da parte A do mesmo tratado, com as duas alterações seguintes: O volume presente é o segundo duma série apresentada pelos serviços universitários de Luanda e, desta vez, a bibliografia encontra-se colocada no fim do próprio volume.

Há, porém, uma incidência que pede um esclarecimento. Muito naturalmente, o leitor perguntará porque se publicam esta parte B e a parte subsequente C do tratado antes de se ter completado a parte A, de que se saltaram os fascículos finais. Ora, por um lado, não nos pareceu prudente reter um trabalho já impresso e não meramente rotineiro para além dum mínimo de tempo condicionado pelas circunstâncias e, por outro lado, as referências necessárias para a leitura consciente das partes B e C também figuram, correcta e equivalentemente, numa versão encurtada da parte A que se publicou, por volta de 1958, sob a designação de «Introdução ao estudo dos limites de somas de variáveis casuais independentes», páginas 165 a 244 do volume I do Curso de Matemáticas Superiores Professor Mira Fernandes, Editorial Império Limitada, Lisboa, existindo uma separata paginada de 1 a 84.

Antes de prosseguir, cumpre-nos avisar o leitor de que na linha 5 da página 3 deste volume a passagem «do mesmo tipo» deve ser corrigida para «que resultam dela por translação».

Posto isso, faltaríamos à nossa responsabilidade de autor dum trabalho científico se olvidássemos a situação daqueles leitores que necessitam apoiar-se nas referências aos fascículos da parte A ainda não publicados e que não dispõem das referências equivalentes da «Introdução ao estudo dos limites de somas de variáveis casuais independentes», um tanto difícil de obter. Para benefício desses leitores, estabelece-se a seguir uma tabela de correspondências, em matéria de referências, pràticamente completa, na qual i.d., v.c., f.m., f.d. e f.c. é abreviatura respectivamente de infinitamente divisível, variável casual, função mensurável (*), função de distribuição e função característica e onde γ e λ representam livros muito divulgados, respectivamente «Limit distributions for sums of independent random variables » de B. V. Gnedenko e A. N. Kolmogorov e «Probability theory» de M. Loève, o primeiro publicado por Addison Wesley Publishing Company, Inc., Cambridge 42, Mass., 1954, e o outro publicado por D. Van Nostrand Company, Inc., New York, 1955. Eventualmente, os leitores que se encontram nas condições aludidas terão vantagem em fazer preceder a utilização da dita tabela dum estudo de partes de **11.2**, de **11.3** e de **12.2** do livro λ, a fim de ficarem devidamente assimilados os conceitos, muito invocados, de convergência fraca (também chamada essencial) e de convergência completa e a fim de evitar dificuldades no recurso aos tão necessários teoremas denominados de Helly-Bray. A propósito das convergências fraca e completa, pode consultar-se também, até certo ponto, o número

(*) Talvez convenha recordar que uma v.c. é uma f.m. definida num espaço de probabilidade.

40, páginas 231-251, dos fascículos da parte A deste trabalho que já se encontram publicados.

A, §3 (sem mais indicações), alude à truncada [ou restrição] duma f.m. (que pode ser v.c.) por [ou a] um conjunto mensurável do espaço respectivo, quer dizer alude ao produto da f.m. considerada pela indicatriz do conjunto referido, conjunto este que pode ser, por exemplo, o transformado inverso (isto é, pela função inversa) do intervalo fechado formado pelos valores da função compreendidos entre dois números reais simétricos.

A, entre I e II de §3, corresponde ao princípio de **5.2** de λ, onde se definem as partes positiva e negativa duma função numérica (que pode ser f.m.), e ao teorema **A** ou da mensurabilidade de **5.3** de λ, onde se prova a mensurabilidade de cada uma dessas partes na hipótese de se tratar duma f.m..

A, III de §3, corresponde à primeira igualdade da terceira página do texto de **5.3** de λ, quer dizer corresponde ao facto de toda a f.m. ou v.c. não-negativa poder igualar-se ao limite duma sucessão não decrescente formada por f.m. ou v.c. simples e não-negativas.

A, VI' e VII e IX de §3, corresponde ao teorema **A** ou da mensurabilidade de **5.3** de λ, quer dizer corresponde ao facto de a classe das f.m. ou v.c. (finitas) ser fechada com respeito às operações usuais da Análise.

A, 9) de §4, corresponde à terceira igualdade no princípio de §11 de γ ou ao grupo I das propriedades **A** ou elementares de **7.1** de λ, como quem diz corresponde à propriedade linear ou aditiva das esperanças matemáticas.

A, 12') de §4, corresponde à parte final de 1.º de IV de **9.1** de λ, como quem diz refere o facto de a esperança matemática duma v.c. reduzida a uma constante ter o valor dessa constante.

A, 13) de §4, corresponde à segunda relação do grupo II das propriedades **A** ou elementares de **7.1** de λ, quer dizer corresponde à propagação duma desigualdade entre f.m. ou v.c. aos integrais respectivos, supostos existentes.

A, I de §4, corresponde à segunda relação do grupo III das propriedades **A** ou elementares de **7.1** de λ, quer dizer corresponde ao facto de ser integrável toda a f.m. cujo módulo não possa exceder uma função integrável fixa.

A, II de §4, corresponde ao teorema **A** ou da convergência monótona de **7.2** de λ, quer dizer corresponde ao facto de a convergência duma sucessão não-decrescente formada por f.m. ou v.c. não-negativas implicar a tendência dos integrais dessas f.m. ou v.c. para o integral da função-limite.

A, nota à demonstração de III de §4, recorda, muito simplesmente, os significados dos símbolos *lim min* e *lim max*, quer dizer limite mínimo e limite máximo.

A, III de §4, corresponde ao teorema **C** ou da convergência majorada (ou de Fatou e Lebesgue) de **7.2** de λ, quer dizer corresponde ao facto de a convergência duma sucessão de f.m. ou v.c. dotadas de módulos majorados por uma função integrável fixa implicar a convergência dos integrais dessas f.m. ou v.c. para o integral da função-limite.

A, III_1 de §4, corresponde a 1.° a seguir ao teorema **C** ou da convergência majorada de **7.2** de λ, quer dizer corresponde ao facto de a continuidade duma f.m. ou v.c. em relação a um parâmetro real implicar a continuidade homóloga do integral dessa f.m. ou v.c., isto na hipótese de ela ser majorada por uma função integrável fixa.

A, III_3 de §4, corresponde a 3.° a seguir ao teorema **C** ou da convergência majorada de **7.2** de λ, isto é, se uma f.m. ou v.c. admitir derivada em ordem a um parâmetro real que percorra um intervalo fechado fixo onde a mesma derivada tenha um módulo majorado por uma função integrável fixa, então haverá igualdade, no intervalo considerado, entre o integral da derivada e a derivada do integral da f.m. ou v.c..

A, III_4 de §4, corresponde à primeira parte de 4.° a seguir ao teorema **C** ou da convergência majorada de **7.2** de λ, quer dizer, se uma f.m. ou v.c. for contínua em relação a um parâmetro real que percorra um intervalo fechado fixo onde a mesma f.m. ou v.c. tenha um módulo majorado por uma função integrável fixa, então haverá permutabilidade entre as integrações no sentido de Riemann e no sentido da teoria das f.m. em qualquer intervalo fechado contido no intervalo fixo considerado.

A, III_5 de §4, corresponde à segunda parte de 4.° a seguir ao teorema **C** ou da convergência majorada de **7.2** de λ, quer dizer, caso as condições do trecho precedente se encontrem satisfeitas para *qualquer* intervalo fechado percorrido pelo parâmetro, então a hipótese de ser majorado por uma função integrável o integral de Riemann (impróprio ou generalizado) que se estende ao intervalo do parâmetro compreendido entre $-\infty$ e $+\infty$ e que tem por função integranda o módulo da f.m. ou v.c. considerada é uma hipótese que implica a permutabilidade entre as integrações no sentido das f.m. e no sentido de Riemann, a última com limites de integração $-\infty$ e $+\infty$.

A, IV-VI de §4, corresponde ao texto intercalado entre as fórmulas 1) e 2) de §11 de γ ou ao último trecho de **9.1** e ao teorema **a** de **9.3** de λ, donde se tira, directamente ou por considerações fáceis, que uma f.m. ou v.c. complexa é integrável se e só se o seu módulo for integrável, que o módulo do integral duma f.m. ou v.c. complexa nunca excede o correspondente integral do módulo e que a existência do momento da ordem $r>0$ duma v.c. complexa implica a existência dos momentos de qualquer ordem positiva e menor.

A, fim de §4, corresponde à primeira igualdade de §11 de γ ou de **16.1** de λ, quer dizer corresponde à definição de variância (ou dispersão) duma v.c., subentende-se real, de acordo com a qual o quadrado do primeiro momento nunca pode exceder o segundo momento.

A, 5) de §5, coresponde à segunda igualdade do texto de §10 de γ ou seja à relação entre as f.d. duma v.c. e duma transformada linear dela.

A, IV de §5, corresponde ao lema **a** ou de Helly-Bray de **11.3** de λ, cujo estudo já foi recomendado nesta nota explicativa. A saber, dada uma função contínua num intervalo fechado e dada uma sucessão fracamente convergente formada por funções de distribuição que tendem para o valor da função-limite em cada um dos pontos extremos do intervalo, então os integrais da função contínua, tomados no intervalo dado e com respeito às funções de distribuição da sucessão dada, têm por limite o integral da função contínua, tomado no intervalo dado e com respeito à função-limite.

A, 1) de §6, corresponde à fórmula 1) de §11 de γ ou seja à definição de f.c..

A, III de §6, corresponde ao teorema 1 de §11 de γ ou seja ao facto de o módulo duma f.c. não poder exceder a unidade.

A, IV de §6, corresponde à primeira igualdade da demonstração do corolário 2 do teorema 3 de §11 de γ, quer dizer corresponde ao facto de o conjugado duma f.c. se confundir com a f.c. de argumento simétrico.

A, demonstração de V de §6, refere-se à desigualdade $2|tx| \geqslant |e^{itx} - 1| \leqslant 2$, dedutível por processos elementares.

A, 2) ou 3) de §7, corresponde à fórmula 1) de §7 de γ ou à definição dada a seguir a **A** de **15.1** de λ, quer dizer corresponde à definição de v.c. independentes.

A, II de §7, corresponde ao teorema **A'** ou das funções de Borel de **15.1** de λ, que assegura a independência de f.m. de v.c. independentes.

A, III' de §7, corresponde à segunda igualdade do texto de §11 de γ ou ao princípio de **16.2** de λ, quer dizer corresponde ao facto de a independência dum número finito de v.c. implicar a igualdade entre a variância da soma e a soma das variâncias das v.c. consideradas.

A, IV de §7, corresponde ao colorário 1 do teorema 3 de §11 de γ, quer dizer corresponde ao facto de a independência dum número finito de v.c. implicar a igualdade entre o produto das suas f.c. e a f.c. da sua soma.

A, nota final de §7, indica que por logaritmo duma f.c. se deve entender o ramo principal do seu logaritmo tomado no campo complexo ou seja aquele ramo que se anula na origem e que é contínuo num intervalo real suficientemente pequeno e construído à volta da origem.

A, 1) de §8, corresponde ao teorema 2 de §11 de γ ou seja à relação entre as f.c. duma v.c. e duma transformada linear dela.

A, III de §8, corresponde ao teorema **A** de **12.4** de λ ou ao exemplo 3 de §12 de γ, quer dizer corresponde ao facto de uma lei de probabilidade resultar simétrica se e só se a correspondente v.c. tiver uma f.c. real.

A, IV de §8, pretende apenas chamar a atenção para o símbolo **Re**, que significa parte real de.

A, VI e VII de §8, corresponde aos teoremas 1 e 2 de §13 de γ ou seja à equivalência entre a convergência fraca duma sucessão de f.c. para uma f.c. e a convergência uniforme da mesma sucessão em qualquer intervalo real fechado.

A, VII' de §8, corresponde ao critério **B** ou da convergência completa, sob a forma do teorema da continuidade de *Lévy*, de **12.2** de λ, quer dizer corresponde ao facto de a convergência duma sucessão de f.c. para uma função que é contínua na origem obrigar esta última a ser um limite fraco e a ser uma f.c..

A, X de §8, corresponde às propriedades **C** ou de diferenciabilidade de **12.4** de λ, quer dizer, se a f.c. duma v.c. admitir uma derivada finita de ordem *par* para o valor 0 do seu argumento, então o v.c. admite um momento finito de ordem igual à da derivada.

A, 3) e 3') de §8, corresponde à igualdade imediatamente anterior a 17) e às igualdades da fórmula 21) de §15 de γ, quer dizer corresponde à definição dos cumulantes ou semiinvariantes e às suas relações com os momentos correntes.

A, exemplo 2 de §8 e texto subsequente, dá as informações mais importantes relativas à lei ou distribuição de *Bernoulli* (eventualmente *generalizada*), bem conhecida dos cursos elementares, e refere o facto de uma v.c. se denominar normada se e só se ela tiver esperança matemática nula e, simultâneamente, variância igual a 1.

A, exemplo 4 de §8, corresponde ao exemplo 1 de §11 de γ e dá as informações mais importantes relativas à lei ou distribuição *normal*, também denominada de *Gauss*.

A, exemplo 6 de §8, corresponde ao exemplo 3 de §17 de γ e dá as informações mais importantes relativas à lei ou distribuição de *Cauchy* permitindo concluir, sem dificuldade, que aí não há esperança matemática (finita) nem variância (finita).

A, princípio de §9, refere que, dada uma v.c. ou lei i.d. e escolhido arbitràriamente um número natural n, se chama v.c. ou lei componente a qualquer uma das n v.c. ou leis independentes e idênticamente distribuidas cuja soma reproduz a v.c. ou lei dada.

A, 2) de §9, corresponde à definição dada no princípio de §17 de γ, quer dizer corresponde ao facto de, escolhido arbitràriamente um número natural n, uma v.c. i.d. resultar igual à soma de n v.c. independentes e idênticamente distribuidas.

A, I de §9, corresponde ao teorema 1 de §17 de γ ou seja ao facto de a f.c. duma lei ou distribuição i.d. não poder assumir o valor 0.

A, V de §9, corresponde ao teorema 3 de §17 de γ ou seja ao facto de resultar i.d. todo o limite fraco duma sucessão de leis ou f.d. ou f.c. i.d..

A, texto a seguir a 9) de §10, refere que se assegura a continuidade do integral, isto em virtude de A, III_1 de §4.

A, fim de §10, corresponde à fórmula 6) de §18 de γ, da qual se depreende que as funções M,N e G das representações de Lévy e de Lévy e Khintchine para o logaritmo da f.c. duma lei i.d. têm os mesmos pontos de continuidade (diferentes da origem).

A, 1) de §11, corresponde à fórmula 1) de §18 de γ ou seja à representação de Lévy e Khintchine para o logaritmo da f.c. duma lei ou distribuição i.d..

A, 3) de §11, corresponde à igualdade que precede a fórmula 2) de §18 de γ e que representa um passo importante na dedução da representação de Lévy e Khintchine para uma lei i.d..

A, 11) de §11, corresponde à fórmula 7) de §18 de γ ou seja à representação de Lévy para o logaritmo da f.c. duma lei ou distribuição i.d..

A, 12) de §11, corresponde à fórmula 6) de §18 de γ, fórmula esta que relaciona as grandezas típicas da representação de Lévy para uma lei i.d. e da representação de Lévy e Khintchine para a mesma lei.

A, 13) de §11, corresponde à fórmula 9) de §18 de γ ou seja à fórmula que permite passar da representação de Lévy para uma lei i.d. à sua representação de Lévy modificada.

A, 14) de §11, corresponde à fórmula 8) de §18 de γ ou seja à representação de Lévy modificada para o logaritmo da f.c. duma lei ou distribuição i.d..

A, 15) a 19) de §11, corresponde às fórmulas 10), 11) e anexas de §18 de γ, quer dizer corresponde aos dados essenciais relativos à representação de Kolmogorov para o logaritmo da f.c. duma lei ou distribuição i.d. com variância.

A, I de §11, corresponde ao teorema 1 de §18 de γ ou seja ao teorema relativo à representação de Lévy e Khintchine para uma lei i.d..

A, II de §11, tem a mesma correspondência que A, 11) de §11, acrescendo que se afirma a unicidade das grandezas típicas da representação de Lévy para uma lei i.d..

A, III e IV de §11, refere o facto, fácil de provar, de uma lei i.d. admitir representação de Kolmogorov se e só se ela tiver variância ou, equivalentemente, se e só se u^2 for integrável com respeito à função G(u) da respectiva representação de Lévy e Khintchine.

A, exemplo 2.º de §11, corresponde ao exemplo 1 de §17 de γ e estabelece a relação entre as contantes definidoras duma v.c.i.d. normal ou de Gauss e as das suas componentes, isto para qualquer escolha do número natural n.

INDICE GERAL

LIMITES DE SOMAS
DE
VARIÁVEIS CASUAIS INDEPENDENTES

PARTE B

§ 1) Introdução

Esta parte B do estudo dos limites de somas de variáveis casuais independentes pressupõe o conhecimento da parte A, designada abreviadamente por A nas referências e reproduzida, salvo em questões secundárias sem efeito sobre as referências, num trabalho ligeiramente resumido intitulado «*Introdução ao estudo dos limites de somas de variáveis casuais independentes*».

Depois de fazermos algumas considerações suplementares à teoria das leis i. d. (isto é, infinitamente divisíveis) e de introduzirmos os conceitos de infinitesimalidade e de constância assintótica de sucessões (de variáveis) casuais independentes, terminamos pelo estudo da lei dos grandes números.

No primeiro parágrafo do capítulo I tratamos da representação das leis infinitamente divisíveis simétricas com respeito a alguma constante real e procuramos abordar a representação de leis infinitamente divisíveis num caso a que podemos chamar intermédio entre o caso geral e o caso sujeito à fórmula de Kolmogorov.

No parágrafo seguinte damos os teoremas usuais relativos à convergência de sucessões de leis infinitamente divisíveis.

No primeiro parágrafo do capítulo II caracterizamos o conjunto das constantes assintóticas e estabelecemos propriedades úteis ao estudo da lei dos grandes números. Imitamos o processo nos dois parágrafos seguintes dedicados ao estudo da constância assintótica forte e das sucessões estáveis. A noção de quantil revela-se muito fecunda em todas estas questões.

O último capítulo desta parte B constitui uma pequena monografia relativa à lei dos grandes números. No trato desta lei recorremos a um método que principia por servir-se de construções elaboradas por outros autores para depois aproveitá-las por um caminho que oferece a vantagem não só de alcançar todos os resultados conhecidos e até de ir um pouco mais longe, mas também de ser completamente independente da noção de lei infinitamente divisível e da teoria geral dos limites de somas de variáveis casuais independentes.

A doutrina moderna que vamos apresentar aqui e também na parte seguinte teve muitos obreiros, mas merecem destacar-se quatro grandes nomes, os de GNEDENKO, KHINTCHINE, KOLMOGOROV e LÉVY. Se a beleza e o alcance das suas conclusões nos enchem de admiração profunda, não devemos olvidar que o seu esforço teria sido impossível se os probabilistas clássicos não tivessem desbravado o caminho em terreno ignoto.

CAPÍTULO I

ADITAMENTO AO ESTUDO DAS LEIS INFINITAMENTE DIVISÍVEIS

§ 2) Complementos à representação canónica duma lei infinitamente divisível

Sejam α e β duas constantes reais e X uma variável casual i. d.. Logo se vê [A, 1) de § 8 e 1) de § 11] que $\alpha X + \beta$ é também uma variável casual i. d. cuja função característica (abreviadamente f. c.), escrita sob a forma de LÉVY e KHINTCHINE, se obtém a partir da f. c. de X substituindo t por αt e depois $a\alpha$ por $a\alpha + \beta$, se $\alpha \neq 0$; se $\alpha = 0$, degenera em imprópria.

Podemos enunciar a parte mais importante das nossas conclusões através da proposição:

I) «Toda a transformada linear duma lei i.d. é por sua vez uma lei i. d.. Em particular, dada uma lei i. d., todas as leis do mesmo tipo são i. d. e são representadas pela mesma função $G(u)$ na forma de Lévy e Khintchine.»

Suponhamos que a função $G(u)$ de A, 1) de § 11, goza da propriedade seguinte: Para todo o $u>0$ e tal que $\pm u$ são pontos de continuidade da função, tem-se

$$G(u)-G(+0)=G(-0)-G(-u).$$

Então podemos dizer abreviadamente que a função $G(u)$ *tem igual crescimento sobre os semieixos reais negativo e positivo.*

Na hipótese apresentada sai

$$\log f(t)=i\,a\,t+\int_R [\cos(tu)-1]\,\frac{1+u^2}{u^2}\,dG(u)$$

e portanto $e^{-iat}f(t)$ uma função real. Logo, sendo X a variável casual correspondente a $f(t)$, $X-a$ é simétrica [A, 1) e III de § 8] e portanto X é simétrica com respeito à constante real a.

