UNIVERSIDADE DE LUANDA
UNIVERSIDADE DE LISBOA

ELEMENTOS DA TEORIA DA MEDIDA COM RELEVO PARA A TEORIA DA PROBABILIDADE

PARTE C

LIMITES DE SOMAS DE VARIÁVEIS CASUAIS INDEPENDENTES

por
Pedro B. T. Braumann
Professor das Universidades de Lisboa e de Luanda

NOVA LISBOA
1969

UNIVERSIDADE DE LUANDA
UNIVERSIDADE DE LISBOA

ELEMENTOS DA TEORIA DA MEDIDA COM RELEVO PARA A TEORIA DA PROBABILIDADE

PARTE C

LIMITES DE SOMAS DE VARIÁVEIS CASUAIS INDEPENDENTES

por

Pedro B. T. Braumann

Professor das Universidades de Lisboa e de Luanda

NOVA LISBOA
1969

NOTA EXPLICATIVA

Este volume é o terceiro da série corrente, apresentada pelos serviços universitários de Luanda, e corresponde à parte C inteira do tratado intitulado «Elementos da Teoria da Medida com relevo para a Teoria da Probabilidade». A bibliografia respectiva encontra-se colocada no fim do volume. No demais, podem repetir-se conjuntamente as indicações dadas nas notas explicativas que acompanham os primeiros fascículos da parte A e a parte B deste tratado.

Assim, a letra γ refere o livro «Limit distributions for sums of independent random variables» de B. V. Gnedenko e A. N. Kolmogorov, Addison Wesley Publishing Company, Inc., Cambridge 42, Mass., 1954, e a letra λ refere o livro «Probability theory» de M. Loève, D. Van Nostrand Company, Inc., New York, 1955.

Antes de prosseguir, cumpre-nos avisar o leitor de que na linha 11 da página 88 o número 3) deve ser corrigido para III.

Posto isto, há necessidade de organizar um aditamento à tabela de correspondências, em matéria de referências, que se estabeleceu na nota explicativa da parte B e a que o leitor poderá recorrer em todos os casos em que o aditamento for omissão. A propósito, as letras γ e λ conservam o seu significado, isto é, referem-se aos livros respectivamente **16)** e **25)** da bibliografia anexa a este volume.

A, II de §2, pode ver-se no primeiro volume desta série e refere-se às continuidades superior e inferior duma medida (probabilidade).

A, texto a seguir a IX de §3, corresponde à definição do princípio de §10 de γ ou de **13.1** de λ, quer dizer corresponde à definição de tipo duma lei ou v.c. ou f.d. ou f.c..

A, 2) de §4 e texto subsequente, corresponde à definição 2.º do princípio e ao teorema **a**, ambos de **7.1** de λ, quer dizer corresponde à atitude de se definir o integral duma f. m. não-negativa como sendo o limite dos integrais de **qualquer** sucessão não-decrescente formada por f.m. simples e não-negativas que convirjam para a f.m. considerada.

A, 4) de §4, corresponde à definição posterior à definição 3.º de **7.1** de λ, quer dizer corresponde à definição de integral estendido a um conjunto mensurável qualquer (não necessàriamente confundido com o espaço inteiro).

A, §5 (sem mais indicações), refere-se ao conceito de função de frequência, também chamada densidade de probabilidade, quer dizer a um conceito conhecido dos cursos elementares e tratado desenvolvidamente no primeiro volume desta série.

A, 8) de §5, refere o seguinte facto, decorrente de III de §4 de A ou seja do teorema da convergência majorada: Dada uma função integrável, qualquer limite de integração infinito pode alcançar-se substituindo-o por um limite finito variável e fazendo tender este para o primeiro.

A, I de §5 e corolários, corresponde ao (único) teorema incluído nas aplicações II e ao texto subsequente, ambos de **7.2** de λ, quer dizer corresponde ao facto de coincidirem os integrais de Riemann-Stieltjes e de Lebesgue-Stieltjes duma função contínua tomada num intervalo onde ela seja absolutamente integrável no sentido de Riemann-Stieltjes.