Suponha-se agora inversamente que a variável casual i. d. X (ou a sua lei) é simétrica com respeito a alguma constante real a^*. Então $X^*=X-a^*$ é i. d. (I) e é simétrica (com respeito à origem); se representarmos por $f^*(t)$ a f.c. de X^* sai $\log f^*(t)$ real [A, última nota de § 7 e III de § 8] e pode escrever-se [A, 1) de § 8 e 1) de § 11]

$$1)\quad \log f^*(t)=i(a-a^*)\,t+\int_R\left(e^{itu}-1-\frac{i\,t\,u}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG(u).$$

Então sai real $(1/n)\cdot\log f^*(t)$ e portanto, para todo o n natural, X^* é a soma de n variáveis casuais i. d., identicamente distribuidas e simétricas cuja função de distribuição comum vamos designar por $F_n^*(x)$ [ver A, 2) de § 9), com um espaço subjacente adequado]. Escrevendo agora G_n^* no lugar de G_n em A, 3) de § 11, e supondo que $\pm u$ e $\pm \varepsilon$ são pontos de continuidade de todas as funções envolvidas, com $0<\varepsilon<u$, sai

$$G_n^*(u)-G_n^*(\varepsilon)=n\cdot\int_\varepsilon^u \frac{x^2}{1+x^2}\,dF_n^*(x)=$$
$$=n\cdot\int_{-u}^{-\varepsilon}\frac{x^2}{1+x^2}\,dF_n^*(x)=G_n^*(-\varepsilon)-G_n^*(-u).$$

Viu-se em A, a propósito da demonstração de I de § 11, que existe uma subsucessão m da sucessão natural ao longo da qual $G_m^*(u)\xrightarrow{c}G^*(u)$, onde $G^*(u)$ é a função que corresponde a X^* na representação de Lévy e Khintchine; doutro lado $G^*(u)\equiv G(u)$ (I). Então, com $m\uparrow\infty$,

$$G(u)-G(\varepsilon)=G(-\varepsilon)-G(-u)$$

e, com $\varepsilon\downarrow 0$,

$$G(u)-G(+0)=G(-0)-G(-u).$$

A última igualdade estende-se, por passagem ao limite, também aos pontos que são de continuidade de G sem o serem de todas as funções anteriores de modo que $G(u)$ tem igual crescimento sobre os semieixos reais negativo e positivo. Logo o integral de 1) tem a parte imaginária nula, o que obriga a $a=a^*$.

As considerações precedentes demonstram a proposição seguinte:

II) «A condição necessária e suficiente para que uma lei infinitamente divisível seja simétrica com respeito a alguma constante real é que a função $G(u)$ da sua representação de Lévy e Khintchine tenha igual crescimento sobre os semieixos reais negativo e positivo. A constante de simetria coincide com a constante a da representação.»

Se as funções $M(u)$ e $N(u)$ da representação de Lévy duma lei i.d. satisfizerem à igualdade $M(-u)=N(u)$, para todo o $u>0$ tal que $\pm u$ pontos de continuidade respectivamente de N e de M, diremos abreviadamente que M e N *são imagens uma da outra.*

As relações A, 11) e 12) de § 11, provam a proposição seguinte:

II') «A condição necessária e suficiente para que uma lei infinitamente divisível seja simétrica com respeito a alguma constante real é que as funções $M(u)$ e $N(u)$ da sua representação de Lévy sejam imagens uma da outra. A constante de simetria coincide com a constante a da representação.»

Observemos de passagem que tanto II como II' mostram que $a(U) \equiv a$ na representação de Lévy modificada duma lei i. d. e simétrica com respeito a alguma constante real [A, 13) de § 11].

As relações A, 15) a 18) de § 11, mostram o seguinte:

II'') «A condição necessária e suficiente para que uma lei infinitamente divisível com variância seja simétrica com respeito a alguma constante real é que a função $C(u)$ da sua representação de Kolmogorov tenha igual crescimento sobre os semieixos reais negativo e positivo. A constante de simetria coincide com a constante α da representação.»

Tendo em vista os teoremas II a II'', a representação canónica duma lei i.d. e a definição de lei componente [A, principio de § 9] podemos enunciar:

III) «Se uma lei infinitamente divisível é simétrica com respeito a alguma constante real a sua componente (i. d.) de índice n é simétrica com respeito à parte $1/n$ da constante.»

As leis de Gauss e de Cauchy servem para ilustrar a doutrina precedente.

* * *

Se u é integrável com respeito à função $G(u)$ da representação de Lévy e Khintchine de modo algum pode concluir-se que u é também integrável simultâneamente com respeito às funções $M(u)$ e $N(u)$ da representação de Lévy. Por exemplo,

$$dG(u) = du/(1+|u|^3), \text{ com } G(+\infty) = 2\cdot\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^3} < +\infty,$$

como deve ser; correspondem leis i.d. simétricas com respeito a alguma constante real (II) tais que u é integrável com respeito a G, pois

$$\int_{0+}^{+\infty} \frac{u\,du}{1+u^3} = \left[\frac{1}{6}\cdot\log\frac{u^2-u+1}{u^2+2u+1} + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{u-1/2}{\sqrt{3}/2}\right]_{0+}^{+\infty} = \frac{2\sqrt{3}\,\pi}{9},$$

e u não é integrável com respeito a N, pois

$$\int_{0+}^{+\infty} \frac{(1+u^2)\,du}{u(1+u^3)} =$$

$$= \left[\frac{1}{6}\cdot\log\frac{u^6}{(u+1)^4(u^2-u+1)} + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{u-1/2}{\sqrt{3}/2}\right]_{0+}^{+\infty} = +\infty.$$

Note-se caso u^2 seja integrável com respeito a G tal implica que também u é integrável.

Inversamente, se u é integrável simultâneamente com respeito a M e a N, a relação

$$\int_{u<-1} u\,dM(u) + \int_{u>1} u\,dN(u) = \int_{|u|>1} (u+1/u)\,dG(u)$$

mostra que u é integrável com respeito a G. Mas agora o facto de u^2 ser integrável simultâneamente com respeito a M e a N não implica que u é integrável com respeito a essas funções. Por exemplo,

$$dN(u) = du/[u^2(u^2+1)];$$

sai

$$\int_{0+}^{+\infty} \frac{du}{u^2+1} = \Big[\operatorname{arc\,tg} u\Big]_{0+}^{+\infty} = \pi/2$$

e

$$\int_{0+}^{+\infty} \frac{du}{u(u^2+1)} = \left[\frac{1}{2}\cdot\log\frac{u^2}{u^2+1}\right]_{0+}^{+\infty} = +\infty.$$

Vimos que uma lei i.d. tem representação de KOLMOGOROV quando e só quando tem variância ou, equivalentemente, quando e só quando u^2 é integrável com respeito a G[A, III e IV de § 11].

Suponhamos agora que u é integrável com respeito a G sem fazermos qualquer hipótese sobre a integrabilidade de u^2. Então e só então, posto

$$2)\qquad \alpha = a + \int_R u\, dG(u) \quad [\text{ver A, I de } \S\, 11]$$

sai

$$3)\qquad \log f(t) = i\alpha t + \int_R (e^{itu} - 1 - itu)\, \frac{1+u^2}{u^2}\, dG(u).$$

Tendo em conta A, 12) de § 11, pode transformar-se 3) em

$$4)\qquad \log f(t) = i\alpha t - b^2 t^2 / 2 + \int_{-\infty}^{0-} (e^{itu} - 1 - itu)\, dM(u) +$$

$$+ \int_{0+}^{+\infty} (e^{itu} - 1 - itu)\, dN(u).$$

Se a lei de 3) ou 4) tem esperança matemática sabemos que esta é dada pela fórmula $E(L) = (1/i) \cdot d(\log f(0))/(dt)$ [A, 3) e 3') de § 8]. Se for possível permutar as operações de integração e derivação sai $E(L) = \alpha$, como na representação de KOLMOGOROV; tal sucede todas as vezes que u for integrável simultâneamente com respeito a M e a N [A, III_3 de § 4]. Note-se que a derivabilidade do segundo membro de 3) ou 4) não assegura que exista esperança matemática [compare-se com A, X de § 8].

As considerações precedentes provam a proposição seguinte:

IV) «Se u é integrável simultâneamente com respeito às funções $M(u)$ e $N(u)$ da representação de LÉVY duma lei infinitamente divisível com esperança matemática esta é igual à constante α da representação 3) ou 4).»

* * *

Consideremos uma lei i.d. de f.c. $f(t)$ e seja X_n a variável casual de f.c. $[f(t)]^{1/n}$. Vamos usar os seguintes símbolos abreviados:

$$E_n = E(X_n),\ E_n^+ = E(X_n^+) \quad \text{e} \quad E_n^- = E(X_n^-).$$

Representamos por $X_{n,\varepsilon}$ a restrição de X_n à região das abcissas de módulo não inferior a ε e fazemos

$$E_{n,\varepsilon} = E(X_{n,\varepsilon}),\ E_{n,\varepsilon}^+ = E(X_{n,\varepsilon}^+) \quad \text{e} \quad E_{n,\varepsilon}^- = E(X_{n,\varepsilon}^-);$$

logo se vê que $E_{n,0} = E_n$ e anàlogamente para as partes positiva e negativa. O índice n pode suprimir-se quando igual a 1.

Posto isso retomemos a fórmula A, 3) de § 11, e suponhamos que $G(u)$ é contínua nos pontos ε e U, com $0 \leqq \varepsilon < U$. Então

$$\int_\varepsilon^U u dG_n(u) \leqq n \cdot \int_\varepsilon^{+\infty} u dF_n(u) = n \cdot E_{n,\varepsilon}^+,$$

desde que exista o último factor do último membro.

Suponhamos agora que existe uma subsucessão n' da sucessão n tal que

$$\sup_{n'} (n' \cdot E_{n',\varepsilon}^+) = S_\varepsilon^+ < +\infty.$$

Repetindo o raciocínio feito na demonstração de A, I de § 11, concluimos que existe uma subsucessão m da subsucessão n' tal que $G_m(u) \xrightarrow{c} G(u)$ (recorde-se a unicidade da representação de Lévy e Khintchine).

Então, por A, IV de § 5,

$$\int_\varepsilon^U u dG_m(u) \to \int_\varepsilon^U u dG(u) \leqq S_\varepsilon^+$$

e, fazendo $U \uparrow +\infty$,

$$\int_\varepsilon^{+\infty} u dG(u) \leqq S_\varepsilon^+.$$

Concluimos que a parte positiva de u é integrável com respeito a G.

Seja agora $G(u)$ contínua no ponto $-\zeta \leq 0$; na hipótese de existir uma subsucessão n'' da sucessão n tal que $\sup_{n''} (n'' \cdot E^-_{n'',\zeta}) = S^-_\zeta < +\infty$ concluimos do mesmo modo que a parte negativa de u é integrável com respeito a G.

Quando ε (ou ζ) cresce a grandeza $E^+_{n',\varepsilon}$ (ou $E^-_{n'',\zeta}$) decresce e o mesmo se diz do supremo S^+_ε (ou S^-_ζ). Quer dizer, se a hipótese relativa a esse supremo se verifica para um certo ε (ou ζ) ela é satisfeita também para todo o ε (ou ζ) maior. Pode então admitir-se que ε (ou $-\zeta$) seja ponto de descontinuidade de G sem alterar a conclusão que a parte positiva (negativa) de u é integrável.

As considerações precedentes permitem enunciar a proposição:

V) «Para que u seja integrável com respeito à função $G(u)$ da representação de Lévy e Khintchine duma lei infinitamente divisível é condição suficiente que existam números não-negativos ε e ζ tais que cada um dos produtos $n \cdot E^+_{n,\varepsilon}$ e $n \cdot E^-_{n,\zeta}$ tenha sentido e seja limitado ao longo duma subsucessão (infinita) da sucessão n. Em particular é condição suficiente que cada um dos produtos $n \, . \, E^+_n$ e $n \cdot E^-_n$ tenha sentido e seja limitado ao longo duma subsucessão (infinita) da sucessão natural n.»

Se a lei é simétrica com respeito à constante real a tome-se $\delta \geq |a|$; sai $E^+_{n,(a+\delta)/n} = E^-_{n,(\delta-a)/n}$ (III) e V simplifica-se.

Dado n, a existência simultânea dalgum $E^+_{n,\varepsilon}$ e dalgum $E^-_{n,\zeta}$ é equivalente à existência simultânea de E^+_n e de E^-_n, por sua vez equivalente à existência de E_n; a última implica a de $E = nE_n$. Se existe E_n, para todo o n, é $E = n(E^+_n - E^-_n)$ de modo que nE^+_n e nE^-_n saem conjuntamente limitados ou ilimitados ao longo de qualquer subsucessão da sucessão natural n. Daí a proposição:

V') «Para que u seja integrável com respeito à função $G(u)$ da representação de Lévy e Khintchine duma lei infinitamente divisível tal que todas as suas componentes tenham esperança matemática é condição suficiente que um dos produtos nE_n^+ e nE_n^- seja limitado ao longo duma subsucessão (infinita) da sucessão natural n.»

A condição de V' encontra-se satisfeita para toda a lei duma variável i. d, sujeita à hipótese do enunciado e tendo sinal fixo, pois aquele dos dois produtos do enunciado que não é constantemente nulo sai idênticamente igual a $\pm E$. A condição também se encontra satisfeita quando, ao longo duma subsucessão (infinita) da sucessão n,

$$E_n^+ / E_n^- \geqq \varphi > 1 \quad \text{ou} \quad E_n^+ / E_n^- \leqq \psi < 1$$

donde, respectivamente, $E>0$ ou $E<0$; ao longo da subsucessão tem-se então

$$n E_n^+ \leqq \varphi E / (\varphi - 1) \quad \text{ou} \quad nE_n^+ \leqq \psi(-E)/(1-\psi).$$

Consideremos, por exemplo, uma lei de Gauss normada [A, exemplos 2.º e 4.º de § 8]; portanto $a=E=0$ e $b=1$. A componente de índice n será uma lei de Gauss, com $a=0$ e $b=(1/n)^{1/2}$ [A, exemplo 2.º de § 11]. Então

$$E_n^+ = \left(\frac{n}{2\pi}\right)^{1/2} \cdot \int_0^{+\infty} x e^{-nx^2/2} \, dx = \left(\frac{1}{2\pi n}\right)^{1/2} \downarrow 0,$$

mas $nE_n^+ \uparrow +\infty$. A condição de V' encontra-se violada e todavia u é integrável com respeito a G.

§ 3) Convergência de leis infinitamente divisíveis

Suponhamos que é dada uma sucessão de leis i. d. L_n às quais correspondem as f. c. $f_n(t)$. Então podemos escrever [A, 1) de § 11]

$$\text{1)} \qquad \log f_n(t) = i\, a_n t + \int_R \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) \frac{1+u^2}{u^2} \, dG_n(u),$$

onde os a_n são constantes reais bem determinadas, os $G_n(u)$ são funções de distribuição, a menos de factores positivos, igualmente bem determinadas e a função integranda comum se considera igual a $-t^2/2$ no ponto $u=0$ de forma que se torna contínua e limitada em todo o campo da variável u.

Consideremos ainda uma lei i.d. L, fixa, de f.c. $f(t)$ e representemo-la sob a forma 1), com a em lugar de a_n e $G(u)$ em lugar de $G_n(u)$.

É muito importante saber em que condições **L** é limite (fraco) de L_n quando $n \uparrow \infty$ ou, equivalentemente, em que condições $f_n(t) \xrightarrow{s} f(t)$. Esclarece-nos a esse propósito o seguinte *teorema de Gnedenko:*

I) «Para que a sucessão de leis infinitamente divisíveis L_n tenha por limite (fraco) a lei (infinitamente divisível) **L** quando $n \uparrow \infty$ é condição necessária e suficiente que $a_n \longrightarrow a$ e simultâneamente $G_n(u) \xrightarrow{c} G(u)$ nas representações de Lévy Khintchine correspondentes.»

A expressão infinitamente divisível do enunciado figura em parêntesis por causa de A, V de § 9.

Comecemos por demonstrar que a condição do teorema é suficiente. Pelo segundo teorema de Helly-Bray tem-se, para todo o t real,

$$i a_n t + \int_R \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) \frac{1+u^2}{u^2} \, dG_n(u) \longrightarrow i a t + \\ + \int_R \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2} \right) \frac{1+u^2}{u^2} \, dG(u),$$

sendo o último integral função contínua de t na origem [A, texto a seguir a 9) de § 10 e III_1 de § 4]. Concluímos que $f_n(t) \xrightarrow{s} f(t)$ [A, VII' de § 8].

Falta demonstrar que a condição do teorema é necessária.

Agora, por hipótese, $f_n(t) \xrightarrow{s} f(t)$ e portanto [A, I de § 9] $\log|f_n(t)| \xrightarrow{s} \log|f(t)|$ ou

$$\int_R [\cos(tu) - 1](1 + u^2)\, dG_n(u)/u^2 \xrightarrow{s}$$

$$\xrightarrow{s} \int_R [\cos(tu) - 1](1 + u^2)\, dG(u)/u^2.$$

Procedendo agora exactamente do mesmo modo que na demonstração de A, I de § 11, inferimos primeiro que a sucessão $G_n(+\infty)$ é limitada, isto é, que $\sup\limits_n G_n(+\infty) = S < +\infty$ e depois, pondo de lado a hipótese $S = 0$ (excluindo um caso trivial), que a sucessão de funções de quase-distribuição $G_n(u)/S$ admite uma subsucessão $G_m(u)/S$ que converge fracamente e até completamente para uma função de quase-distribuição que vamos designar (com mudança ligeira de notação) por $\Gamma(u)/S$. Em resumo, $G_m(u) \xrightarrow{c} \Gamma(u)$, sendo o limite uma função de distribuição, a menos de um factor positivo.

Representemos por $I(t,u)$ a função que se integra em 1). Para todo o t real tem-se então, pelo segundo teorema de Helly-Bray,

$$\int_R I(t,u)\, dG_m(u) \longrightarrow \int_R I(t,u)\, d\Gamma(u);$$

doutro lado, por hipótese,

$$i a_m t + \int_R I(t,u)\, dG_m(u) \longrightarrow i a t + \int_R I(t,u)\, dG(u).$$

As duas convergências fazem com que a sucessão a_m tenha um limite finito α. Então

$$i\alpha t + \int_R I(t,u)\, d\Gamma(u) = i a t + \int_R I(t,u)\, dG(u).$$

Como a representação de $\log f(t)$ pela forma de Lévy e Khintchine é única sai $\alpha = a$ e $\Gamma(u) \equiv G(u)$; portanto

$$a_m \longrightarrow a \quad \text{e} \quad G_m(u) \xrightarrow{c} G(u).$$

Se suprimirmos os termos a_m e $G_m(u)$ das sucessões a_n e $G_n(u)$, respectivamente, aparecem novas sucessões $a_p \longrightarrow a$ e $G_p(u) \xrightarrow{c} G(u)$, etc. Concluimos que

$$a_n \longrightarrow a \quad \text{e} \quad G_n(u) \xrightarrow{c} G(u), \qquad \text{c. q. d.}$$

* * *

Podemos substituir 1) pela fórmula de Lévy modificada [ver A, 14) de §11]. Então

$$2) \qquad \log f_n(t) = i a_n(U) \cdot t - b_n^2 t^2/2 + \\ + \int_{-\infty}^{-U} (e^{itu}-1)\, dM_n(u) + \int_U^{+\infty} (e^{itu}-1)\, dN_n(u) + \\ + \int_{-U}^{0-} (e^{itu}-1-itu)\, dM_n(u) + \int_{0+}^{U} (e^{itu}-1-itu)\, dN_n(u),$$

onde escolhemos $U>0$ por forma que a função G e todas as funções G_n consideradas no início deste parágrafo sejam contínuas nos pontos U e $-U$. Aqui convém recordar que os pontos de descontinuidade de G e de $G_1, G_2, \ldots$ formam um conjunto com potência quando muito igual à do numerável.

Sabemos que [A, 12), II e 13) de §11]

$$3) \qquad b_n^2 = G_n(+0) - G_n(-0);$$

$$M_n(-\infty) = 0 \text{ e, para } u<0,\ dM_n(u) = (1+u^2)\, dG_n(u)/u^2;$$

$$N_n(+\infty) = 0 \text{ e, para } u>0,\ \pm dN_n(u) = (1+u^2)\, dG_n(u)/u^2.$$

$$4) \quad \text{Com } \varepsilon>0, \qquad \int_{-\varepsilon}^{0-} u^2\, dM_n(u) + \int_{0+}^{\varepsilon} u^2\, dN_n(u) < +\infty.$$

$$5) \qquad a_n(U) = a_n + \int_{|u|<U} u\, dG_n(u) - \int_{|u| \geqq U} dG_n(u)/u.$$

Para a lei i. d. L temos fórmulas análogas que se obtêm a partir de 2), 3), 4) e 5) suprimindo o índice n. De qualquer modo as transformações 3) preservam, em ambos os sentidos, os pontos de continuidade distintos da origem [A, fim de §10].

Pergunta-se quais são agora as condições para que $\mathsf{L}_n \xrightarrow{s} \mathsf{L}$ quando $n \uparrow \infty$? Responde-nos *outro teorema de Gnedenko* [para a notação veja-se A, nota à demonstração de III de § 4]:

II) «Para que a sucessão de leis infinitamente divisíveis L_n tenha por limite (fraco) a lei (infinitamente divisível) L quando $n \uparrow \infty$ é condição necessária e suficiente que se verifiquem simultâneamente as relações seguintes, referentes às representações de LÉVY modificadas:

1.ª) $\qquad M_n(u) \to M(u)$ e $N_n(u) \to N(u)$,

respectivamente nos pontos de continuidade de $M(u)$ e $N(u)$.

2.ª) $\qquad a_n(U) \to a(U)$.

3.ª) $$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{n \uparrow \infty} \max \left[\int_{-\varepsilon}^{0-} u^2 \, dM_n(u) + b_n^2 + \int_{0+}^{\varepsilon} u^2 \, dN_n(u)\right] =$$
$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{n \uparrow \infty} \min \left[\int_{-\varepsilon}^{0-} u^2 \, dM_n(u) + b_n^2 + \int_{0+}^{\varepsilon} u^2 \, dN_n(u)\right] = b^2 .»$$

Comecemos por demonstrar que a condição do teorema é necessária.

Agora, por hipótese, $f_n(t) \xrightarrow{s} f(t)$; então (I) $a_n \to a$ e $G_n(u) \xrightarrow{c} G(u)$. Atendendo a 3) e aos teoremas de HELLY-BRAY(*) concluimos que se verifica a relação 1.ª) do enunciado; atendendo a 5) e aos mesmos teoremas(*) concluimos que se verifica a relação 2.ª).

Para mostrar que se verifica a relação 3.ª) vamos supor que $\varepsilon > 0$ e $-\varepsilon$ são pontos de continuidade das funções $N_n(u), N(u), M(u)$ e $M_n(u)$. Então, pelo primeiro teorema de HELLY-BRAY (*),

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dG_n(u) \to \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dG(u)$$

ou, equivalentemente,

(*) É fácil de ver que os teoremas de HELLY-BRAY se adaptam a todos os tipos de intervalos que aqui podem aparecer.

$$\int_{-\varepsilon}^{0-} \frac{1+u^2}{u^2}\, dM_n(u) + b_n^2 + \int_{0^+}^{\varepsilon} \frac{u^2}{1+u^2}\, dN_n(u) \rightarrow$$

$$\rightarrow \int_{-\varepsilon}^{0-} \frac{u^2}{1+u^2}\, dM(u) + b^2 + \int_{0^+}^{\varepsilon} \frac{u^2}{1+u^2}\, dN(u).$$

Como $1/(1+\varepsilon^2) \leq 1/(1+u^2) \leq 1$, tanto entre $-\varepsilon$ e 0^- como também entre 0^+ e ε, sai

$$6)\quad \frac{1}{1+\varepsilon^2}\left[\int_{-\varepsilon}^{0-} u^2\, dM_n(u) + b_n^2 + \int_{0^+}^{\varepsilon} u^2\, dN_n(u)\right] \leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dG_n(u) \leq$$

$$\leq \int_{-\varepsilon}^{0-} u^2\, dM_n(u) + b_n^2 + \int_{0^+}^{\varepsilon} u^2\, dN_n(u).$$

Se passarmos em 6) ao limite máximo quando $n \uparrow \infty$ obtemos a desigualdade

$$\frac{1}{1+\varepsilon^2} \lim_{n\uparrow\infty} \max \left[\int_{-\varepsilon}^{0-} u^2\, dM_n(u) + b_n^2 + \int_{0^+}^{\varepsilon} u^2\, dN_n(u)\right] \leq$$

$$\leq \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} dG(u) \leq \lim_{n\uparrow\infty} \max \left[\int_{-\varepsilon}^{0-} u^2\, dM_n(u) + b_n^2 + \int_{0^+}^{\varepsilon} u^2\, dN_n(u)\right];$$

se passarmos ao limite mínimo obtemos outra desigualdade análoga.

Só falta fazer $\varepsilon \downarrow 0$ e atender à primeira parte de 3) para chegar à relação 3.ª).

Vamos demonstrar agora que a condição do teorema é suficiente.

Sabemos pois que se verificam as três relações do enunciado.

Sendo $u < 0$ um ponto de continuidade de $M(u)$ e portanto de $G(u)$ resulte da primeira parte da relação 1.ª) e dos teoremas de Helly-Bray que

$$\int_{-\infty}^{u} \frac{v^2}{1+v^2}\, dM_n(v) \rightarrow \int_{-\infty}^{u} \frac{v^2}{1+v^2}\, dM(v), \text{ isto é, } G_n(u) \rightarrow G(u).$$

Somando $G_n(-\varepsilon)$ a todos os membros de 6), atendendo a $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\lim_{n\uparrow\infty} G_n(-\varepsilon) = G(-0)$ e usando a relação 3.ª), obtém-se

7) $$G(-0)+b^2=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\ \lim_{n\uparrow\infty}\max\ G_n(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\ \lim_{n\uparrow\infty}\min\ G_n(\varepsilon).$$

Sendo agora $u>0$ um ponto de continuidade de $N(u)$ e portanto de $G(u)$ considere-se a igualdade

$$\lim_{n\uparrow\infty}\max G_n(u) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\ \lim_{n\uparrow\infty}\max\left[G_n(\varepsilon)+\int_\varepsilon^{u-}\frac{v^2}{1+v^2}\,dN_n(v)\right]$$

e a igualdade que resulta desta quando se substitui lim max por lim min. Então resulta de 7), da segunda parte da relação 1.ª) e dos teoremas de Helly-Bray que

$$\lim_{n\uparrow\infty}\max G_n(u) = \lim_{n\uparrow\infty}\min G_n(u) = G(-0)+b^2+G(u)-G(+0).$$

Pela primeira parte de 3) tem-se ainda $G_n(u)\longrightarrow G(u)$.

Como $G_n(-\varepsilon)\longrightarrow G(-\varepsilon)$ e $G_n(\varepsilon)\longrightarrow G(\varepsilon)$, toda a subsucessão convergente extraída da sucessão $G_n(0)$ tem um limite compreendido entre $G(-\varepsilon)$ e $G(+\varepsilon)$. Se $G(u)$ for contínua no ponto $u=0$ basta fazer $\varepsilon\downarrow 0$ para reconhecer que $G_n(0)\longrightarrow G(0)$.

Os resultados que acabamos de alcançar mostram que $G_n(u)\xrightarrow{s} G(u)$.

Considere a igualdade

$$G_n(+\infty) = G_n(\varepsilon)+\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{u^2}{1+u^2}\,dN_n(u).$$

Então, por causa da convergência fraca de G_n para G e pelos teoremas de Helly-Bray,

$$G_n(+\infty)\longrightarrow G(\varepsilon)+\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{1+u^2}{u^2}\,dN(u) = G(+\infty).$$

Estamos pois aptos a afirmar que $G_n(u)\xrightarrow{c} G(u)$ e só falta provar que $a_n\longrightarrow a$ para terminar a demonstração (ver I).

Mas tendo em conta 5), a relação 2.ª), a convergência completa de G_n para G e mais uma vez os teoremas de Helly-Bray infere-se sem dificuldade que $a_n\longrightarrow a$, c. q. d.

Observação: Se demos a representação de LÉVY modificada da f. c. duma lei i. d. no caso de se tratar de funções contínuas em $\pm U$ fizemo-lo por comodidade, afim de evitar a distinção entre intervalos de integração fechados ou abertos nesses pontos; mas a hipótese não é essencial. Podemos preservar 5) com qualquer $U > 0$ introduzindo, para o efeito, na expressão 2) os intervalos de integração

$$-\infty \leqq u \leqq -U, \quad U \leqq u < +\infty, \quad -U < u < 0 \quad \text{e} \quad 0 < u < U.$$

Desde que U e $-U$ sejam pontos de continuidade de $G(u)$ a demonstração de II subsiste, pois os teoremas de HELLY-BRAY continuam a ser aplicáveis em 5).

Enfim, *no enunciado de II serve todo $U > 0$ tal que $\pm U$ sejam pontos de continuidade de N e M* (e portanto de G).

* * *

Suponhamos agora que as leis i. d. L_n e L têm variâncias $V(\mathsf{L}_n)$ e $V(\mathsf{L})$, respectivamente, e portanto esperanças matemáticas $E(\mathsf{L}_n)$ e $E(\mathsf{L})$. Pode então usar-se a representação de KOLMOGOROV [A, 18) de § 11]:

$$\text{8)} \qquad \log f_n(t) = i\,\alpha_n\,t + \int_R (e^{itu} - 1 - i\,t\,u)\,dC_n(u)/u^2,$$

onde [A, 15), 17) e 19) de § 11]

$$\text{9)} \qquad dC_n(u) = (1+u^2)\,dG_n(u) \quad \text{e} \quad C_n(-\infty) = 0;$$

$$E(\mathsf{L}_n) = \alpha_n = a_n + \int_R u\,dG_n(u); \quad V(\mathsf{L}_n) = C_n(+\infty).$$

Para a lei L temos fórmulas análogas que se obtêm a partir de 8) e 9) suprimindo o índice n.

Pregunta-se quais são agora as condições para que $\mathsf{L}_n \xrightarrow{s} \mathsf{L}$ e simultâneamente $V(\mathsf{L}_n) \to V(\mathsf{L})$ quando $n \uparrow \infty$? Responde-nos *um teorema de Gnedenko e Kolmogorov:*

III) «Para que a sucessão de leis infinitamente divisíveis L_n com variâncias tenha por limite (fraco) a lei (infinitamente divisível) L com variância quando $n\uparrow\infty$ e simultâneamente as variâncias das leis da sucessão tendam para a variância da lei limite é condição necessária e suficiente que $\alpha_n \longrightarrow \alpha$ e também $C_n(u) \xrightarrow{c} C(u)$ nas representações de Kolmogorov correspondentes.»

Comecemos por demonstrar que a condição do teorema é suficiente.

Como $C_n(u) \xrightarrow{c} C(u)$, segue-se

$$C_n(+\infty) \longrightarrow C(+\infty) \text{ ou } V(\mathsf{L}_n) \longrightarrow V(\mathsf{L}).$$

Porque $\alpha_n \longrightarrow \alpha$ e pelo segundo teorema de Helly-Bray tem-se, para todo o t real,

$$i\alpha_n t + \int_R (e^{itu} - 1 - itu)\, dC_n(u)/u^2 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow i\alpha t + \int_R (e^{itu} - 1 - itu)\, dC(u)/u^2,$$

sendo o último integral função contínua de t na origem.

Concluímos que $f_n(t) \xrightarrow{s} f(t)$.

Falta demonstrar que a condição do teorema é necessária.

Primeiro $V(\mathsf{L}_n) \longrightarrow V(\mathsf{L})$ ou $C_n(+\infty) \longrightarrow C(+\infty)$ faz com que exista um número não-negativo γ tal que

$$C_n(+\infty) \leqq C(+\infty) + \gamma < +\infty.$$

Como, por hipótese, $f_n(t) \xrightarrow{s} f(t)$, tira-se de 8) que, para todo o $t \neq 0$,

$$i\alpha_n + \int_R (e^{itu} - 1 - itu)\, dC_n(u)/(tu^2) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow i\alpha + \int_R (e^{itu} - 1 - itu)\, dC(u)/(tu^2).$$

Aqui os integrais são limitados em módulos por $|t| \cdot [C(+\infty) + \gamma]$ e portanto convergem para zero, uniformemente em n, quando $t \longrightarrow 0$. Inferimos que $\alpha_n \longrightarrow \alpha$.

Supondo $C(+\infty)+\gamma=\delta>0$ sabemos que a sucessão de funções de quase-distribuição $C_n(u)/\delta$ admite uma subsucessão $C_m(u)/\delta$ que converge fracamente para uma função de quase-distribuição, seja $D(u)/\delta$. Logo $C_m(u)\xrightarrow{s}D(u)$, sendo o limite uma função de distribuição, a menos dum factor positivo.

Respeitando a convenção usual vamos considerar o valor da função integranda de 8) no ponto $u=0$ como sendo igual ao limite respectivo quando $u\longrightarrow 0$, isto é, igual a $-t^2/2$. Assim $(e^{itu}-1-itu)/u^2$ fica uma função de u, contínua e limitada em todo o campo real, que tem limite nulo quando $u\longrightarrow\infty$. Então, pelo segundo teorema de HELLY-BRAY,

$$\int_R (e^{itu}-1-itu)\,dC_m(u)/u^2 \longrightarrow \int_R (e^{itu}-1-itu)\,dD(u)/u^2,$$

isso para todo o t real. Mas $f_m(t)\xrightarrow{s}f(t)$ e $\alpha_m\longrightarrow\alpha$ implicam que

$$\int_R (e^{itu}-1-itu)\,dC_m(u)/u^2 \longrightarrow \int_R (e^{itu}-1-itu)\,dC(u)/u^2,$$

também para todo o t real. Como é única a representação da lei limite pela fórmula de KOLMOGOROV sai $D(u)\equiv C(u)$ e portanto $C_m(u)\xrightarrow{s}C(u)$.

Se suprimirmos os termos $C_m(u)$ da sucessão $C_n(u)$ aparece uma nova subsucessão $C_p(u)\xrightarrow{s}C(u)$ etc.. Concluimos que $C_n(u)\xrightarrow{s}C(u)$ e depois, tendo em vista $C_n(+\infty)\longrightarrow C(+\infty)$, que $C_n(u)\xrightarrow{c}C(u)$, c. q. d.

Os três teoremas que acabámos de demonstrar são muito importantes no estudo da convergência de somas de variáveis casuais independentes.

CAPÍTULO II

CONSTÂNCIA ASSINTÓTICA

§ 4) Variáveis casuais infinitesimais e assintòticamente constantes

Consideremos as variáveis casuais *independentes* X_1, $X_2, \ldots X_n, \ldots$. Quando $n \uparrow \infty$ levanta-se o problema de estabelecer a convergência (fraca) das variáveis casuais $X_1 + \cdots + X_k + \cdots + X_n$ [A, VII de § 3] e de caracterizar a variável limite.

A questão assim posta não tem flexibilidade satisfatória. Com efeito, muitas vezes convém associar a cada soma parcial $\sum_{1 \leq k \leq n} X_k$ uma constante de translação A_n e outra constante de sentido e escala $B_n \neq 0$ e retomar a questão primitiva sobre as variáveis casuais «corrigidas» $\sum_{1 \leq k \leq n} X_k / B_n - A_n$ [A, IX de § 3]. Pondo $X_{nk} = X_k / B_n$ e introduzindo constantes A_{nk} tais que $\sum_{1 \leq k \leq n} A_{nk} = A_n$ constitui-se então uma sucessão dupla de variáveis casuais

$$\begin{array}{l} X_{11} - A_{11} \\ X_{21} - A_{21}, X_{22} - A_{22} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ X_{n1} - A_{n1}, \ldots X_{nk} - A_{nk}, \ldots X_{nn} - A_{nn} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

que são *independentes* para n dado ou seja *por linhas* [A, II de § 7] e que se somam também por linhas para formar a sucessão simples $\sum_{1 \leq k \leq n} (X_{nk} - A_{nk}) = \sum_{1 \leq k \leq n} X_{nk} - A_n$.

Dando um novo passo na senda da generalização podemos considerar variáveis casuais X_{nk}, independentes por linhas, mas de resto quaisquer, isto é, não necessàriamente da forma X_k / B_n. Finalmente não há necessidade de que os números de parcelas das linhas consecutivas formem a sucessão natural n, pois serve qualquer sucessão de inteiros e positivos k_n tais que $k_n \to \infty$ quando $n \uparrow \infty$.

Presentemente consideramos sucessões simples de constantes A_n e sucessões duplas de variáveis casuais X_{nk}, com $1 \leqq k \leqq k_n$ e $k_n \longrightarrow \infty$ quando $n \uparrow \infty$, variáveis essas que se supõem independentes por linhas, e pretendemos fazer o estudo dos limites (fracos) das somas $\sum_{1 \leqq k \leqq k_n} X_{nk} - A_n$ quando $n \uparrow \infty$.

O problema que acabamos de delinear é excessivamente lato para oferecer interesse. Com efeito, seja X uma variável casual qualquer e ponha-se, para todo o n, $X_{n1} = X$ e $X_{nk} \equiv 0$ quando $k > 1$. Sai $\lim_{n \uparrow \infty} \sum_{1 \leqq k \leqq k_n} X_{nk} = X$ o que prova podermos impor um limite arbitrário.

A restrição que naturalmente se impõe aqui é que, quando $n \uparrow \infty$, nenhuma parcela da soma de limite eventual deve exercer influência preponderante sobre as outras, isto é, cada uma das parcelas deve tornar-se de certo modo desprezável. Em seguida vamos procurar uma formulação matemática precisa para tal ideia.

* * *

Considere-se então a sucessão dupla de variáveis casuais X_{nk}, com $1 \leqq k \leqq k_n$ e $k_n \longrightarrow \infty$ quando $n \uparrow \infty$, e recorde-se a convenção de representar por $\mathsf{P}(\ldots)$ a probabilidade do acontecimento contido dentro do parêntesis [A, § 2].

Pois bem, se

$$1) \qquad \lim_{n \uparrow \infty} \sup_{1 \leqq k \leqq k_n} \mathsf{P}(|X_{nk}| \geqq \varepsilon) = 0, \text{ para todo o } \varepsilon > 0,$$

dizemos, com Gnedenko e Kolmogorov, que as variáveis casuais X_{nk} são *infinitesimais*(*). Com tais variáveis, dados dois números positivos arbitrários δ e ε, verifica-se, para todo o n suficientemente grande, que é inferior a δ a probabilidade de cada um dos k_n acontecimentos $|X_{nk}| \geqq \varepsilon$ (de que cada uma das k_n variáveis X_{nk} não seja desprezável dentro da ordem ε).

(*) Loève usa a designação de variáveis (uniformemente) assintòticamente nulas, abreviadamente uan.

Se as variáveis casuais X_{nk} forem infinitesimais cada uma delas tem probabilidade elevada de concentrar os seus valores em torno do zero, isso para todo o n razoàvelmente grande. Mas como essas variáveis costumam ser acompanhadas de constantes subtractivas A_{nk} convém então que as diferenças $X_{nk}-A_{nk}$ sejam infinitesimais, isto é, que cada variável X_{nk} tenha probabilidade elevada de concentrar os seus valores em torno duma constante A_{nk}, isso para todo o n razoàvelmente grande. Eis porque é muito importante a definição seguinte:

Se existirem constantes A_{nk} tais que

2) $\lim\limits_{n\uparrow\infty} \sup\limits_{1\leq k\leq k_n} \mathsf{P}(|X_{nk}-A_{nk}|\geq\varepsilon)=0$, para todo o $\varepsilon>0$,

as variáveis X_{nk}, *centradas* nas constantes A_{nk}, saiem infinitesimais. Diz-se então que as variáveis X_{nk} são *(uniformemente) assintòticamente constantes* ou, mais explìcitamente, que elas *admitem as constantes assintóticas* A_{nk}.

Observação: Pode escrever-se $>\varepsilon$ em lugar de $\geq\varepsilon$, sem prejuízo da definição de variáveis casuais infinitesimais e assintòticamente constantes.

É óbvio que as constantes A_{nk} da fórmula 2) não são unìvocamente determinadas pois faz-se uma passagem ao limite. Assim não deixa de ser interessante a proposição seguinte:

I) «Se as variáveis casuais X_{nk} admitem as constantes assintóticas A_{nk} a condição necessária e suficiente para que as variáveis admitam também as constantes assintóticas A'_{nk} é que se tenha

$$\lim_{n\uparrow\infty} \sup_{1\leq k\leq k_n} |A_{nk}-A'_{nk}|=0.»$$

Suponhamos primeiro que as variáveis X_{nk} admitem tanto as constantes assintóticas A_{nk} como também as constantes assintóticas A'_{nk}. Dado $\varepsilon>0$ tem-se então, para todo o n suficientemente grande,

$$\sup_k \mathsf{P}(|X_{nk}-A_{nk}|\geqq\varepsilon/2)<1/2$$

e simultâneamente

$$\sup_k \mathsf{P}(|X_{nk}-A'_{nk}|\geqq\varepsilon/2)<1/2$$

(subentende-se que o supremo se refere a $1\leqq k\leqq k_n$). Logo

$$\inf_k \mathsf{P}(|X_{nk}-A_{nk}|<\varepsilon/2)>1/2$$

e simultâneamente

$$\inf_k \mathsf{P}(|X_{nk}-A'_{nk}|<\varepsilon/2)>1/2.$$

Então, seja qual for k, é maior que 1/2 cada uma das probabilidades de que X_{nk} esteja no intervalo aberto de $A_{nk}-\varepsilon/2$ a $A_{nk}+\varepsilon/2$ e de que X_{nk} esteja no intervalo aberto de $A'_{nk}-\varepsilon/2$ a $A'_{nk}+\varepsilon/2$; isso obriga a $|A_{nk}-A'_{nk}|<\varepsilon$, para todo o k, e portanto a $\sup_k |A_{nk}-A'_{nk}|\leqq\varepsilon$. Logo $\lim_{n\uparrow\infty} \sup_k |A_{nk}-A'_{nk}|=0$.

Suponhamos agora que $\lim_{n\uparrow\infty} \sup_k |A_{nk}-A'_{nk}|=0$ e que as variáveis casuais X_{nk} admitem as constantes assintóticas A_{nk}. Dados os números positivos ε e $\delta<1$ tem-se então, para n suficientemente grande,

$$\inf_k \mathsf{P}(|X_{nk}-A_{nk}|<\varepsilon/2)>1-\delta$$

e

$$|A_{nk}-A'_{nk}|<\varepsilon/2, \text{ com qualquer } k.$$

Portanto

$$\inf_k \mathsf{P}(|X_{nk}-A'_{nk}|<\varepsilon)>1-\delta \quad\text{ou}\quad \sup_k \mathsf{P}(|X_{nk}-A'_{nk}|\geqq\varepsilon)<\delta.$$

Então

$$\lim_{n\uparrow\infty} \sup_k \mathsf{P}(|X_{nk}-A'_{nk}|\geqq\varepsilon)=0$$

e a demonstração de I fica completada.

Uma consequência imediata de I é o corolário

I′) «Se as variáveis casuais X_{nk} admitem as constantes assintóticas A_{nk} a condição necessária e suficiente para que as variáveis sejam infinitesimais é que se tenha $\lim\limits_{n\uparrow\infty} \sup\limits_{1\leq k\leq k_n} |A_{nk}| = 0$.»

* * *

Antes de prosseguirmos torna-se necessário dar mais uma definição. Chama-se *mediana* ou *valor mediano* duma variável casual X a todo o número χ tal que se tenha simultâneamente

3) $$\mathsf{P}(X \leqq \chi) \geqq 1/2 \quad \text{e} \quad \mathsf{P}(X \geqq \chi) \geqq 1/2.$$

Significando $F(x)$ a função de distribuição correspondente a X a equação $F(x)=1/2$ ou não tem solução ou tem uma só solução ou tem uma infinidade de soluções constituindo um intervalo da forma $\alpha < x \leqq \beta$ ou $\alpha \leqq x \leqq \beta$. No primeiro caso a mediana de X é o valor x que faz com que $F(x)<1/2$ e $F(x+0)>1/2$, no segundo caso a mediana é o único valor de x que resolve a equação e no último caso serve todo o valor x do intervalo $\alpha \leqq x \leqq \beta$.(*)

Deve notar-se que um valor mediano de X existe sempre enquanto o valor médio ou esperança matemática pode deixar de existir [A, exemplo 6.º de § 8].