A, nota à demonstração de III de §5, corresponde ao teorema **b** de **11.2** de λ e também à observação que precebe o exemplo 2 da página 245 do primeiro volume desta série, quer dizer corresponde ao facto de a convergência fraca duma sucessão de funções de distribuição no sentido de λ ou seja de funções de quase-distribuição no sentido de A, convergência esta definida pela forma habitual, equivaler à convergência vulgar da mesma sucessão sobre um conjunto denso na recta real.

A, III' de §5, corresponde ao teorema **A** ou da compactidão fraca de **11.2** de λ e também ao corolário XXXVIII' da página 246 do primeiro volume desta série, quer dizer corresponde ao facto de qualquer sucessão formada por funções de distribuição no sentido de λ ou seja por funções de quase-distribuição no sentido de A compreender uma subsucessão fracamente convergente para uma função de (quase-) distribuição.

A, V de §6, corresponde ao teorema 1 de §11 de γ, quer dizer corresponde à continuidade uniforme duma f.c. na recta real.

A, VI de §6, corresponde ao teorema 2 de §12 de γ, quer dizer refere a correspondência biunívoca entre f.d., por um lado, e f.c., por outro lado.

A, I de §8, corresponde ao corolário 1 do teorema 3 de §11 de γ, quer dizer corresponde ao facto de resultar uma f.c. qualquer produto dum número finito de f.c..

A, II de §8, corresponde ao corolário 2 do teorema 3 de §11 de γ, quer dizer corresponde ao facto de resultar uma f.c. o quadrado do módulo de qualquer f.c..

A, IV de §8, corresponde ao teorema 1 de §14 de γ, quer dizer refere que o quádruplo da diferença entre a unidade real e a parte real duma f.c. não pode ser menor do que a diferença entre a unidade real e a parte real da f.c. de argumento duplo.

A, texto a seguir a V de §8, alude simplesmente ao conceito de convergência fraca, cujo estudo já tinha sido recomendado na nota explicativa da parte B.

A, exemplo 1 de §8, corresponde à definição intercalada entre as fórmulas 4) e 5) de §6 de γ e também à definição que precede o teorema **a** de **13.1** de λ, quer dizer dá as informações mais importantes relativas às leis (ou distribuições ou v.c. ou f.d. ou f.c.) impróprias, também chamadas degeneradas e bem conhecidas dos cursos elementares, denominando-se própria toda a lei (ou distribuição ou v.c. ou f.d. ou f.c.) que não for imprópria.

A, exemplo 3 de §8, corresponde a uma generalização fácil do exemplo 2 de §11 de γ, isto é, dá as informações mais importantes relativas à lei ou distribuição de Poisson, na essência repetidas a meio da página 147 deste volume.

A, exemplo 7 de §8, dá as informações mais importantes relativas à lei rectangular ou uniforme, que é conhecida dos cursos elementares e que é caracterizada pelo facto de ter uma f.d. cujo valor iguala o do argumento quando este percorre o intervalo fechado compreendido entre os números 0 e 1.

A, princípio de §9, corresponde ao princípio de §17 de γ, onde se declara i.d. toda a f.c. que (ou toda a v.c. cuja f.c.) possa igualar-se, seja qual for o número natural n,a uma potência com expoente n e com base que é outra f.c., em geral variável com n.

A, texto antes de I de §9, refere que a probabilidade em causa decorre de VIII de §8 de A, correspondente ao teorema 4 de §14 de γ, isto é, dadas a sucessão natural n, uma sucessão de f.c. f_n (t) e uma sucessão estritamente crescente formada por números naturais m_n, então a convergência fraca das potências de expoentes m_n e de bases $f_n(t)$ para uma função contínua ou característica implica a convergência fraca das f.c. f_n (t) para a constante 1.

A, 4) de §10, corresponde à fórmula 3) de 16 de γ ou seja à fórmula de De Finetti para a representação dos logaritmos das f.c. de certas leis i.d..