Dado um número γ tal que $0<\gamma<1$ podemos generalizar o conceito de mediana e chamar *quantil da ordem* γ duma variável casual X a todo o número $\chi^{(\gamma)}$ que satisfaz simultâneamente às desigualdades

3′) $$\mathsf{P}(X \leqq \chi^{(\gamma)}) \geqq \gamma \quad \text{e} \quad \mathsf{P}(X \geqq \chi^{(\gamma)}) \geqq 1-\gamma.$$

Todo o quantil assim definido diz-se um *quantil próprio* e pode obter-se a partir da equação $F(x)=\gamma$ do mesmo

---

(*) No último caso faz-se, por vezes, $\chi=\alpha+(1/2)\ (\beta-\alpha)$ e a mediana passa a ser unìvocamente definida em todos os casos; aqui não nos convém proceder assim.

modo que se obtém toda a mediana a partir da equação $F(x)=1/2$.(*) Note-se que $\chi^{(1/2)}=\chi$ e que $\chi^{(\gamma)}$ cresce com γ.

Completa-se 3') definindo quantis *impróprios* das ordens zero e um do modo seguinte:

3'') $$\chi^{(0)}=\lim_{\gamma\downarrow 0}\chi^{(\gamma)} \quad \text{e} \quad \chi^{(1)}=\lim_{\gamma\uparrow 1}\chi^{(\gamma)}.$$

Observação: 3') e 3'') mostram que só não são quantis duma variável X os números y que fazem com que $F(x)=0$ para algum $x>y$ ou $F(x)=1$ para algum $x<y$.

Dado um número $D>0$ representemos por $h_D(x)$ a função contínua da variável real x definida como segue:

4) $$h_D(x)=x^2 \text{ para } |x|\leqq D \quad \text{e} \quad h_D(x)=D^2 \text{ para } |x|\geqq D.$$

Se x e y forem de sinais contrários tem-se então

$$h_D(x-y)\geqq h_D(x).$$

Vamos agora estabelecer uma proposição útil na continuação deste estudo:

II) «Se X e Y forem duas variáveis casuais independentes e idênticamente distribuidas (isto é, com a mesma lei de probabilidade) e se for $\chi^{(\gamma)}$ um quantil de X (ou de Y) verifica-se a seguinte desigualdade, relativa a esperanças matemáticas,

$$E[h_D(X-Y)]\geqq \inf(\gamma,1-\gamma)\cdot E[h_D(X-\chi^{(\gamma)})].$$

Em particular,

$$E[h_D(X-Y)]\geqq (1/2)\cdot E[h_D(X-\chi)].»$$

A proposição só carece de demonstração quando $0<\gamma<1$.

(*) No terceiro caso faz-se, por vezes, $\chi^{(\gamma)}=\alpha+\gamma(\beta-\alpha)$ a fim de obter um só quantil da ordem γ em todos os três casos; aqui não nos convém proceder desta forma.

Pondo $\tilde{X}=X-\chi^{(\gamma)}$ e $\tilde{Y}=Y-\chi^{(\gamma)}$ a desigualdade do enunciado toma a forma

$$E[h_D(\tilde{X}-\tilde{Y})]\geqq \inf(\gamma\,,1-\gamma)\cdot E[h_D(\tilde{X})]$$

e é sob esta forma que vamos deduzi-la.

Suprimindo no campo de integração do primeiro membro da desigualdade as regiões $\tilde{X}\geqq 0\,,\tilde{Y}>0$ e $\tilde{X}<0\,,\tilde{Y}<0$, recordando a notação introduzida em A, entre I e II de § 3, atendendo às desigualdades

$$h_D(\tilde{X}^+ + (-\tilde{Y})^+)\geqq h_D(\tilde{X}^+) \quad \text{e} \quad h_D(-\tilde{X}^- - \tilde{Y}^+)\geqq h_D(-\tilde{X}^-),$$

tendo em vista A, 2) ou 3) de § 7, e usando finalmente 3') obtém-se

$$E[h_D(\tilde{X}-\tilde{Y})]\geqq E[h_D(\tilde{X}^+ + (-\tilde{Y})^+)]+E[h_D(-\tilde{X}^- - \tilde{Y}^+)]\geqq$$
$$\geqq E[h_D(\tilde{X}^+)]\cdot \mathsf{P}(\tilde{Y}\leqq 0)+E[h_D(-\tilde{X}^-)]\cdot \mathsf{P}(\tilde{Y}\geqq 0)\geqq$$
$$\geqq \inf(\gamma\,,1-\gamma)\cdot \{E[h_D(\tilde{X}^+)]+E[h_D(-\tilde{X}^-)]\}$$

e a tese segue.

* * *

Seguem algumas proposições sobre variáveis casuais infinitesimais ou assintòticamente constantes. Em todas elas, dada uma variável casual X_{nk} representamos por χ_{nk} uma mediana da variável, por $\chi_{nk}^{(\gamma)}$ um seu quantil da ordem γ, por $F_{nk}(x)$ a sua função de distribuição e por $f_{nk}(t)$ a sua f. c.

Suponhamos que as variáves casuais X_{nk} admitem as constantes assintóticas A_{nk}. Para todo o γ positivo e menor que um tem-se então

$$\lim_{n\uparrow\infty}\ \sup_k |A_{nk}-\chi_{nk}^{(\gamma)}| = 0\,.$$

Pois se a relação não fosse verdadeira para algum γ nas condições indicadas teríamos um número $\eta>0$ e uma infinidade de valores de n tais que $\sup\limits_k |A_{nk}-\chi_{nk}^{(\gamma)}|>\eta$; para cada um desses valores de n sairia, com (pelo menos) um valor de k, $|A_{nk}-\chi_{nk}^{(\gamma)}|>\eta$ e portanto $\mathsf{P}(|X_{nk}-A_{nk}|<\eta)\leqq\sup(\gamma,1-\gamma)$ ou

$$\mathsf{P}(|X_{nk}-A_{nk}|\geqq\eta)\geqq 1-\sup(\gamma,1-\gamma),$$

o que contradiz a definição de constância assintótica.

As relações

$$\lim_{n\uparrow\infty}\sup_{k}|A_{nk}-\chi_{nk}^{(0)}|=0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\uparrow\infty}\sup_{k}|A_{nk}-\chi_{nk}^{(1)}|=0$$

podem ocorrer ambas ou só a primeira ou só a segunda ou então não ocorre nenhuma, como pode ver-se através de exemplos. Assim:

1.º) Para todo o n e k, $F_{nk}(x)=0$ ou 1, conforme $x\leqq 0$ ou $x>0$; pode ser, para todo o n e k, $A_{nk}=0=\chi_{nk}^{(0)}=\chi_{nk}^{(1)}$.

2.º) Para todo o k, $F_{nk}(x)=0$ ou x/n ou 1, conforme $x\leqq 0$ ou $0<x\leqq 1$ ou $x>1$; pode ser, para todo o n e k, $A_{nk}=1=\chi_{nk}^{(1)}$ enquanto $A_{nk}\neq\chi_{nk}^{(0)}=0$.

3.º) Se $n>1$ tem-se, para todo o k, $F_{nk}(x)=0$ ou x/n ou $(n-2)/n+x/n$ ou 1, conforme $x\leqq 0$ ou $0<x\leqq 1$ ou $1<x\leqq 2$ ou $x>2$; pode ser, para todo o n e k, $A_{nk}=1$ enquanto $A_{nk}\neq\chi_{nk}^{(0)}=0$ e $A_{nk}\neq\chi_{nk}^{(1)}=2$.

A análise que acabamos de fazer e I demonstram a proposição seguinte:

III) «Se as variáveis casuais X_{nk} são assintòticamente constantes elas admitem como constantes assintóticas quaisquer dos seus quantis próprios de ordem fixa, em particular as suas medianas. Os quantis das ordens zero e um podem servir de constantes assintóticas ou simultâneamente ou só os primeiros ou só os segundos ou então não servem nem uns nem outros, conforme os casos.»

Dado um par fixo de números γ' e γ'' tais que $0<\gamma'\leqq\gamma''<1$ suponha-se que tem lugar, para todo o n suficientemente grande e uniformemente em k, a dupla desigualdade

$$\chi_{nk}^{(\gamma')}-\eta\leqq A_{nk}\leqq\chi_{nk}^{(\gamma'')}+\eta,$$

onde η significa um número positivo arbitràriamente pequeno. Sai

$$\lim_{n\uparrow\infty} \sup_k |A_{nk}-\chi_{nk}^{(\gamma')}|\leqq\eta+\lim_{n\uparrow\infty} \sup_k |\chi_{nk}^{(\gamma'')}-\chi_{nk}^{(\gamma')}|.$$

Logo se as variáveis X_{nk} forem assintòticamente constantes concluimos de III e I que elas admitem as constantes assintóticas A_{nk}.

Suponhamos agora que as variáveis X_{nk} admitem as constantes assintóticas A_{nk}. Se fixarmos um par de números γ' e γ'', tais que $0<\gamma'\leqq\gamma''<1$, verificam-se as igualdades

$$\lim_{n\uparrow\infty} \sup_k |A_{nk}-\chi_{nk}^{(\gamma')}|=0=\lim_{n\uparrow\infty} \sup_k |A_{nk}-\chi_{nk}^{(\gamma'')}|.$$

Pois bem, da primeira igualdade tira-se a primeira parte da dupla desigualdade anterior e da segunda igualdade tira-se a outra parte.

Estamos aptos a enunciar a proposição seguinte:

IV) «Para que as variáveis casuais assintòticamente constantes X_{nk} admitam as constantes assintóticas A_{nk} é condição necessária e suficiente que, escolhido um par de números γ' e γ'', com $0<\gamma'\leqq\gamma''<1$, se tenha, para todo o n suficientemente grande e uniformemente em k,

$$\chi_{nk}^{(\gamma')}-\eta\leqq A_{nk}\leqq\chi_{nk}^{(\gamma'')}+\eta,$$

onde η significa um número positivo arbitràriamente pequeno.»

Vejamos mais dois exemplos:

4.º) Seja, para todo o n e k, $F_{nk}(x)=0$ ou 1, conforme $x\leqq1$ ou $x>1$. Dado n pode tomar-se, para todo o k, $A_{nk}=1-1/n<\chi_{nk}^{(0)}=1$.

5.º) Em 2.º não pode tomar-se $A_{nk}\equiv1/2$ muito embora este número seja enquadrado, para todo o n e k, por quantis próprios (de ordens variáveis).

Observação: Suponha-se que η'_{nk} e η''_{nk} são números positivos, dependentes de n e k, que se tornam arbitràriamente pequenos, para n suficientemente grande e k qualquer desde 1 a k_n, e substitua-se a condição de IV por

$$\chi_{nk}^{(\gamma')} - \eta'_{nk} \leqq A_{nk} \leqq \chi_{nk}^{(\gamma'')} + \eta''_{nk}.$$

É óbvio que a nova condição é suficiente para que as variáveis assintòticamente constantes X_{nk} admitam as constantes assintóticas A_{nk}, mas já não é necessária como pode ver-se através do exemplo seguinte:

6.º) Dado n ponha-se, para todo o k, $F_{nk}(x)=0$ ou 1, conforme $x \leqq n^{-1/3}$ ou $x > n^{-1/3}$, de modo que todos os quantis saiem iguais a $n^{-1/3}$; todavia, dado n, pode pôr-se, para todo o k, $A_{nk}=0<n^{-1/3}-o(n^{-1/3})$ (*o leia-se de ordem menor que).*

* * *

Dados os números positivos D e r tem-se, para todo o ε tal que $0<\varepsilon<D$,

$$\sup_k \int_{|x| \leqq D} |x|^r \, dF_{nk}(x) \leqq \varepsilon^r +$$
$$+ \sup_k \int_{\varepsilon \leqq |x| \leqq D} |x|^r \, dF_{nk}(x) \leqq \varepsilon^r + D^r \cdot \sup_k \mathsf{P}(|X_{nk}| \geqq \varepsilon).$$

Donde, com $n \uparrow \infty$ e $\varepsilon \downarrow 0$,

V) «Se as variáveis casuais X_{nk} são infinitesimais então, dados dois números positivos D e r, tem-se

$$\lim_{n \uparrow \infty} \sup_{1 \leqq k \leqq k_n} \int_{|x| \leqq D} |x|^r \, dF_{nk}(x) = 0 \text{.»}$$

Se o integral do enunciado de V se estendesse a todo o campo real ele representaria a esperança matemática de $|X_{nk}|^r$, esperança a que é uso chamar *momento absoluto da ordem r* de X_{nk}. Na realidade o integral referido é a esperança matemática da restrição de $|X_{nk}|^r$ ao intervalo fechado de $-D$ a $+D$; pode designar-se por *momento absoluto da ordem r* de X_{nk} *truncado em* $\pm D$ [comparar com A, § 3]. A proposição V dá portanto uma propriedade dos momentos absolutos truncados das variáveis X_{nk} que se verifica uniformemente em k.

Vimos em A, 5) de § 5), que a função de distribuição de $X_{nk}-A_{nk}$ é $F_{nk}(x+A_{nk})$. Então, por 2), V e III:

V') «Se as variáveis casuais X_{nk} admitem as constantes assintóticas A_{nk} então, dados dois números positivos D e r, sai

$$\lim_{n\uparrow\infty}\sup_{1\leqq k\leqq k_n}\int_{|x|\leqq D}|x|^r\,dF_{nk}(x+A_{nk})=0.$$

As constantes A_{nk} podem sempre substituir-se por medianas χ_{nk} ou, mais geralmente, por quantis próprios de ordem fixa.»

Como
$$\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}\sup_k \mathsf{P}(|X_{nk}|\geqq\varepsilon)=$$

$$=\sup_k\int_{|x|\geqq\varepsilon}\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2}\,dF_{nk}(x)\leqq\sup_k\int_R\frac{x^2}{1+x^2}\,dF_{nk}(x)=$$

$$=\sup_k\left[\int_{|x|<\varepsilon}x^2\,dF_{nk}(x)+\int_{|x|\geqq\varepsilon}dF_{nk}(x)\right]\leqq\varepsilon^2+\sup_k \mathsf{P}(|X_{nk}|\geqq\varepsilon)$$

podemos enunciar a proposição seguinte:

VI) «Para que as variáveis casuais X_{nk} sejam infinitesimais é condição necessária e suficiente que se tenha

$$\lim_{n\uparrow\infty}\sup_{1\leqq k\leqq k_n}\int_R\frac{x^2}{1+x^2}\,dF_{nk}(x)=0.»$$

Do mesmo modo que se passou de V para V' também se passa de VI para

VI') «Para que as variáveis casuais X_{nk} sejam assintòticamente constantes é condição necessária e suficiente que existam constantes A_{nk} tais que se tenha

$$\lim_{n\uparrow\infty}\sup_{1\leqq k\leqq k_n}\int_R\frac{x^2}{1+x^2}\,dF_{nk}(x+A_{nk})=0.$$

Aqui as constantes A_{nk} podem sempre substituir-se por medianas χ_{nk} ou, mais geralmente, por quantis próprios de ordem fixa.»

Tem-se, para todo o $\varepsilon>0$,

$$\sup_k |f_{nk}(t)-1| \leqq \sup_k \int_R |e^{itx}-1|\, dF_{nk}(x) \leqq$$

$$\leqq \sup_k \left[\int_{|x|<\varepsilon} 2\cdot |tx|\, dF_{nk}(x) + \int_{|x|\geqq\varepsilon} 2\, dF_{nk}(x)\right] \leqq$$

$$\leqq 2\cdot\left[|t|\cdot \sup_k \int_{|x|<\varepsilon} |x|\, dF_{nk}(x) + \sup_k \mathsf{P}(|X_{nk}|\geqq\varepsilon)\right]$$

[A, 1) de § 6, V de § 4 e demonstração de V de § 6]. Se as variáveis X_{nk} forem infinitesimais sai $\lim\limits_{n\uparrow\infty} \sup\limits_k |f_{nk}(t)-1|=0$, uniformemente em qualquer intervalo finito e fechado de t (ver V). Logo [comparar com A, VII de § 8] $\sup\limits_k |f_{nk}(t)-1| \xrightarrow{s} 0$.

Suponhamos agora que $\sup\limits_k |f_{nk}(t)-1| \xrightarrow{s} 0$. Então [A, III de § 4]

$$\lim_{n\uparrow\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t} \sup_k |f_{nk}(t)-1|\, dt = 0.$$

Como $|f_{nk}(t)-1| \geqq 1-\mathbf{Re}\,[f_{nk}(t)]$ [para a notação veja-se A, IV de § 8] e como uma soma de supremos de grandezas positivas nunca é inferior ao supremo da soma dessas grandezas tem-se

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \sup_k |f_{nk}(t)-1|\, dt \geqq \sup_k \int_0^{+\infty} e^{-t}\{1-\mathbf{Re}\,[f_{nk}(t)]\}\, dt =$$

$$= \sup_k \int_R \left[1-\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(tx)\, dt\right] dF_{nk}(x)$$

[A, III$_5$ de § 4]. Mas

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(tx)\, dt =$$

$$= \{e^{-t}[x \operatorname{sen}(tx)-\cos(tx)]/(1+x^2)\}_{t=0}^{t=+\infty} = 1/(1+x^2).$$

Logo

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \sup_k |f_{nk}(t)-1|\, dt \geqq \sup_k \int_R \frac{x^2}{1+x^2}\, dF_{nk}(x)$$

e a hipótese implica que as variáveis X_{nk} são infinitesimais (VI).

Acabamos de demonstrar a proposição seguinte:

VII) «Para que as variáveis casuais X_{nk} sejam infinitesimais é condição necessária e suficiente que se tenha

$$\sup_{1 \leqq k \leqq k_n} |f_{nk}(t)-1| \xrightarrow{s} 0\,.»$$

A f. c. de $X_{nk}-A_{nk}$ é $e^{-iA_{nk}t} \cdot f_{nk}(t)$ [A, 1) de § 8]. Então (2), VII e III):

VII') «Para que as variáveis casuais X_{nk} sejam assintòticamente constantes é condição necessária e suficiente que existam constantes A_{nk} tais que $\sup\limits_{1 \leqq k \leqq k_n} |e^{-iA_{nk}t} \cdot f_{nk}(t)-1| \xrightarrow{s} 0$. Aqui as constantes A_{nk} podem sempre substituir-se por medianas χ_{nk} ou, mais geralmente, por quantis próprios de ordem fixa.»

Dados os números $D>0$ e $r>0$ façamos

5) $\quad {}_D E_{nk}^{(r)} = \int_{|x| \leqq D} x^r\, dF_{nk}(x)$, com a convenção ${}_D E_{nk}^{(1)} = {}_D E_{nk}$

e

6) $\quad {}_D E_{nk}^{*(r)} = \int_{|x| \leqq D} |x|^r\, dF_{nk}(x)$, com a convenção ${}_D E_{nk}^{*(1)} = {}_D E_{nk}^{*}$.

As grandezas ${}_D E_{nk}^{*(r)}$ já foram consideradas em V. Logo se vê que $|{}_D E_{nk}^{(r)}| \leqq {}_D E_{nk}^{*(r)} \leqq D^r$ [A, V de § 4]. Qualquer grandeza ${}_D E_{nk}^{(r)}$ é momento da ordem r da restrição de X_{nk} ao intervalo fechado de $-D$ a $+D$ e podemos chamar-lhe *momento da ordem r de X_{nk} truncado em* $\pm D$. Em particular, ${}_D E_{nk}$ é a *esperança matemática de X_{nk} truncada em* $\pm D$.

Tendo em vista V, I e VII podemos enunciar a proposição seguinte (usa-se momento ordinário como sinónimo de momento):

VIII) «Se as variáveis casuais X_{nk} são infinitesimais saem também infinitesimais as mesmas variáveis centradas nos seus momentos, ordinários ou absolutos, de qualquer ordem positiva r, truncados em $\pm D$, com $D>0$ arbitrário, e tem-se

$$\sup_{1\leqq k\leqq k_n} \left| e^{-i\cdot {}_DE_{nk}^{*(r)}\cdot t} \cdot f_{nk}(t)-1 \right| \xrightarrow{s} 0$$

e

$$\sup_{1\leqq k\leqq k_n} \left| e^{-i\cdot {}_DE_{nk}^{(r)}\cdot t} \cdot f_{nk}(t)-1 \right| \xrightarrow{s} 0 .$$

Em particular saem infinitesimais as variáveis X_{nk} centradas nas suas esperanças matemáticas truncadas em $\pm D$, com $D>0$ arbitrário, e tem-se

$$\sup_{1\leqq k\leqq k_n} \left| e^{-i\cdot {}_DE_{nk}\cdot t} \cdot f_{nk}(t)-1 \right| \xrightarrow{s} 0.\text{»}$$

§ 5) Constância assintótica forte

Se até agora tinha pouco interesse a circunstância de as variáveis X_{nk} serem independentes por linhas outro tanto já não sucede daqui por diante.

Vamos dar mais uma definição: As variáveis casuais X_{nk}, independentes por linhas, dizem-se *uniformemente infinitesimais* ou, talvez melhor, *fortemente infinitesimais* se [veja-se A, VI' de § 3]

1) $$\lim_{n\uparrow\infty} \mathsf{P}\left(\sup_{1\leqq k\leqq k_n} |X_{nk}|\geqq\varepsilon\right)=0, \quad \text{para todo o } \varepsilon>0.$$

Se existirem constantes A_{nk} tais que

1') $$\lim_{n\uparrow\infty} \mathsf{P}\left(\sup_{1\leqq k\leqq k_n} |X_{nk}-A_{nk}|\geqq\varepsilon\right)=0, \quad \text{para todo o } \varepsilon>0,$$

diremos que as variáveis X_{nk}, independentes por linhas, são *fortemente assintòticamente constantes* ou, mais explìcitamente, *admitem as constantes assintóticas fortes* A_{nk}. Equivale a dizer que as variáveis $X_{nk} - A_{nk}$ são fortemente infinitesimais.

Do mesmo modo que em 1) e 2) de § 4 também em 1) e 1′) pode escrever-se $> \varepsilon$ em lugar de $\geqq \varepsilon$.

Se as variáveis X_{nk} são fortemente infinitesimais então, dados dois números positivos arbitrários δ e ε, verifica-se, para todo o n suficientemente grande, que é inferior a δ a probabilidade do acontecimento $\sup\limits_k |X_{nk}| \geqq \varepsilon$ (de que o *conjunto* das k_n variáveis X_{nk} não seja desprezável dentro da ordem ε).

Tendo em vista A, 2) ou 3) de § 7, pode escrever-se, para todo o n,

$$\mathsf{P}(\sup_k |X_{nk}| \geqq \varepsilon) = 1 - \mathsf{P}(\sup_k |X_{nk}| < \varepsilon) = 1 - \prod_k \mathsf{P}(|X_{nk}| < \varepsilon) =$$

$$= 1 - \prod_k \left[1 - \int_{|x| \geqq \varepsilon} dF_{nk}(x) \right].$$

Concluimos que 1) é equivalente a

$$2) \qquad \lim_{n \uparrow \infty} \prod_{1 \leqq k \leqq k_n} \left[1 - \int_{|x| \geqq \varepsilon} dF_{nk}(x) \right] = 1, \quad \text{para todo o } \varepsilon > 0.$$

Consideremos grandezas p_{nk} ($1 \leqq k \leqq k_n$ e $k_n \to \infty$ quando $n \uparrow \infty$) tais que $0 \leqq p_{nk} \leqq 1$. Então

$1 - \sum\limits_k p_{nk} \leqq \prod\limits_k (1 - p_{nk}) \leqq e^{-\sum\limits_k p_{nk}}$ e a condição $\lim\limits_{n \uparrow \infty} \prod\limits_k (1 - p_{nk}) = 1$ implica e é implicada por $\lim\limits_{n \uparrow \infty} \sum\limits_k p_{nk} = 0$.

Pois bem, fazendo $p_{nk} = \int_{|x| \geqq \varepsilon} dF_{nk}(x)$,

concluimos que 2) é equivalente a

$$3) \qquad \lim_{n \uparrow \infty} \sum_{1 \leqq k \leqq k_n} \int_{|x| \geqq \varepsilon} dF_{nk}(x) = 0, \text{ para todo o } \varepsilon > 0.$$

As considerações precedentes provam a proposição seguinte:

I) «Para que as variáveis casuais X_{nk}, independentes por linhas, sejam fortemente infinitesimais é condição necessária e suficiente que se verifique uma das relações 1), 2) ou 3).

Mais geralmente, para que as variáveis X_{nk}, independentes por linhas, admitam as constantes assintóticas fortes A_{nk} é condição necessária e suficiente que se verifique uma das relações 1'), 2) com $dF_{nk}(x+A_{nk})$ em lugar de $dF_{nk}(x)$ ou 3) com a mesma alteração.»

Como

$$\sup_k \mathsf{P}(|X_{nk}|\geqq\varepsilon)=\sup_k \int_{|x|\geqq\varepsilon} dF_{nk}(x) \leqq \sum_k \int_{|x|\geqq\varepsilon} dF_{nk}(x),$$

inferimos de 1) e 2) de § 4 e de I a proposição seguinte:

II) «Se as variáveis casuais X_{nk}, independentes por linhas, são fortemente infinitesimais elas são também infinitesimais.

Mais geralmente, todas as constantes assintóticas fortes das variáveis X_{nk}, independentes por linhas, são constantes assintóticas das mesmas variáveis.»

Note-se que a inversa de II não é verdadeira. Pois as variáveis X_{nk}, independentes por linhas, podem muito bem ser infinitesimais sem serem fortemente infinitesimais. Vejamos um exemplo, generalização de outro que parece ser devido a Gnedenko e Kolmogorov:

Dado n, tome-se cada $F_{nk}(x)$ igual a $0{,}1-1/n$ ou 1 conforme $x\leqq 0, 0<x\leqq 1$ ou $x>1$. Então, para todo o ε tal que $0<\varepsilon\leqq 1$,

$$\lim_{n\uparrow\infty} \sup_k \mathsf{P}(|X_{nk}|\geqq\varepsilon)=\lim_{n\uparrow\infty} 1/n=0,$$

o que prova que as variáveis X_{nk} são infinitesimais.(*)

Doutro lado,

$$\mathsf{P}(\sup_k |X_{nk}|\geqq\varepsilon) = 1-[(1-1/n)^n]^{k_n/n}.$$

(*) A hipósete $\varepsilon>1$ não causa qualquer embaraço.

Porque $\lim_{n\uparrow\infty} (1-1/n)^n = 1/e$, as variáveis X_{nk}, independentes por linhas, são fortemente infinitesimais se $\lim_{n\uparrow\infty} k_n/n = 0$ e não são fortemente infinitesimais nos demais casos.

Suponhamos agora que as variáveis X_{nk} admitem as constantes assintóticas fortes A_{nk} e as constantes assintóticas A'_{nk}.

Por causa de II e por causa de I de § 4, dado $\varepsilon > 0$, tem-se, para n suficientemente grande, $\sup_k |A_{nk} - A'_{nk}| \leqq \varepsilon/2$.

Nestas condições sai

$$\sum_k \int_{|x| \geqq \varepsilon} dF_{nk}(x + A'_{nk}) = \sum_k \int_{|x + A_{nk} - A'_{nk}| \geqq \varepsilon} dF_{nk}(x + A_{nk}) \leqq$$

$$\leqq \sum_k \int_{|x| \geqq \varepsilon - |A_{nk} - A'_{nk}|} dF_{nk}(x + A_{nk}) \leqq \sum_k \int_{|x| \geqq \varepsilon/2} dF_{nk}(x + A_{nk}).$$

Daqui e de I inferimos a proposição seguinte:

III) «Se as variáveis casuais X_{nk}, independentes por linhas, são fortemente assintòticamente constantes todas as suas constantes assintóticas são necessàriamente fortes».

Observação: A proposição III mostra que I, I', III, IV e a observação anexa de § 4 servem também para caracterizar o conjunto das constantes assintóticas fortes de variáveis fortemente assintòticamente constantes.

§ 6) Sucessões estáveis

Principiemos por recordar uma definição dada em A, fim de § 3:

Diz-se que a sucessão casual $Y_1, Y_2, \cdots Y_n, \cdots$, abreviadamente $\{Y_n\}$, *converge em probabilidade* para a variável casual Y se

1) $$\lim_{n\uparrow\infty} \mathsf{P}(|Y_n - Y| \geqq \varepsilon) = 0, \quad \text{para todo o } \varepsilon > 0.$$

Abreviadamente escreve-se

1') $$Y_n \xrightarrow{\mathsf{P}} Y \quad (\text{quando } n \uparrow \infty).$$

Pois bem, podem existir constantes reais $S_1, S_2, \cdots S_n, \cdots$ tais que a sucessão $\{Y_n - S_n\}$ convirja em probabilidade para $Y \equiv 0$. Então

2) $$\lim_{n \uparrow \infty} \mathsf{P}(|Y_n - S_n| \geqq \varepsilon) = 0, \text{ para todo o } \varepsilon > 0,$$

ou

2') $$Y_n - S_n \xrightarrow{\mathsf{P}} 0 \quad (\text{quando } n \uparrow \infty)$$

e diz-se que a sucessão $\{Y_n\}$ é *estável* ou, mais explìcitamente, que ela *admite as constantes de estabilidade* S_n.

* * *

Comparando 2) com 2) de § 4 logo se vê que o conceito de sucessão casual estável é a adaptação às sucessões simples do conceito de constância assintótica para as sucessões duplas (ponha-se $k_n \equiv 1$).

Uma versão simplificada da demonstração de I de § 4 ($k_n \equiv 1$, suprima-se o índice k e escreva-se Y, S e S' em lugar de X, A e A') prova o seguinte:

I) «Para que a sucessão casual $\{Y_n\}$, estável com respeito às constantes S_n, seja também estável com respeito às constantes S'_n é condição necessária e suficiente que se tenha $\lim_{n \uparrow \infty} |S_n - S'_n| = 0$.»

Donde o corolário:

I') «Para que a sucessão casual $\{Y_n\}$, estável com respeito às constantes S_n, convirja em probabilidade para zero é condição necessária e suficiente que se tenha $\lim_{n \uparrow \infty} |S_n| = 0$.»

Representemos por $\chi_n^{(\gamma)}$ um quantil da ordem γ da variável Y_n. Uma versão simplificada da demonstração de III de § 4 mostra então o seguinte:

II) «Se a sucessão casual $\{Y_n\}$ for estável ela admite como constantes de estabilidade quaisquer quantis próprios de ordem fixa das suas variáveis, em particular admite as medianas destas. Os quantis das ordens zero e um podem servir de constantes de estabilidade ou simultâneamente ou só uns e não os outros ou então não servem nenhuns, conforme os casos.»

Uma versão simplificada de IV de § 4 dá

III) «Para que a sucessão casual estável $\{Y_n\}$ admita as constantes de estabilidade S_n é condição necessária e suficiente que, escolhido um par de números γ' e γ'', com $0<\gamma'\leqq\gamma''<1$, se tenha, para n suficientemente grande,

$$\chi_n^{(\gamma')}-\eta\leqq S_n\leqq\chi_n^{(\gamma'')}+\eta,$$

onde η significa um número positivo arbitràriamente pequeno.»

Observação: Substituindo, no enunciado de III, $-\eta$ por $-\eta'_n$ e $+\eta$ por $+\eta''_n$, onde η'_n e η''_n significam números positivos, dependentes de n, que se tornam arbitràriamente pequenos para n suficientemente grande, obtemos uma condição suficiente para que as grandezas S_n sejam constantes de estabilidade.

CAPÍTULO III

LEI DOS GRANDES NÚMEROS

§ 7) Estudo geral da lei dos grandes números

Quando se pretende tratar um problema tão geral como o posto no princípio de § 4 não surpreende que os vários caminhos que se oferecem sejam um tanto árduos. Uma via possível, a que vamos seguir, é começar por estudar um caso particular determinado, comparativamente simples, e aproveitar os resultados colhidos para facilitar a solução do caso geral. O método é bom em si e tem um motivo histórico a seu favor, pois o caso particular escolhido foi o primeiro a ser considerado.

Vamos dar mais uma definição: Diz-se que as variáveis casuais X_{nk}, independentes por linhas, **obedecem à lei dos grandes números** quando a sucessão casual de termo genérico $Y_n = \sum_{1 \leq k \leq k_n} X_{nk}$ é uma sucessão estável ou, equivalentemente, quando existem constantes S_n tais que

$$1) \qquad \lim_{n \uparrow \infty} \mathsf{P}\left(\left|\sum_{1 \leq k \leq k_n} X_{nk} - S_n\right| \geq \varepsilon\right) = 0, \text{ para todo o } \varepsilon > 0.$$

Logo se vê que a condição 1) é satisfeita quando e só quando as funções de distribuição das somas $\sum_k X_{nk} - S_n$ convergem para zero em todo o ponto de abcissa negativa e convergem para um em todo o ponto de abcissa positiva. Quer dizer, 1) é satisfeita quando e só quando as funções de distribuição referidas convergem fracamente para $\varepsilon(x)$, a função de distribuição da variável casual imprópria idênticamente nula, variável esta a que corresponde uma lei que vamos denominar *lei unitária*.

Daí a proposição:

I) «São afirmações equivalentes dizer que as variáveis casuais X_{nk}, independentes por linhas, obedecem à lei dos grandes números ou dizer que existem constantes S_n tais que as leis das somas $\sum_{1 \leq k \leq k_n} X_{nk} - S_n$ convergem (fracamente) para a lei unitária.»

Usa-se a expressão clássica de lei dos grandes números por tradição, mas é mais elucidativo falar em convergência (fraca) para a lei unitária.

A f.c. da soma $\sum_k X_{nk} - S_n$ é $e^{-iS_n t} \cdot \prod_k f_{nk}(t)$ [A, IV de § 7 e 1) de § 8] e a f.c. da lei unitária é idênticamente igual a 1. Por causa de I podemos então afirmar que a condição 1) é equivalente a

$$2) \qquad e^{-iS_n t} \cdot \prod_{1 \leq k \leq k_n} f_{nk}(t) \xrightarrow{s} 1, \text{ quando } n \uparrow \infty.$$

Tirando módulos em 2) sai

3) $$\prod_k |f_{nk}(t)| \xrightarrow{s} 1 \text{ ou } -\sum_k \log |f_{nk}(t)| \xrightarrow{s} 0 .$$

Como $-\log\{1-[1-|f_{nk}(t)|]\} \geq 1-|f_{nk}(t)|$ [A, III de § 6] concluimos de 3) que

II) «Se as variáveis casuais X_{nk}, independentes por linhas, obedecem à lei dos grandes números tem-se

$$\sum_{1 \leq k \leq k_n} [1-|f_{nk}(t)|] \xrightarrow{s} 0, \text{ quando } n \uparrow \infty,$$

e portanto

$$\sup_{1 \leq k \leq k_n} [1-|f_{nk}(t)|] \xrightarrow{s} 0, \text{ quando } n \uparrow \infty.\text{»}$$

* * *

Demos a condição necessária e suficiente para que as variáveis casuais X_{nk}, independentes por linhas, obedeçam à lei dos grandes números, respectivamente à custa de probabilidades em 1) e à custa de f. c. em 2). Convém agora exprimir tal condição à custa de funções de distribuição. Para este efeito vamos demonstrar o teorema seguinte que é uma generalização ligeira doutro teorema a que podemos chamar *teorema de Kolmogorov relativo à lei dos grandes números* (para a notação veja-se 4) de § 4 e antes de III de § 4):

III) «Para que as variáveis casuais X_{nk}, independentes por linhas, obedeçam à lei dos grandes números é condição necessária e suficiente que exista um número positivo D tal que se tenha

a) $$\lim_{n \uparrow \infty} \sum_{1 \leq k \leq k_n} \int_R h_D(x)\, dF_{nk}(x+\chi_{nk}) = 0$$

ou, equivalentemente, se tenha

b) $$\lim_{n \uparrow \infty} \sum_{1 \leq k \leq k_n} \int_{|x|>D} dF_{nk}(x+\chi_{nk}) = 0 =$$

$$= \lim_{n \uparrow \infty} \sum_{1 \leq k \leq k_n} \int_{|x| \leq D} x^2\, dF_{nk}(x+\chi_{nk}).$$

As constantes da lei podem escolher-se de acordo com a fórmula

$$c) \qquad S_n = \sum_{1 \leq k \leq k_n} \left[\chi_{nk} + \int_{|x| \leq D} x \, dF_{nk}(x + \chi_{nk}) \right].$$

Se a condição *a)* ou *b)* se verifica para um certo número positivo D ela verifica-se para todos os números positivos.»

Vamos começar por demonstrar que a condição *b)* é suficiente, podendo escolher-se as constantes S_n de acordo com *c)*.

Façamos

$$4) \qquad \widetilde{X}_{nk} = X_{nk} - \chi_{nk}, \quad \widetilde{F}_{nk}(x) = F_{nk}(x + \chi_{nk})$$

e consideremos, para cada n e k, a variável casual $\widetilde{X}'_{nk}$, restrição de $\widetilde{X}_{nk}$ ao intervalo fechado de $-D$ a $+D$. Então

$$E(\widetilde{X}'_{nk}) = \int_{|x| \leq D} x \, d\widetilde{F}_{nk}(x), \quad S_n = \sum_k [\chi_{nk} + E(\widetilde{X}'_{nk})]$$

e

$$\sum_k X_{nk} - S_n = \sum_k [\widetilde{X}_{nk} - E(\widetilde{X}'_{nk})].$$

A região $|\sum_k X_{nk} - S_n| \geq \varepsilon$ é a união das duas regiões (disjuntas) seguintes: $|\sum_k X_{nk} - S_n| \geq \varepsilon$ acompanhado de $\sum_k \widetilde{X}_{nk} = \sum_k \widetilde{X}'_{nk}$ e $|\sum_k X_{nk} - S_n| \geq \varepsilon$ acompanhado de $\sum_k \widetilde{X}_{nk} \neq \sum_k \widetilde{X}'_{nk}$. A primeira destas regiões está contida na região (talvez melhor no acontecimento) $|\sum_k [\widetilde{X}'_{nk} - E(\widetilde{X}'_{nk})]| \geq \varepsilon$ e a outra é coberta pelo conjunto das regiões (dos acontecimentos) $|\widetilde{X}_{n1}| > D, |\widetilde{X}_{n2}| > D, \ldots \ldots |\widetilde{X}_{nk_n}| > D$. Logo

$$5) \qquad \mathbf{P}(|\sum_k X_{nk} - S_n| \geq \varepsilon) \leq$$

$$\leq \sum_k \mathbf{P}(|\widetilde{X}_{nk}| > D) + \mathbf{P}(|\sum_k [\widetilde{X}'_{nk} - E(\widetilde{X}'_{nk})]| \geq \varepsilon).$$

Representemos por $F^*_{nk}(x)$ a função de distribuição de $X^*_{nk} = \widetilde{X}'_{nk} - E(\widetilde{X}'_{nk})$ e por $F^*_n(x)$ a função de distribuição de $X^*_n = \sum_k X^*_{nk}$.

Sai

$$\varepsilon^2 \cdot \mathsf{P}(|X_n^*| \geqq \varepsilon) \leqq \int_{|x| \geqq \varepsilon} x^2\, dF_n^*(x) \leqq V(X_n^*) = \sum_k V(X_{nk}^*)$$

[A, fim de § 4 e II e III' de § 7]. Donde

$$\text{6)} \qquad \mathsf{P}(|X_n^*| \geqq \varepsilon) \leqq (1/\varepsilon^2) \cdot \sum_k V(X_{nk}^*).$$

Como

$$V(X_{nk}^*) \leqq E(\widetilde{X}'^2_{nk}) = \int_{|x| \leqq D} x^2\, d\widetilde{F}_{nk}(x)$$

tiramos de 4), 5) e 6) a desigualdade

$$\text{7)} \qquad \mathsf{P}(|\sum_k X_{nk} - S_n| \geqq \varepsilon) \leqq$$

$$\leqq \sum_k \left[(1/\varepsilon^2) \cdot \int_{|x| \leqq D} x^2\, dF_{nk}(x + \chi_{nk}) + \int_{|x| > D} dF_{nk}(x + \chi_{nk}) \right].$$

Pois bem, escolheram-se as constantes S_n de acordo com c) e assim 7) prova a suficiência das relações b).

Vamos agora mostrar que a condição a) é necessária. Suponhamos primeiro que as variáveis X_{nk} obedecem à lei dos grandes números e são simétricas. Então $\chi_{nk} \equiv 0$ e $f_{nk}(t)$ é real [3) de § 4 e A, III de § 8]. Logo

$$\int_{-1}^{+1} [1 - f_{nk}(t)]\, dt = \int_{-1}^{+1} \left[1 - \int_R \cos(tx)\, dF_{nk}(x)\right] dt =$$

$$= 2 \cdot \int_R (1 - \operatorname{sen} x/x)\, dF_{nk}(x) \quad [\text{A, III}_4 \text{ de § 4}].$$

Ora, para $|x| \leqq 1$, $1 - \operatorname{sen} x/x > x^2/3! - x^4/5! \geqq 19\, x^2/120$ e, para $|x| > 1$, $1 - \operatorname{sen} x/x > 1 - \operatorname{sen} 1 > 1/3! - 1/5! = 19/120$. Logo

$$\int_{-1}^{+1} \sum_k [1 - f_{nk}(t)]\, dt \geqq \frac{19}{60} \cdot \sum_k \left[\int_{|x| \leqq 1} x^2\, dF_{nk}(x) + \right.$$

$$\left. + \int_{|x| > 1} dF_{nk}(x) \right] = \frac{19}{60} \cdot \sum_k \int_R h_1(x)\, dF_{nk}(x).$$

Ora, dado n suficientemente grande, a segunda parte de II mostra que cada f. c. *real* $f_{nk}(t)$, considerada no intervalo

$|t| \leqq 1$, se confunde com o seu módulo. Então, pela primeira parte de II e por A, III de § 4,

$$\lim_{n \uparrow \infty} \sum_k \int_R h_1(x)\, dF_{nk}(x) = 0$$

ou seja a condição $a)$, com $D = 1$ e $\chi_{nk} \equiv 0$.

Cumpre-nos agora levantar a restrição $\chi_{nk} \equiv 0$. Para este efeito vamos usar uma técnica, denominada de *simetrização,* que consiste no seguinte: Para cada n associem-se às variáveis X_{nk} outras Y_{nk}, independentes entre si e das primeiras, escolhidas de modo tal que cada variável Y_{nk} tenha a mesma lei de probabilidade que a variável X_{nk} homóloga; em seguida formem-se as variáveis casuais $Z_{nk} = X_{nk} - Y_{nk}$.

Como a f. c. de Z_{nk} é $|f_{nk}(t)|^2$ [A, IV de § 7, 1) de § 8 e IV de § 6] ela é real, portanto duma lei simétrica [A, III de § 8]. Doutro lado, 3) dá $\prod_k |f_{nk}(t)|^2 \xrightarrow{s} 1$ o que permite concluir que as variáveis Z_{nk} obedecem à lei dos grandes números. Se representarmos por $H_{nk}(x)$ a função de distribuição de Z_{nk} sai

$$\lim_{n \uparrow \infty} \sum_k \int_R h_1(x)\, dH_{nk}(x) = \lim_{n \uparrow \infty} \sum_k E[h_1(X_{nk} - Y_{nk})] = 0 .$$

Em virtude de II de § 4 e de A, 5) de § 5, resulta

$$0 = \lim_{n \uparrow \infty} \sum_k E[h_1(X_{nk} - \chi_{nk})] = \lim_{n \uparrow \infty} \sum_k \int_R h_1(x)\, dF_{nk}(x + \chi_{nk})$$

ou seja a condição $a)$, com $D = 1$.

Para todo o x tem-se, se $D > 1$, $h_1(x) \leqq h_D(x) \leqq D^2 \cdot h_1(x)$ e, se $D < 1$, $D^2 \cdot h_1(x) \leqq h_D(x) \leqq h_1(x)$. Portanto, se as variáveis X_{nk} obedecem à lei dos grandes números tem-se a condição $a)$, seja qual for o número $D > 0$.

Finalmente, se a condição $a)$ ou $b)$ se verifica para um certo $D > 0$ tem-se a lei dos grandes números, pela primeira parte da demonstração, e depois sai $a)$ ou $b)$ com qualquer $D > 0$, pelo que acabamos de ver.

A primeira relação b) de III e as proposições I e II de § 5 provam o seguinte:

IV) «Se as variáveis casuais X_{nk}, independentes por linhas, obedecem à lei dos grandes números as mesmas variáveis, centradas em medianas delas, saem fortemente infinitesimais e portanto infinitesimais. As próprias variáveis X_{nk} saem (fortemente) assintòticamente constantes.»

Retomemos a relação c) de III. Dado um número positivo η tem-se, com n suficientemente grande,

$$\sup_k \left| \int_{|x| \leq D} x \, dF_{nk}(x+\chi_{nk}) \right| < \eta \qquad (\mathrm{V}' \text{ de } \S\, 4)$$

e pode escrever-se $S_n = \sum_k A_{nk}$, onde as grandezas A_{nk} são constantes assintóticas das variáveis X_{nk} (IV de § 4, com $\gamma' = \gamma'' = 1/2$). Se a sucessão $\sum_k X_{nk}$ admitir as constantes de estabilidade S'_n e se ζ for um número positivo arbitràriamente pequeno tem-se, para n suficientemente grande, $S'_n - \sum_k A_{nk} = \zeta_n$, com $|\zeta_n| \leq \zeta$ (ver 1) de § 7 e I de § 6). Podemos pôr $S'_n = \sum_k (A_{nk} + \zeta_n / k_n)$. Daí a proposição (I de § 4):

V) «Se as variáveis casuais X_{nk}, independentes por linhas, tiverem somas $\sum_{1 \leq k \leq k_n} X_{nk}$ estáveis com respeito a *quaisquer* constantes estas são por sua vez somas de constantes assintóticas das variáveis.»

Observação: Se escolhermos de modo arbitrário as constantes assintóticas A_{nk} das variáveis X_{nk} (sujeitas à lei dos grandes números) não se pode afirmar que as somas $\sum_k A_{nk}$ são sempre constantes de estabilidade que convêm à lei dos grandes números. Por exemplo, se for $\sum_k A_{nk} = S_n$ e $A'_{nk} = A_{nk} + 1/n$, tem-se $\sum_k A'_{nk} = S_n + k_n/n$ e pode acontecer que k_n/n não tenda para zero quando $n \uparrow \infty$.

* * *

Retomemos a demonstração de III. A primeira parte não se altera se substituirmos, nas relações b) e c), as medianas χ_{nk} por constantes assintóticas quaisquer A_{nk}.

Suponhamos que existe um par fixo de números γ' e γ'' tais que $0<\gamma'\leqq\gamma''<1$ e que se verifica, para todo o n suficientemente grande, a desigualdade $\chi_{nk}^{(\gamma')}\leqq A_{nk}\leqq\chi_{nk}^{(\gamma'')}$, com $1\leqq k\leqq k_n$. Então as grandezas A_{nk} são constantes assintóticas (IV de § 4) e são quantis de ordens (porventura variáveis) γ_{nk}, com $\gamma'\leqq\gamma_{nk}\leqq\gamma''$ (ver pág. 25). Na segunda parte da demonstração de III temos agora

$$E[h_1(X_{nk}-Y_{nk})]\geqq \inf(\gamma', 1-\gamma'')\cdot E[h_1(X_{nk}-A_{nk})]$$

(II de § 4) e chegamos à mesma conclusão final, com A_{nk} em lugar de χ_{nk}. Podemos pois generalizar III como segue:

VI) «O enunciado de III permanece se substituirmos as medianas χ_{nk} por outras constantes assintóticas A_{nk}, desde que exista um par fixo de números γ' e γ'', com $0<\gamma'\leqq\gamma''<1$, tais que se tenha, para todo o n suficientemente grande e uniformemente em k, $\chi_{nk}^{(\gamma')}\leqq A_{nk}\leqq\chi_{nk}^{(\gamma'')}$.»

Suponhamos agora que as variáveis X_{nk} obedecem à lei dos grandes números e que as constantes assintóticas A_{nk} não satisfazem à dupla desigualdade de VI, mas são tais que $\chi_{nk}^{(\gamma')}-\zeta'_{nk}=A_{nk}<\chi_{nk}^{(\gamma')}$, com $\lim_{n\uparrow\infty}\sup_k \zeta'_{nk}=0$ (I de § 4).

Quando $n\uparrow\infty$ tem-se (IV de § 7 e III e I de § 5)

$$\sum_k \int_{|x|>D} dF_{nk}(x+A_{nk})\longrightarrow 0\,.$$

Pois que $(a+b)^2\leqq 2(a^2+b^2)$ sai, para n suficientemente grande,

$$\sum_k \int_{|x|\leqq D} x^2\,dF_{nk}(x+A_{nk}) =$$

$$=\sum_k \int_{|y+\zeta'_{nk}|\leqq D} (y+\zeta'_{nk})^2\,dF_{nk}(y+\chi_{nk}^{(\gamma')})\leqq$$

$$\leqq 2\cdot\sum_k\left[\int_{|y|\leqq 2D} y^2\,dF_{nk}(y+\chi_{nk}^{(\gamma')})+\zeta'^2_{nk}\cdot\int_{|y|\leqq 2D} dF_{nk}(y+\chi_{nk}^{(\gamma')})\right].$$

Por causa de VI tem-se então

$$\lim_{n\uparrow\infty} \sum_k \int_{|x|\leqq D} x^2\, dF_{nk}(x+A_{nk}) = 0,$$

desde que $\lim_{n\uparrow\infty} \sum_k \zeta'^2_{nk} = 0$, o que sucede certamente quando $\sup_k \zeta'^2_{nk} = o(k_n^{-1})$.

Concluimos que VI subsiste se, para todo o n suficientemente grande,

$$\chi_{nk}^{(\Upsilon')} - \eta'_{nk} \leqq A_{nk} < \chi_{nk}^{(\Upsilon')}, \quad \text{com} \quad \lim_{n\uparrow\infty} \sum_k \eta'^2_{nk} = 0.$$

Anàlogamente se prova que VI subsiste se, para todo o n suficientemente grande,

$$\chi_{nk}^{(\Upsilon'')} < A_{nk} \leqq \chi_{nk}^{(\Upsilon'')} + \eta''_{nk}, \quad \text{com} \quad \lim_{n\uparrow\infty} \sum_k \eta''^2_{nk} = 0.$$

Como as parcelas das somas das relações b) de III são não-negativas podemos sobrepor os dois casos ùltimamente tratados e o caso analisado em VI para alcançarmos uma nova generalização de III, a saber:

VII) «Para que as variáveis casuais X_{nk}, independentes por linhas, obedeçam à lei dos grandes números é condição necessária e suficiente que exista um número positivo D tal que se tenha

a)
$$\lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leqq k\leqq k_n} \int_R h_D(x)\, dF_{nk}(x+A_{nk}) = 0$$

ou, equivalentemente, se tenha

b)
$$\lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leqq k\leqq k_n} \int_{|x|>D} dF_{nk}(x+A_{nk}) = 0 =$$
$$= \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leqq k\leqq k_n} \int_{|x|\leqq D} x^2\, dF_{nk}(x+A_{nk}),$$

para alguma sucessão dupla de constantes assintóticas A_{nk} das variáveis X_{nk}, sujeita à restrição seguinte: Existe um par fixo de números γ' e γ'', com $0<\gamma'\leqq\gamma''<1$, tais que se verifica, para todo o n suficientemente grande e uniformemente em k,

c) $$\chi_{nk}^{(\gamma')} - \eta'_{nk} \leqq A_{nk} \leqq \chi_{nk}^{(\gamma'')} + \eta''_{nk},$$

onde η'_{nk} e η''_{nk} são números positivos que satisfazem a

$$\lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leqq k\leqq k_n} \eta'^{2}_{nk} = \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leqq k\leqq k_n} \eta''^{2}_{nk} = 0\,.$$

Em particular, pode pôr-se $A_{nk}=\chi_{nk}^{(\gamma)}$, com $0<\gamma<1$.

As constantes da lei podem escolher-se de acordo com a fórmula

d) $$S_n = \sum_{1\leqq k\leqq k_n} \left[A_{nk} + \int_{|x|\leqq D} x\, dF_{nk}(x+A_{nk}) \right].$$

Se a condição *a)* ou *b)* se verifica para um certo número positivo D e para uma certa sucessão de constantes assintóticas sujeitas a *c)* a mesma condição verifica-se para qualquer número positivo e para qualquer sucessão de constantes assintóticas sujeitas a *c)*.»

Dois exemplos:

1.º) Ponha-se $F_{nk}(x)=0$ ou 1, conforme $x\leqq 1/(n^{1/3}+k)$ ou $x>1/(n^{1/3}+k)$, e $k_n=\mathbf{o}(n^{1/2})$ *(leia-se da ordem de $n^{1/2}$)*. Verifica-se a lei dos grandes números, com $S_n=\sum_k 1/(n^{1/3}+k)$; tem-se $\chi_{nk}^{(\gamma)}=1/(n^{1/3}+k)$, para todo o γ admissível; pode tomar-se $A_{nk}\equiv 0$ e portanto $\zeta'_{nk}=1/(n^{1/3}+k)$; finalmente $\sup_k \zeta'^{2}_{nk} = \mathbf{o}(n^{-2/3}) = o(n^{-1/2})$ e as constantes A_{nk} sujeitam-se a *c)*.

2.º) Dado n, ponha-se, para todo o k, $F_{nk}(x)=0$ ou 1, conforme $x\leqq n^{-1/3}$ ou $x>n^{-1/3}$, e suponha-se $k_n=\mathbf{o}(n^{2/3})$. Verifica-se a lei dos grandes números, com $S_n=n^{-1/3}\cdot k_n$; dado n, tem-se $\chi_{nk}^{(\gamma)}=n^{-1/3}$, para todo o k e γ admissíveis, e pode tomar-se $A_{nk}\equiv 0$ e portanto $\zeta'_{nk}=n^{-1/3}$, para todo o k; finalmente $\lim_{n\uparrow\infty}\sum_k \zeta'^{2}_{nk}\neq 0$ e as constantes A_{nk} não se sujeitam a *c)*.

Pois bem, agora a segunda parte da condição b) de VII já não é respeitada visto que, para n suficientemente grande, $\sum_k \int_{|x| \leq D} x^2 \, dF_{nk}(x) = \sum_k n^{-2/3} = o(1)$.

Se as variáveis X_{nk} forem infinitesimais sabemos que o mesmo pode afirmar-se das diferenças $X_{nk} - {}_DE_{nk}$ (5) e VIII de § 4).

Ora $$(1/2) \cdot ({}_DE_{nk} - \chi_{nk})^2 = (1/2) \cdot$$

$$\cdot \left[\int_{|x| \leq D} (x - \chi_{nk}) \, dF_{nk}(x) - \int_{|x| > D} \chi_{nk} \, dF_{nk}(x) \right]^2 \leq$$

$$\leq \left[\int_{|y + \chi_{nk}| \leq D} y \, dF_{nk}(y + \chi_{nk}) \right]^2 +$$

$$+ \left[\chi_{nk} \cdot \int_{|y + \chi_{nk}| > D} dF_{nk}(y + \chi_{nk}) \right]^2 \leq$$

$$\leq \left[\int_{|y| \leq 2D} |y| \, dF_{nk}(y + \chi_{nk}) \right]^2 + \chi_{nk}^2 \cdot \left[\int_{|y| > D/2} dF_{nk}(y + \chi_{nk}) \right]^2,$$

desde que n seja suficientemente grande. Viu-se em A, fim de § 4, que $E^2(X) \leq E(X^2)$; sai então

$$(1/2) \cdot \sum_k ({}_DE_{nk} - \chi_{nk})^2 \leq$$

$$\leq \sum_k \left[\int_{|y| \leq 2D} y^2 \, dF_{nk}(y + \chi_{nk}) + \chi_{nk}^2 \cdot \int_{|y| > D/2} dF_{nk}(y + \chi_{nk}) \right].$$

Atendendo agora a I e III de § 4 ($A_{nk} \equiv 0$ e $A'_{nk} = \chi_{nk}$) e a III e VII de § 7 ($A_{nk} = {}_DE_{nk}$ e $\gamma' = \gamma'' = 1/2$) tiramos a proposição seguinte:

VIII) «Para que as variáveis casuais *infinitesimais* X_{nk}, independentes por linhas, obedeçam à lei dos grandes números é condição necessária e suficiente que exista um número positivo D tal que se tenha

a) $$\lim_{n \uparrow \infty} \sum_{1 \leq k \leq k_n} \int_R h_D(x) \, dF_{nk}(x + {}_DE_{nk}) = 0$$

ou, equivalentemente, se tenha

$$b) \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leqq k\leqq k_n} \int_{|x|>D} dF_{nk}(x + {}_DE_{nk}) = 0 =$$

$$= \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leqq k\leqq k_n} \int_{|x|\leqq D} x^2\, dF_{nk}(x + {}_DE_{nk}),$$

onde

$${}_DE_{nk} = \int_{|x|\leqq D} x\, dF_{nk}(x).$$

As constantes da lei podem escolher-se de acordo com a fórmula

$$c) \qquad S_n = \sum_{1\leqq k\leqq k_n} \left[{}_DE_{nk} + \int_{|x|\leqq D} x\, dF_{nk}(x + {}_DE_{nk}) \right].$$

Se a condição *a*) ou *b*) se verifica para um certo número positivo D ela verifica-se para todos os números positivos.»

Citamos VIII porque os autores usam centrar as variáveis X_{nk} em medianas (ver III) ou, na hipótese da infinitesimalidade, em esperanças matemáticas truncadas.

Como $D \geqq 1$ implica, para todo o x real,

$$x^2/(1+x^2) \leqq h_D(x) \leqq (D^2+1)\, x^2/(1+x^2)$$

e como $D \leqq 1$ implica, também para todo o x real,

$$D^2 x^2/(1+x^2) \leqq h_D(x) \leqq 2\, x^2/(1+x^2)$$

podemos dar ao teorema VII outra forma, por vezes mais prática do que a primitiva:

VII') «Para que as variáveis casuais X_{nk}, independentes por linhas, obedeçam à lei dos grandes números é condição necessária e suficiente que se tenha

$$a) \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leqq k\leqq k_n} \int_R \frac{x^2}{1+x^2}\, dF_{nk}(x + A_{nk}) = 0,$$

para alguma sucessão dupla de constantes assintóticas A_{nk} das variáveis X_{nk}, sujeita à restrição seguinte: Existe um par fixo de números γ' e γ'', com $0<\gamma'\leqq\gamma''<1$, tais que se verifica, para todo o n suficientemente grande e uniformemente em k,

b) $$\chi_{nk}^{(\gamma')} - \eta'_{nk} \leqq A_{nk} \leqq \chi_{nk}^{(\gamma'')} + \eta''_{nk}\,,$$

onde η'_{nk} e η''_{nk} são números positivos que satisfazem a

$$\lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leqq k\leqq k_n} \eta'^{2}_{nk} = \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leqq k\leqq k_n} \eta''^{2}_{nk} = 0\,.$$

Em particular, pode pôr-se $A_{nk}=\chi_{nk}^{(\gamma)}$, com $0<\gamma<1$.

As constantes da lei podem escolher-se de acordo com a fórmula

c) $$S_n = \sum_{1\leqq k\leqq k_n} \left[A_{nk} + \int_{|x|\leqq D} x\, dF_{nk}(x+A_{nk}) \right],$$

onde D significa un número positivo arbitrário.

Se a condição a) se verifica para uma certa sucessão de constantes assintóticas sujeitas a b) ela verifica-se para qualquer sucessão de constantes assintóticas que se encontram nas mesmas circunstâncias.»

Do mesmo modo que se passa de VII para VII' também se passa de VIII para

VIII') «Para que as variáveis casuais *infinitesimais* X_{nk}, independentes por linhas, obedeçam à lei dos grandes números é condição necessária e suficiente que exista um número positivo D tal que se tenha

a) $$\lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leqq k\leqq k_n} \int_R \frac{x^2}{1+x^2}\, dF_{nk}(x + {}_{D}E_{nk}) = 0.$$

As constantes da lei podem escolher-se de acordo com a fórmula c) de VIII.

Se a condição a) se verifica para um certo número positivo D ela verifica-se para todos os números positivos.»

Observação: Se quizermos que $\sum_k X_{nk} \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$ quando $n \uparrow \infty$ a condição necessária e suficiente de VII ou VII' vem acrescida da relação

$$\lim_{n \uparrow \infty} \sum_{1 \leqq k \leqq k_n} \left[A_{nk} + \int_{|x| \leqq D} x \, dF_{nk}(x + A_{nk}) \right] = 0 \qquad \text{(ver I' de § 6).}$$

Anàlogamente a condição necessária e suficiente de VIII ou VIII' vem acrescida da relação

$$\lim_{n \uparrow \infty} \sum_{1 \leqq k \leqq k_n} \left[{}_D E_{nk} + \int_{|x| \leqq D} x \, dF_{nk}(x + {}_D E_{nk}) \right] = 0 .$$

* * *

Retomemos mais uma vez a demonstração da primeira parte de III, substituamos aí as medianas χ_{nk} por constantes assintóticas *quaisquer* A_{nk} (relativas às variáveis X_{nk}) e acompanhemos o desenvolvimento até ao fim da fórmula 6).

Sendo

$$V(X^*_{nk}) = E[(\tilde{X}'_{nk} - E(\tilde{X}'_{nk}))^2] = E(\tilde{X}'^2_{nk}) - E^2(\tilde{X}'_{nk}) =$$

$$= \int_{|x| \leqq D} x^2 \, dF_{nk}(x + A_{nk}) - \left[\int_{|x| \leqq D} x \, dF_{nk}(x + A_{nk}) \right]^2$$

a variância da variável $X_{nk} - A_{nk}$ truncada pelo intervalo fechado de $-D$ a $+D$ ou, em linguagem mais simples, *a variância de $X_{nk} - A_{nk}$ truncada em $\pm D$*, sai, com $\varepsilon > 0$ qualquer e

$$S_n = \sum_k \left[A_{nk} + \int_{|x| \leqq D} x \, dF_{nk}(x + A_{nk}) \right],$$

$$\text{7 bis)} \quad \varepsilon^2 \cdot \mathrm{P}(|\sum_k X_{nk} - S_n| \geqq \varepsilon) \leqq \sum_k \left\{ \varepsilon^2 \cdot \int_{|x| > D} dF_{nk}(x + A_{nk}) + \right.$$

$$\left. + \int_{|x| \leqq D} x^2 \, dF_{nk}(x + A_{nk}) - \left[\int_{|x| \leqq D} x \, dF_{nk}(x + A_{nk}) \right]^2 \right\}.$$

Então uma condição suficiente para que se verifique a lei dos grandes números é que exista um número positivo D tal que se tenha

$$\lim_{n\uparrow\infty} \sum_k \int_{|x|>D} dF_{nk}(x+A_{nk}) = 0 =$$

$$= \lim_{n\uparrow\infty} \sum_k \left\{ \int_{|x|\leq D} x^2\, dF_{nk}(x+A_{nk}) - \left[\int_{|x|\leq D} x\, dF_{nk}(x+A_{nk}) \right]^2 \right\},$$

podendo escolher-se as constantes da lei de acordo com a fórmula

$$S_n = \sum_k \left[A_{nk} + \int_{|x|\leq D} x\, dF_{nk}(x+A_{nk}) \right].\ (*)$$

Vamos provar agora que a condição referida é também necessária.

Suponhamos então que as variáveis X_{nk} obedecem à lei dos grandes números e que as constantes assintóticas A_{nk} são tais que se tem, para todo o n suficientemente grande e uniformemente em k, $\chi_{nk}^{(\gamma')} - \zeta'_{nk} = A_{nk} < \chi_{nk}^{(\gamma')}$.

A primeira parte do raciocínio feito logo a seguir a VI pode reproduzir-se sem alteração e conclui-se da mesma forma que $\lim\limits_{n\uparrow\infty} \sum\limits_k \int_{|x|>D} dF_{nk}(x+A_{nk}) = 0$, com $D>0$ arbitrário.

Posto isso representemos por Δ_{nk} a região $|y+\zeta'_{nk}| \leq D$ e por $F_{nk}^{(\gamma')}(y)$ a função de distribuição $F_{nk}(y+\chi_{nk}^{(\gamma')})$. Então, para n suficientemente grande,

$$\sum_k \left\{ \int_{|x|\leq D} x^2\, dF_{nk}(x+A_{nk}) - \left[\int_{|x|\leq D} x\, dF_{nk}(x+A_{nk}) \right]^2 \right\} =$$

$$= \sum_k \left\{ \int_{\Delta_{nk}} y^2\, dF_{nk}^{(\gamma')}(y) - \left[\int_{\Delta_{nk}} y\, dF_{nk}^{(\gamma')}(y) \right]^2 + \right.$$

(*) Até esta altura da demonstração não nos servimos da propriedade das constantes A_{nk} de serem assintóticas.

$$+ 2\,\zeta'_{nk} \cdot \int_{\Delta_{nk}} y\, dF_{nk}^{(\Upsilon')}(y) \cdot \left[1 - \int_{\Delta_{nk}} dF_{nk}^{(\Upsilon')}(y)\right] +$$

$$+ \zeta'^{2}_{nk} \cdot \int_{\Delta_{nk}} dF_{nk}^{(\Upsilon')}(y) \cdot \left[1 - \int_{\Delta_{nk}} dF_{nk}^{(\Upsilon')}(y)\right]\right\} \leqq$$

$$\leqq \sum_k \left\{ \int_{\Delta_{nk}} y^2\, dF_{nk}^{(\Upsilon')}(y) - \left[\int_{\Delta_{nk}} y\, dF_{nk}^{(\Upsilon')}(y)\right]^2 \right\} +$$

$$+ 2\,\eta \cdot \sup_k \int_{|y| \leqq 2D} |y|\, dF_{nk}^{(\Upsilon')}(y) \cdot \sum_k \int_{|y| > D/2} dF_{nk}^{(\Upsilon')}(y) +$$

$$+ \eta^2 \cdot \sum_k \int_{|y| > D/2} dF_{nk}^{(\Upsilon')}(y), \text{ com } \eta > 0 \text{ arbitràriamente pequeno.}^{(*)}$$

No último membro da desigualdade anterior o somatório dos integrais de y^2 não excede $\sum_k \int_{|y| \leqq 2D} y^2\, dF_{nk}(y + \chi_{nk}^{(\Upsilon')}) \longrightarrow 0$ (VII), o somatório dos integrais da unidade também tende para zero (mais uma vez VII) e o mesmo se diz do supremo dos integrais de $|y|$ (V' de § 4).

Concluimos que a hipótese $\chi_{nk}^{(\Upsilon')} - \zeta'_{nk} = A_{nk} < \chi_{nk}^{(\Upsilon')}$ implica

$$\lim_{n \uparrow \infty} \sum_k \left\{ \int_{|x| \leqq D} x^2\, dF_{nk}(x + A_{nk}) - \left[\int_{|x| \leqq D} x\, dF_{nk}(x + A_{nk})\right]^2 \right\} = 0.$$

A última relação também é verdadeira quando $\chi_{nk}^{(\Upsilon'')} < A_{nk} = \chi_{nk}^{(\Upsilon'')} + \zeta''_{nk}$ (raciocínio semelhante) e quando $\chi_{nk}^{(\Upsilon')} \leqq A_{nk} \leqq \chi_{nk}^{(\Upsilon'')}$ (consequência de VII). Podemos sobrepor os diversos casos conforme fizemos na demonstração de VII; concluimos então que a mesma relação é verdadeira para *quaisquer* constantes assintóticas.

O que precede e a observação feita a seguir a VIII' habilitam-nos a enunciar uma proposição a que podemos chamar **teorema fundamental** *relativo à lei dos grandes números:*

(*) Para o raciocínio a estabelecer bastava que η fosse limitado.

IX) «Para que a variáveis casuais X_{nk}, independentes por linhas, obedeçam à lei dos grandes números é condição necessária e suficiente que exista um número positivo D tal que se tenha

$$a) \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq k_n} \int_{|x|>D} dF_{nk}(x+A_{nk}) = 0 =$$

$$= \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq k_n} \left\{ \int_{|x|\leq D} x^2\, dF_{nk}(x+A_{nk}) - \right.$$

$$\left. - \left[\int_{|x|\leq D} x\, dF_{nk}(x+A_{nk}) \right]^2 \right\},$$

para alguma sucessão dupla de constantes assintóticas A_{nk} das variáveis X_{nk}.

Se a condição $a)$ se verifica para um certo número positivo D e para uma certa sucessão de constantes assintóticas A_{nk} a mesma condição verifica-se para qualquer número positivo e para qualquer sucessão de constantes assintóticas.

As constantes da lei podem escolher-se de acordo com a fórmula

$$b) \qquad S_n = \sum_{1\leq k\leq k_n} \left[A_{nk} + \int_{|x|\leq D} x\, dF_{nk}(x+A_{nk}) \right].$$

Se quisermos que $\sum\limits_{1\leq k\leq k_n} X_{nk} \xrightarrow{P} 0$ quando $n\uparrow\infty$ a condição necessária e suficiente é ainda $a)$ e mais a relação

$$\lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq k_n} \left[A_{nk} + \int_{|x|\leq D} x\, dF_{nk}(x+A_{nk}) \right] = 0.»$$

O exemplo 2.º da página 47 mostra que o teorema VII não tem generalidade suficiente para abranger todas as sucessões (duplas) de constantes assintóticas. Por isso o teorema IX tem real interesse.

Pois bem, atendendo a I e II de § 5 e pondo $A_{nk}\equiv 0$ no teorema fundamental, obtem-se uma proposição frequentemente citada:

X) «Para que as variáveis casuais X_{nk}, independentes por linhas, sejam (fortemente) infinitesimais e obedeçam à lei dos grandes números é condição necessária e suficiente que se verifique, para *todo* o número positivo ε e para algum número positivo D, a condição

a)
$$\lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leqq k\leqq k_n} \int_{|x|>\varepsilon} dF_{nk}(x) = 0 =$$

$$= \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leqq k\leqq k_n} \left\{ \int_{|x|\leqq D} x^2\, dF_{nk}(x) - \left[\int_{|x|\leqq D} x\, dF_{nk}(x) \right]^2 \right\}.$$

Se a condição *a)* se verifica para um certo número positivo D ela verifica-se para todo o número positivo.

As constantes da lei podem escolher-se de acordo com a fórmula

b)
$$S_n = \sum_{1\leqq k\leqq k_n} \int_{|x|\leqq D} x\, dF_{nk}(x).$$

Se quizermos que $\sum\limits_{1\leqq k\leqq k_n} X_{nk} \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$ quando $n\uparrow\infty$ a condição necessária e suficiente é ainda *a)* e mais a relação

$$\lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leqq k\leqq k_n} \int_{|x|\leqq D} x\, dF_{nk}(x) = 0.\text{»}$$

É indispensável que a condição *a)* de X se verifique para *todo* o número $\varepsilon>0$. Vejamos um *exemplo*: Tome-se $F_{nk}(x)=0$ ou 1, conforme $x\leqq 1+1/(n+k)$ ou $x>1+1/(n+k)$. Então as grandezas $A_{nk} = 1 + 1/(n+k)$ são constantes assintóticas; como $\sup\limits_k |A_{nk}| \to 1$ quando $n\uparrow\infty$ não há infinitesimalidade (I' de § 4). Todavia, *a)* de X verifica-se para $D=\varepsilon=2$ e temos a lei dos grandes números, com $S_n = \sum\limits_k [1+1/(n+k)]$. Este resultado está de acordo com as notas das páginas 52 e 53.

Se a variável X_{nk} tem esperança matemática, seja E_{nk}, é uso chamar *desvio* de X_{nk} à diferença $X_{nk}-E_{nk}$. É óbvio que as variáveis X_{nk} admitem as constantes assintóticas (fortes) E_{nk} quando e só quando os seus desvios são (fortemente) infinitesimais. Daí um corolário de X, a saber:

X') «Para que as variáveis casuais X_{nk}, independentes por linhas e dotadas de esperanças matemáticas E_{nk}, tenham desvios (fortemente) infinitesimais e obedeçam à lei dos grandes números é condição necessária e suficiente que se verifique, para *todo* o número positivo ε e para algum número positivo D, a relação

$$a)\qquad \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq k_n} \int_{|x|>\varepsilon} dF_{nk}(x+E_{nk}) = 0 =$$

$$= \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq k_n} \left\{ \int_{|x|\leq D} x^2\, dF_{nk}(x+E_{nk}) - \left[\int_{|x|\leq D} x\, dF_{nk}(x+E_{nk}) \right]^2 \right\}.$$

Se a condição $a)$ se verifica para um certo número positivo D ela verifica-se para todos os números positivos.

As constantes da lei podem escolher-se de acordo com a fórmula

$$b)\qquad S_n = \sum_{1\leq k\leq k_n} \left[E_{nk} + \int_{|x|\leq D} x\, dF_{nk}(x+E_{nk}) \right].$$

Se quizermos que $\sum\limits_{1\leq k\leq k_n} X_{nk} \xrightarrow{P} 0$ quando $n\uparrow\infty$ a condição necessária e suficiente é ainda $a)$ e mais a relação

$$\lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq k_n} \left[E_{nk} + \int_{|x|\leq D} x\, dF_{nk}(x+E_{nk}) \right] = 0.»$$

Se a variável X_{nk} tem variância, seja V_{nk}, ela tem esperança matemática E_{nk}. Como, para qualquer número positivo ε,

$$V_{nk} = \int_R x^2\, dF_{nk}(x+E_{nk}) \geq \varepsilon^2 \cdot \int_{|x|>\varepsilon} dF_{nk}(x+E_{nk}) +$$

$$+ \int_{|x|\leq\varepsilon} x^2\, dF_{nk}(x+E_{nk}) - \left[\int_{|x|\leq\varepsilon} x\, dF_{nk}(x+E_{nk}) \right]^2$$

tiramos de X$'$ um novo corolário, a saber:

X$''$) «Para que as variáveis casuais X_{nk}, independentes por linhas e dotadas de variâncias V_{nk}, tenham desvios (fortemente) infinitesimais, obedeçam à lei dos grandes números e sejam tais que $\lim\limits_{n\uparrow\infty} \sum\limits_{1\leq k\leq k_n} V_{nk} = 0$ é condição necessária e suficiente que se verifique a relação

a) $$\lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leqq k\leqq k_n} \int_R x^2\, dF_{nk}(x+E_{nk}) = 0\,.$$

As constantes da lei podem escolher-se de acordo com a fórmula *b*) de X′ (D um número positivo arbitrário).»

Deve notar-se que zero é a variância da lei unitária, para efeitos de enquadramento futuro de X″ em teoremas de convergência para leis limites que não são necessàriamente unitárias.

§ 8) Casos particulares da lei dos grandes números

Procuremos agora aproximar-nos dos resultados clássicos relativos à lei dos grandes números, particularizando para este efeito os resultados gerais atrás obtidos.

Nesta ordem de ideias consideremos a sucessão $\{B_n\}$ de números positivos e a sucessão $\{X_n\}$ de variáveis casuais independentes, representemos por $\chi_n^{(\gamma)}$ um quantil da ordem γ de X_n e designemos por $F_n(x)$ a função de distribuição desta variável.

Posto isso, façamos $X_{nk} = X_k / B_n$, $A_{nk} = A_k / B_n$ e $k_n = n$. Então a função de distribuição da variável $X_{nk} - A_{nk} = (X_k - A_k) / B_n$ satisfaz à relação $F_{nk}(x + A_{nk}) = F_k(B_n x + A_k)$ [A, 5) de § 5] e 3′) de § 4 mostra que $\chi_k^{(\gamma)} = \chi_{nk}^{(\gamma)} \cdot B_n\, (0 < \gamma < 1)$ de modo que as variáveis X_k / B_n, supostas assintòticamente constantes, admitem as grandezas $\chi_k^{(\gamma)} / B_n$ como constantes assintóticas da forma A_k / B_n (III de § 4). Pois bem, se substituirmos $B_n x$ por x (e portanto x por x / B_n) o teorema fundamental de § 7 toma o aspecto seguinte:

I) «Dado o par constituido pela sucessão de números positivos B_n e pela sucessão de variáveis casuais independentes X_n, a condição necessária e suficiente para que as variáveis casuais X_k / B_n, com $1 \leqq k \leqq n$, obedeçam à lei dos grandes números — isto é, para que haja constantes S_n tais que seja, para todo o $\varepsilon > 0$, $\lim_{n\uparrow\infty} \mathsf{P}(|\sum_{1\leqq k\leqq n} X_k / B_n - S_n| \geqq \varepsilon) = 0$ — é que exista um número positivo D tal que se verifique

$$a) \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq n} \int_{|x|>DB_n} dF_k(x+A_k)=0=$$

$$=\lim_{n\uparrow\infty}\left((1/B_n^2)\cdot\sum_{1\leq k\leq n}\left\{\int_{|x|\leq DB_n} x^2\,dF_k(x+A_k)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left[\int_{|x|\leq DB_n} x\,dF_k(x+A_k)\right]^2\right\}\right),$$

para alguma sucessão (dupla) de constantes assintóticas A_k/B_n das variáveis X_k/B_n.

Se a condição $a)$ se verifica para um certo número positivo D e para uma certa sucessão de constantes assintóticas A_k/B_n a mesma condição verifica-se para qualquer número positivo e para qualquer sucessão de constantes assintóticas da forma mencionada.

As constantes da lei dos grandes números podem escolher-se de acordo com a fórmula

$$b) \qquad S_n=(1/B_n)\cdot\sum_{1\leq k\leq n}\left[A_k+\int_{|x|\leq DB_n} x\,dF_k(x+A_k)\right].$$

Se quizermos que $\sum_{1\leq k\leq n} X_k/B_n \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$ quando $n\uparrow\infty$ a condição necessária e suficiente é ainda $a)$ e mais a relação

$$\lim_{n\uparrow\infty}\left\{(1/B_n)\cdot\sum_{1\leq k\leq n}\left[A_k+\int_{|x|\leq DB_n} x\,dF_k(x+A_k)\right]\right\}=0\,.»$$

Seja ε um número positivo dado e suponha-se que $B_n\uparrow\infty$. Como a região onde $|X_m/B_m|>\varepsilon$ ou, equivalentemente, onde $|\sum_{1\leq k\leq m} X_k/B_m-(B_{m-1}/B_m)\cdot\sum_{1\leq k\leq m-1} X_k/B_{m-1}|>\varepsilon$ está contida na união das duas regiões onde $|\sum_{1\leq k\leq m} X_k/B_m|>\varepsilon/3$ e onde $|(B_{m-1}/B_m)\cdot\sum_{1\leq k\leq m-1} X_k/B_{m-1}|>\varepsilon/3$, esta última contida na região onde $|\sum_{1\leq k\leq m-1} X_k/B_{m-1}|>\varepsilon/3$, sai $\mathsf{P}(|X_m/B_m|>\varepsilon)\leq$ $\leq\mathsf{P}(|\sum_{1\leq k\leq m} X_k/B_m|>\varepsilon/3)+\mathsf{P}(|\sum_{1\leq k\leq m-1} X_k/B_{m-1}|>\varepsilon/3)$.

Então, dado $\delta > 0$, $\sum_{1 \leq k \leq n} X_k / B_n \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$ quando $n \uparrow \infty$ implica a relação

$$\mathsf{P}(|X_m / B_m| > \varepsilon) < \delta, \text{ para } m \geq m_0 = m_0(\varepsilon, \delta).$$

Esta, por seu turno, implica a relação

$$\mathsf{P}(|X_m / B_n| > \varepsilon) < \delta, \text{ para } m_0 \leq m \leq n, \text{ com } n \text{ arbitrário.}$$

Doutro lado tem-se, sendo m fixo e tal que $1 \leq m < m_0$,

$$\int_{|x| > \varepsilon B_n} dF_m(x) = \mathsf{P}(|X_m / B_n| > \varepsilon) < \delta, \text{ para } n \geq n_m = n_m(\varepsilon, \delta).$$

Pondo agora $N = \sup(m_0, \sup_{1 \leq m \leq m_0 - 1} n_m)$, sai

$$\sup_{1 \leq m \leq n} \mathsf{P}(|X_m / B_n| > \varepsilon) \leq \delta, \text{ para } n \geq N,$$

o que equivale a afirmar que as variáveis X_k / B_n são infinitesimais (ver 1) de § 4 e a observação a seguir a 2) de § 4).

Acabamos de ver o seguinte: Se a sucessão de números positivos $B_n \uparrow \infty$ e se as variáveis casuais independentes X_k são tais que $\sum_{1 \leq k \leq n} X_k / B_n \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$ quando $n \uparrow \infty$, então as variáveis X_k / B_n saem infinitesimais. Daqui e de I tiramos a proposição seguinte (ver também a nota da pág. 52):

II) «Dado o par constituido pela sucessão de números positivos $B_n \uparrow \infty$ e pela sucessão de variáveis casuais independentes X_n, a condição necessária e suficiente para que as variáveis casuais X_k / B_n, com $1 \leq k \leq n$, sejam (fortemente) infinitesimais e tais que $\sum_{1 \leq k \leq n} X_k / B_n \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$ quando $n \uparrow \infty$, é que exista um número positivo D para o qual se verifique a relação

a)
$$\lim_{n \uparrow \infty} \sum_{1 \leq k \leq n} \int_{|x| > D B_n} dF_k(x) =$$

$$= \lim_{n \uparrow \infty} \left[(1 / B_n) \cdot \sum_{1 \leq k \leq n} \int_{|x| \leq D B_n} x \, dF_k(x) \right] =$$

$$= \lim_{n\uparrow\infty} \left((1/B_n^2) \cdot \sum_{1\leq k\leq n} \left\{ \int_{|x|\leq DB_n} x^2\, dF_k(x) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left[\int_{|x|\leq DB_n} x\, dF_k(x) \right]^2 \right\} \right) = 0 .$$

Se a condição $a)$ se verifica para um certo número positivo D ela verifica-se para qualquer número positivo.»

II generaliza um resultado citado por LOÈVE.

Já vimos que $\chi_{nk}^{(\gamma)} = \chi_k^{(\gamma)} / B_n$. Pondo $\eta'_{nk} = \eta'_k / B_n$ e $\eta''_{nk} = \eta''_k / B_n$, a desigualdade

$$\chi_{nk}^{(\gamma')} - \eta'_{nk} \leqq A_{nk} \leqq \chi_{nk}^{(\gamma'')} + \eta''_{nk},$$

com

$$\lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq k_n} \eta'^2_{nk} = \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq k_n} \eta''^2_{nk} = 0,$$

toma o aspecto

$$\chi_k^{(\gamma')} - \eta'_k \leqq A_k \leqq \chi_k^{(\gamma'')} + \eta''_k,$$

com

$$\lim_{n\uparrow\infty} [(1/B_n^2) \cdot \sum_{1\leq k\leq n} \eta'^2_k] = \lim_{n\uparrow\infty} [(1/B_n^2) \cdot \sum_{1\leq k\leq n} \eta''^2_k] = 0 .$$

O que precede permite reformular o teorema VII' de § 7 com o aspecto seguinte:

III) «Dado o par constituido pela sucessão de números positivos B_n e pela sucessão de variáveis casuais independentes X_n, a condição necessária e suficiente para que as variáveis casuais X_k / B_n, com $1 \leqq k \leqq n$, obedeçam à lei dos grandes números é que se tenha

$$a) \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq n} \int_R \frac{x^2}{B_n^2 + x^2}\, dF_k(x + A_k) = 0 ,$$

para alguma sucessão (dupla) de constantes assintóticas A_k/B_n das variáveis X_k/B_n, sujeita à restrição seguinte: Existe um par fixo de números γ' e γ'', com $0 < \gamma' \leqq \gamma'' < 1$, tais que se verifica, para todo o n suficientemente grande e uniformemente em $k \leqq n$,

b) $$\chi_k^{(\gamma')} - \eta_k' \leqq A_k \leqq \chi_k^{(\gamma'')} + \eta_k'',$$

onde η_k' e η_k'' são números positivos que satisfazem a

$$\lim_{n \uparrow \infty} [(1/B_n^2) \cdot \sum_{1 \leqq k \leqq n} \eta_k'^2] = \lim_{n \uparrow \infty} [(1/B_n^2) \cdot \sum_{1 \leqq k \leqq n} \eta_k''^2] = 0 .$$

Em particular, pode pôr-se $A_k = \chi_k^{(\gamma)}$, com $0 < \gamma < 1$.

As constantes da lei podem escolher-se de acordo com a fórmula

c) $$S_n = (1/B_n) \cdot \sum_{1 \leqq k \leqq n} \left[A_k + \int_{|x| \leqq DB_n} x \, dF_k(x + A_k) \right],$$

onde D significa um número positivo arbitrário.

Se a condição *a)* se verifica para uma certa sucessão de constantes assintóticas A_k/B_n sujeitas a *b)* a mesma condição verifica-se para todas as sucessões de constantes assintóticas que têm a forma mencionada e se encontram sujeitas a *b)*.»

No caso particular $A_k = \chi_k^{(1/2)} = \chi_k$ o teorema III dá um resultado de Feller e no caso ainda mais particular $A_k = \chi_k$, $B_n = n$ o mesmo teorema refere pràticamente um resultado de Kolmogorov.

Observação: É claro que podíamos adaptar também o teorema VIII' de § 7 às sucessões X_k/B_n do mesmo modo que o fizemos para VII'. A este propósito convém notar que, designando por ${}_{DB_n}E_k$ a esperança matemática de X_k truncada em $\pm DB_n$, um cálculo fácil dá ${}_DE_{nk} = (1/B_n) \cdot {}_{DB_n}E_k$, para $1 \leqq k \leqq n$.

* * *

Entrando agora decididamente no campo dos estudos clássicos, passamos a supor que as variáveis X_k têm esperanças matemáticas E_k, que $B_n = n$ e que $S_n = \sum_{1 \leqq k \leqq n} E_k/n$.

Posto isso apliquemos II às variáveis $(X_k - E_k)/n$, com $1 \leqq k \leqq n$. Obtemos a proposição seguinte:

IV) «Dada a sucessão de variáveis casuais X_k, independentes e dotadas de esperanças matemáticas E_k, a condição necessária e suficiente para que as variáveis $(X_k - E_k)/n$, com $1 \leqq k \leqq n$, sejam (fortemente) infinitesimais e tais que

$$\sum_{1 \leq k \leq n} (X_k - E_k)/n \xrightarrow{P} 0 \quad \text{quando} \quad n \uparrow \infty$$

é que exista um número positivo D para o qual se verifique a relação

$$a) \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1 \leqq k \leqq n} \int_{|x| > Dn} dF_k(x + E_k) =$$

$$= \lim_{n\uparrow\infty} \left[(1/n) \cdot \sum_{1 \leqq k \leqq n} \int_{|x| \leqq Dn} x \, dF_k(x + E_k) \right] =$$

$$= \lim_{n\uparrow\infty} \left((1/n^2) \cdot \sum_{1 \leqq k \leqq n} \left\{ \int_{|x| \leqq Dn} x^2 \, dF_k(x + E_k) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left[\int_{|x| \leqq Dn} x \, dF_k(x + E_k) \right]^2 \right\} \right) = 0 .$$

Se a condição $a)$ se verifica para um certo número positivo D ela verifica-se para qualquer número positivo.»

Se fizermos $D = 1$ em IV obtemos um resultado de Kolmogorov que traduz a conclusão mais geral a que tinha chegado a teoria clássica no estudo da lei dos grandes números.

Vale a pena notar que $a)$ de IV se transforma em condição suficiente quando se suprime aí o quadrado do integral que figura como termo subtractivo do último somatório.

Admitamos agora que, dado $\delta > 0$ arbitrário, correspondem números $a(\delta) = a$ e $b(\delta) = b \geqq a$ tais que se tem

$$\sup_n \left| \int_{b<x<a} x \, dF_n(x + E_n) \right| \leqq \sup_n \int_{b<x<a} |x| \, dF_n(x + E_n) \leqq \delta ;$$

nestas circunstâncias dizemos que os desvios $X_n - E_n$ são *uniformemente integráveis*.

Sendo n suficientemente grande, sai então

$$\delta \geqq \sup_{1 \leqq k \leqq n} \int_{|x| > n} n \, dF_k(x + E_k) \geqq \sum_{1 \leqq k \leqq n} \int_{|x| > n} dF_k(x + E_k)$$

e a primeira parte de a) de IV é respeitada ($D=1$). Também

$$0=\lim_{n\uparrow\infty}\left[(1/n)\cdot\sum_k\int_{|x|>n} x\,dF_k(x+E_k)\right]$$

e a segunda parte de a) de IV é respeitada. Enfim, com $m<n$,

$$(1/n)^2\cdot\sum_k\int_{|x|\leqq n} x^2\,dF_k(x+E_k)\leqq$$

$$\leqq\sup_k\int_{|x|\leqq m}(x^2/n)\,dF_k(x+E_k)+\sup_k\int_{|x|>m}|x|\,dF_k(x+E_k);$$

como, escolhido $\delta>0$ e fixado m de modo que o último supremo não exceda $\delta/2$, o penúltimo supremo também não excede $\delta/2$, para $n\geqq n(\delta)$, resulta que a última parte de a) de IV é respeitada.(*) Concluimos que IV impõe a proposição seguinte:

V) «Se as variáveis casuais independentes $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ tiverem desvios uniformemente integráveis, então

$$\sum_{1\leqq k\leqq n}(X_k-E_k)/n\xrightarrow{P}0 \quad \text{quando} \quad n\uparrow\infty.\text{»}^{(**)}$$

A conclusão de V subsiste em particular quando as variáveis independentes X_n têm esperanças matemáticas e são idênticamente distribuidas. Este *corolário* constitui o *teorema de Khintchine.*

Suponhamos agora que as variáveis casuais X_k têm variâncias V_k. Então as variáveis $X_{nk}=X_k/n$, com $1\leqq k\leqq n$, têm variâncias $V_{nk}=V_k/n^2$.

Ora, caso as variáveis X_k-E_k tenham todas momento absoluto da ordem $\mu+1$, com $\mu\geqq 0$, podemos escrever:

$$\sum_k\int_R|x/n|^{\mu+1}\,dF_k(x+E_k)\geqq\sum_k\int_{|x|>n}|x/n|\,dF_k(x+E_k)\geqq$$

$$\geqq\left|\sum_k\int_{|x|>n}(x/n)\,dF_k(x+E_k)\right|=\left|(1/n)\cdot\sum_k\int_{|x|\leqq n}x\,dF_k(x+E_k)\right|.$$

(*) A integrabilidade uniforme dos desvios confere limite nulo à parte subtractiva de a) de IV.

(**) Para estabelecer V bastava tomar supremos em $1\leqslant k\leqslant n$ e pedir $\sup(|a|,|b|)=\mathbf{o}(n^u)$, com $0\leqslant u<1/2$. Depois $m=n^v$, com $u<v<1/2$.

Pondo agora $\mu = 1$ e tendo em vista X'' de § 7, inferimos a proposição seguinte:

VI) «Dada a sucessão de variáveis casuais X_k, independentes e dotadas de variâncias V_k (e portanto de esperanças matemáticas E_k), a condição necessária e suficiente para que

$$(1/n) \cdot \sum_{1 \leq k \leq n} (X_k - E_k) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0 \quad \text{quando } n \uparrow \infty,$$

as variáveis $(X_k - E_k)/n$ sejam (fortemente) infinitesimais

$$\text{e simultaneamente } \lim_{n \uparrow \infty} [(1/n^2) \cdot \sum_{1 \leq k \leq n} V_k] = 0$$

é que se verifique a relação

$$a) \qquad \lim_{n \uparrow \infty} \left[(1/n^2) \cdot \sum_{1 \leq k \leq n} \int_R x^2 \, dF_k(x + E_k) \right] = 0.\text{»} \ (*)$$

A parte de VI que afirma que $a)$ é uma condição suficiente para que $(1/n) \cdot \sum_{1 \leq k \leq n} (X_k - E_k) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$ quando $n \uparrow \infty$ é relativamente antiga e constitui o chamado *teorema de Markov-Tchebichev*.

É óbvio que $a)$ se verifica e portanto se tem uma condição suficiente quando $\sup_k V_k = o(n)$ e, em particular, quando $\sup_{1 \leq n < \infty} V_n < +\infty$. No caso particular obtém-se então o chamado *teorema de Tchebichev* como corolário de VI.

(*) Pode apresentar-se uma demonstração diferente de VI.

Entre 5) e 6) de § 7 vimos o seguinte: Dados um número $\varepsilon > 0$ e uma variável casual X de variância V e de esperança matemática E, tem-se

$$1) \qquad \mathsf{P}(|X - E| \geq \varepsilon) \leq V/\varepsilon^2,$$

um resultado conhecido pelo nome de *desigualdade de Tchebichev*.

De 1) tira-se a desigualdade

$$\mathsf{P}(|\sum_k (X_k - E_k)/n| \geq \varepsilon) \leq \sum_k V_k/(n^2 \varepsilon^2).$$

Daí e de X'' de § 7 inferimos também a proposição VI.

Exemplo: Suponhamos que cada variável X_k pode tomar apenas os dois valores 0 e 1, o primeiro com probabilidade $q_k = 1 - p_k$ e o outro com probabilidade p_k; então $E_k = p_k$ e $V_k = p_k - p_k^2 \leqq 1/4$ [A, exemplo 2.º de § 8]. Pode aplicar-se o teorema de TCHEBICHEV e conclui-se que

$$(1/n) \cdot \sum_{1 \leqq k \leqq n} (X_k - p_k) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0 \quad \text{quando} \quad n \uparrow \infty,$$

afirmação esta que equivale ao vetusto *teorema de Poisson*. Em particular, quando p_k não depende de k obtém-se o antiquíssimo *teorema de Bernoulli*.

Suponhamos finalmente que as variáveis casuais X_k têm segundos momentos $E(X_k^2)$. Então, atendendo à parte final de § 4 de A, tiramos um corolário de VI, a saber:

VI′) «Dada a sucessão de variáveis casuais X_k, independentes e dotadas de segundos momentos (e portanto de esperanças matemáticas E_k), tem-se

$$(1/n) \cdot \sum_{1 \leqq k \leqq n} (X_k - E_k) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0 \quad \text{quando} \quad n \uparrow \infty$$

todas as vezes que

$$\lim_{n \uparrow \infty} \left[(1/n^2) \cdot \sum_{1 \leqq k \leqq n} \int_R x^2 \, dF_k(x) \right] = 0.\text{»}$$

É óbvio que a condição suficiente de VI′ se verifica quando $\sup_k E(X_k^2) = o(n)$ e, em particular, quando $\sup_{1 \leqq n < \infty} E(X_n^2) < +\infty$.

É de notar que $\mathsf{P}(|X_n| > L_n) = 0$, onde L_n é crescente e $o(n^{1/2})$, implica $\sup_k E(X_k^2) \leqq L_n^2 = o(n)$. Em particular, pode tomar-se L_n constante (USPENSKY).

* * *

Em seguida vamos procurar generalizar VI′ para momentos que não são necessàriamente da ordem 2.

Afim de desembaraçar o caminho começamos por empreender considerações preliminares que não deixam de ter o seu interesse próprio.

Sejam $x_1, x_2, \ldots x_l$ os valores (distintos) possíveis duma variável casual X simples e sejam $p_1, p_2, \ldots p_l$ as probabilidades correspondentes, isto é, as amplitudes dos saltos correspondentes da função de distribuição de X. O momento absoluto da ordem (não-negativa) s de X é então dado pela expressão $M_s = \sum_{1 \leqq k \leqq l} p_k \, |x_k|^s$, com a convenção $|x_k|^0 = 1$, mesmo que se tenha $x_k = 0$.

Sejam $s_1, s_2, \ldots$ números não-negativos arbitrários. Tem-se, pela desigualdade elementar de CAUCHY,

$$M^2_{(s_1+s_2)/2} = [\sum_k (p_k \, |x_k|^{s_1})^{1/2} \cdot (p_k \, |x_k|^{s_2})^{1/2}]^2 \leqq$$
$$\leqq \sum_k p_k \, |x_k|^{s_1} \cdot \sum_k p_k \, |x_k|^{s_2} = M_{s_1} \cdot M_{s_2}.$$

Depois, supondo que m é natural e que se verifica

$$M^{2^{m-1}}_{(s_1+s_2+\cdots+s_{2^{m-1}})/2^{m-1}} \leqq M_{s_1} \cdot M_{s_2} \cdots M_{s_{2^{m-1}}},$$

resulta

$$M^{2^m}_{(s_1+s_2+\cdots+s_{2^m})/2^m} \leqq M^{2^{m-1}}_{(s_1+s_2+\cdots+s_{2^{m-1}})/2^{m-1}} \cdot$$
$$\cdot M^{2^{m-1}}_{(s_{2^{m-1}+1}+s_{2^{m-1}+2}+\cdots+s_{2^m})/2^{m-1}} \leqq M_{s_1} \cdot M_{s_2} \cdots M_{s_{2^m}}.$$

Finalmente, se p for um número natural que não seja potência perfeita de 2 escolha-se m por forma que $2^{m-1} < p < 2^m$ e ponha-se $s_{p+1} = s_{p+2} = \cdots = s_{2^m} = (s_1+s_2+\cdots+s_p)/p = s$; então $(s_1+s_2+\cdots+s_{2^m})/2^m = [ps+(2^m-p)s]/2^m = s$ e sai $M_s^{2^m} \leqq M_{s_1} \cdot M_{s_2} \cdots M_{s_p} \cdot M_s^{2^m-p}$.

Concluimos que ocorre a desigualdade seguinte, válida para todo o número natural p,

2) $$M^p_{(s_1+s_2+\cdots+s_p)/p} \leqq M_{s_1} \cdot M_{s_2} \cdots M_{s_p}.$$

Se a, b e c forem números inteiros tais que $a > b > c \geqq 0$ ponha-se $a-c=p$, $s_1 = s_2 = \cdots = s_{a-b} = c$ e $s_{a-b+1} = s_{a-b+2} = \cdots = s_{a-c} = a$; sai $(s_1+s_2+\cdots+s_p)/p = [(a-b)c+(b-c)a]/(a-c) = b$ e 2) toma o aspecto seguinte:

3) $$M_b^{a-c} \leqq M_c^{a-b} \cdot M_a^{b-c}.$$

É fácil de ver que 3) subsiste na hipótese um pouco mais geral $a \geqq b \geqq c \geqq 0$.

Se a, b e c forem números racionais não todos inteiros tais que $a \geqq b \geqq c \geqq 0$ faça-se $a = a'/d$, $b = b'/d$ e $c = c'/d$, onde as fracções se supõem de termos inteiros e não-negativos. Pois bem, aplicando 3) à variável $|X|^{1/d}$ e aos expoentes a', b' e c', obtemos a desigualdade

$$3') \quad [\sum_k p_k (|x_k|^{1/d})^{b'}]^{a'-c'} \leqq [\sum_k p_k (|x_k|^{1/d})^{c'}]^{a'-b'} \cdot [\sum_k p_k (|x_k|^{1/d})^{a'}]^{b'-c'}.$$

Se elevarmos ambos os membros de 3') ao expoente $1/d$ reproduzimos 3).

Caso um dos números a, b e c seja irracional substitui-mo-lo em 3) por números racionais convergentes para ele, por um de cada vez, e fazemos uma passagem ao limite.

Concluimos que a fórmula 3) é válida para todos os números a, b e c tais que $a \geqq b \geqq c \geqq 0$.

Procuremos agora libertar-nos da restrição que $|X|$ é uma variável casual simples. Para esse efeito suponha-se X qualquer e considere-se uma sucessão não-decrescente de variáveis casuais simples $|X_i|$ convergente para $|X|$ [A, III de § 3]. Então, seja qual for $s \geqq 0$, a sucessão de variáveis casuais simples $|X_i|^s$ é não-decrescente e converge para $|X|^s$. Supondo que existe $E(|X|^s)$, resulta $E(|X_i|^s) \uparrow E(|X|^s)$ [A, II de § 4] de modo que podemos passar em 3) de variáveis simples para variáveis quaisquer providas dos momentos necessários.

Do que precede e de A, IV e VI de § 4, inferimos uma proposição auxiliar devida a *Liapounov:*

VII) «Se a, b e c são números tais que $a \geqq b \geqq c \geqq 0$ e se a variável casual X tem momento da ordem a, então verifica-se a desigualdade

$$4) \qquad [E(|X|^b)]^{a-c} \leqq [E(|X|^c)]^{a-b} \cdot [E(|X|^a)]^{b-c}.»$$

A fórmula 4) é conhecida pelo nome de *desigualdade de Liapounov.*

Pondo $c=0$ em VII, sai, para $a \geqq b > 0$, $[E(|X|^b)]^{1/b} \leqq$ $\leqq [E(|X|^a)]^{1/a}$. Podemos enunciar o corolário seguinte:

VII') «Se a variável casual X tem momento da ordem positiva a, então $[E(|X|^\alpha)]^{1/\alpha}$ é uma função não-decrescente de α no intervalo $0 < \alpha \leqq a$.»

Sucede que, sendo y uma variável positiva e β um número maior que 1, a função y^β tem primeira derivada crescente e portanto é função convexa no intervalo $|b| \leqq y \leqq |a|$. Logo

$$[(|a|+|b|)/2]^\beta \leqq (1/2)\cdot(|a|^\beta+|b|^\beta)$$

ou

$$|a-b|^\beta \leqq 2^{\beta-1}\cdot(|a|^\beta+|b|^\beta).$$

Se substituirmos a por uma variável casual X dotada de momento da ordem β e b pela esperança matemática de X, seja $E(X)$, e se depois aplicarmos esperanças matemáticas a ambos os membros da última desigualdade resulta [ver A, 9), 12'), I e 13) de § 4]

5) $$E[|X-E(X)|^\beta] \leqq 2^{\beta-1}\cdot[E(|X|^\beta)+|E(X)|^\beta], \quad \text{para } \beta>1.$$

Por causa de A, V de § 4, e por causa de VII', tem-se

6) $$|E(X)| \leqq E(|X|) \leqq [E(|X|^\beta)]^{1/\beta}, \quad \text{para } \beta>1.$$

De 5) e 6) tiramos a desigualdade

7) $$E[|X-E(X)|^\beta] \leqq 2^\beta\cdot E(|X|^\beta), \quad \text{para } \beta>1.$$

Posto isso, tornemos a considerar a sucessão de variáveis casuais independentes X_k e suponhamos que todos os seus termos admitem momento absoluto da ordem $1+\delta$, onde $\delta>0$ é um número fixo. Então existe $E_k=E(X_k)$, a esperança matemática de X_k, para todo o k [A, VI e IV de § 4].

Na hipótese $\sum_{1\leqq k\leqq n} E(|X_k|^{1+\delta})=o(n^{1+\delta})$, tiramos de 7) a relação

$$\sum_{1 \leq k \leq n} E[|X_k - E(X_k)|^{1+\delta}] = o(n^{1+\delta})$$

e portanto obtemos

$$\sum_{1 \leq k \leq n} \int_R |x/n|^{1+\delta} \, dF_k(x+E_k) \longrightarrow 0 \text{ quando } n \uparrow \infty .$$

Como $|x/n| > 1$, para $|x| > n$, resulta que a primeira parte de a) de IV é respeitada ($D = 1$).

Doutro lado, as desigualdades que figuram na demonstração de VI provam que a segunda parte de a) de IV é igualmente respeitada.

Admitamos finalmente que $\delta \leqq 1$. Então, se $|x| \leqq n$, sai

$$|x|^{\delta-1} \geqq n^{\delta-1} \text{ ou } (|x|/n)^{1+\delta} \geqq (|x|/n)^2$$

de modo que também a terceira parte de a) de IV é respeitada.

O que precede habilita-nos a citar a proposição seguinte:

VIII) «Se a sucessão de variáveis casuais X_k, independentes e dotadas de momentos absolutos da ordem $1+\delta$, com $0 < \delta \leqq 1$, (e portanto dotadas de esperanças matemáticas E_k,) for tal que

$$\lim_{n \uparrow \infty} \sum_{1 \leq k \leq n} \int_R |x/n|^{1+\delta} \, dF_k(x) = 0,$$

então resulta

$$(1/n) \cdot \sum_{1 \leq k \leq n} (X_k - E_k) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0 \quad \text{quando} \quad n \uparrow \infty .»$$

VIII refere sensivelmente um teorema citado por Loève. Com $\delta = 1$, VIII dá VI'.

Modifiquemos agora as hipóteses de VIII como segue: As variáveis X_k admitem momentos absolutos da ordem $1+\delta$, com $\delta \geqq 1$; pondo $\delta = 1 + \varepsilon$, com $\varepsilon \geqq 0$, tem-se

$$\sup_{1 \leq k \leq n} E(|X_k|^{2+\varepsilon}) = o(n^{1+\varepsilon/2}).$$

Então verifica-se, para qualquer k,

$$[E(|X_k|^2)]^{1/2} \leqq [E(|X_k|^{2+\varepsilon})]^{1/(2+\varepsilon)} \quad \text{(ver VII')}$$

e portanto sai

$$\sup_k E(X_k^2) \leqq \sup_k [E(|X_k|^{2+\varepsilon})]^{1/(1+\varepsilon/2)} = o(n).$$

Logo a condição suficiente de VI′ encontra-se satisfeita e podemos enunciar:

IX) «Se a sucessão de variáveis casuais X_k, independentes e dotadas de momentos absolutos da ordem $2+\varepsilon$, com $\varepsilon \geqq 0$, (e portanto dotadas de esperanças matemáticas E_k,) for tal que

$$\sup_{1 \leqq k \leqq n} \int_R |x|^{2+\varepsilon} dF_k(x) = o(n^{1+\varepsilon/2}),$$

então resulta

$$(1/n) \cdot \sum_{1 \leqq k \leqq n} (X_k - E_k) \xrightarrow{P} 0 \quad \text{quando} \quad n \uparrow \infty.»$$

Caso se tenha, para algum $\delta > 0$, $\sup\limits_{1 \leqq k \leqq n} E(|X_k|^{1+\delta}) < +\infty$ pode aplicar-se VIII, se $\delta \leqq 1$, e IX, se $\delta \geqq 1$. Daí tira-se o *teorema de Markov:*

X) «Se a sucessão de variáveis casuais X_k, independentes e dotadas de momentos absolutos duma ordem fixa maior que um, seja $1+\delta$, (e portanto dotadas de esperanças matemáticas E_k,) for tal que

$$\sup_{1 \leqq k \leqq n} \int_R |x|^{1+\delta} dF_k(x) < +\infty,$$

então resulta

$$(1/n) \cdot \sum_{1 \leqq k \leqq n} (X_k - E_k) \xrightarrow{P} 0 \quad \text{quando} \quad n \uparrow \infty.»$$

* * *

Damos por concluído o estudo da lei dos grandes números para o qual utilizámos um método autónomo, inteiramente indepentente da noção de lei infinitamente divisível e da teoria geral dos limites de somas de variáveis casuais independentes.

PEDRO BRUNO TEODORO BRAUMANN

Bibliografia

1) BRAUMANN, P. B. T.,—*Introdução ao estudo dos limites de somas de variáveis casuais independentes,* primeiro volume do Curso de Matemáticas Superiores Professor Mira Fernandes, Editorial Império, Lda., Lisboa, 1958.—Também: *Limites de somas de variáveis casuais independentes, parte A,* a sair brevemente.

2) CRAMÉR, H.,—*Random variables and probability distributions.* Cambridge Tracts in Mathematics, no. 36, Cambridge, 1937.

3) —— *Mathematical methods of statistics.* Princeton, 1946.

4) DOOB, J. L.,—*Stochastic processes.* John Wiley and Sons, Inc., New York, 1953.

5) FELLER, W.,—*An introduction to probability theory and its applications.* John Wiley and Sons., Inc., New York, 1950.

6) —— *Ueber das Gesetz der grossen Zahlen.* Acta Univ. Szeged. Sect. Sci. Math. 8, 191-201, 1937.

7) GNEDENKO, B. V.,—*Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Akademie-Verlag, Berlin, 1957.

8) —— *Limit theorems for sums of independent random variables.* Uspekhi Math. Nauk 10, 115-165, 1944. English translation: Translation no. 45, American Mathematical Society, New York.

9) GNEDENKO, B. V., and KOLMOGOROV, A. N.,—*Limit distributions for sums of independent random variables* (traduzido do russo para o inglês, por CHUNG, K. L.,). Addison Wesley Publishing Company, Inc., Cambridge 42, Mass., 1954.

10) KHINTCHINE, A. YA ,—*Sur la loi des grands nombres.* C. R. Acad. Sci. Paris, 188, 477-479, 1929.

11) Kolmogorov, A. N., – *Ueber die Summen durch den Zufall bestimmter unabhaengiger Groessen.* Math. Ann. 99, 309-319, 1928; 102, 484-488, 1929.

12) Lévy, P., – *Théorie de l'addition des variables aléatoires.* Gauthier-Villars, Paris, 1937.

13) Loève, M., – *Probability theory.* D. Van Nostrand Company, Inc., New York, 1955.

14) Uspensky, J. V., – *Introduction to mathematical probability.* Mc Graw--Hill Book Company, Inc., New York and London, 1937.

ÍNDICE REMISSIVO