A, texto antes de 6) de §10, limita-se a justificar a desigualdade posta no texto deste volume, que é dedutível por um processo elementar.

A, 8) de §10, refere a seguinte propriedade, conhecida do estudo elementar dos integrais de Riemann-Stieltjes estendidos a um intervalo finito: Dadas as funções contínuas f(u) e g(u), a função de variação limitada G(u) e a igualdade $dF(u) = g(u) \times \times dG(u)$, todas no intervalo cosiderado, então coicidem aí o integral de f(u) dF(u) e o de f(u)g(u)dG(u).

A, I' de §11, corresponde ao corolário do teorema 1 de §18 de γ, quer dizer corresponde à unicidade de qualquer representação para o logaritmo duma f.c. que generalize a representação de Lévy e Khintchine no sentido de a função G(u) ser de variação limitada, sem ser necessàriamente uma função não-decrescente.

A, exemplo 1 de §11, particulariza A, exemplo 2 de §11, para o caso duma lei ou distribuição de Gauss imprópria, quer dizer de variância nula, caso esse referido pormenorizadamente na página 118 deste volume.

A, exemplo 2 de §11, corresponde às fórmulas desde 12) até 13') de §18 de γ, quer dizer corresponde à caracterização da lei normal ou de Gauss nas diversas representações canónicas, caracterização essa que vem repetida na página 119 deste volume.

A, exemplo 3 de §11, corresponde a uma generalização fácil das fórmulas desde 14) até 14") de §18 de γ, quer dizer dá as grandezas típicas das diversas representações canónicas da lei de Poisson de parâmetros reais $\lambda>0$, h e H ou a, grandezas essas que vêm repetidas na página 147 deste volume. A propósito, talvez convenha esclarecer que a caracterização da função N das representações de Lévy duma lei de Poisson (e de várias outras leis) apresenta ligeiras diferenças, aliás meramente formais, conforme considerarmos as integrações com respeito a essa função no sentido duma medida não-negativa ou no sentido de Riemann-Stieltjes.

A, exemplo 4 de §11, dá as grandezas típicas das diversas representações canónicas da lei de Cauchy de parâmetros reais $\alpha>0$ ou $H>0$ e β ou h, cujo cálculo se faz pelas vias habituais e que vêm repetidas na página 155 deste volume.

ÍNDICE GERAL

ESTUDO GERAL DOS LIMITES DE SOMAS DE VARIÁVEIS CASUAIS INDEPENDENTES

§ 1) Introdução

Esta publicação tem por fim fazer progredir a exposição iniciada nos dois estudos anteriores sobre limites de somas de variáveis casuais independentes, designados por parte A e parte B ou, abreviadamente, por A e B para efeitos de referência. Cumpre assinalar aqui que a parte A se encontra reproduzida, salvo em questões de pormenor que não prejudicam as referências, num trabalho um tanto resumido, o qual se intitula «*Introdução ao estudo dos limites de somas de variáveis casuais independentes*».

No primeiro capítulo da publicação presente, parte C ou C para efeitos de referência, damos a teoria geral da convergência das somas de variáveis casuais independentes, conduzindo o estudo, por vezes, em termos duma generalidade levemente maior do que a usual e acrescentando certas proposições complementares tidas por úteis para fins ulteriores.

No capítulo seguinte tratamos de aspectos especiais da convergência versada no capítulo anterior. No quinto parágrafo referimos alguns tipos de simplificação dos teoremas gerais de convergência, uns certamente conhecidos e outros talvez novos: Assim, as proposições I a II generalizam resultados que já eram familiares em casos particulares, afigurou-se-nos conveniente enunciar e demonstrar III′, a proposição V aclara um resultado citado no livro de Loève e V′ é um complemento curioso de V. No parágrafo seguinte estudamos as propriedades das leis de Lévy e a convergência para essas leis; depois de reproduzirmos toda a análise preliminar necessária à penetração na questão posta, apresentamos uma boa variedade de resultados, todos conhecidos, com excepção possível de VIII e dos seus corolários(•). No sétimo parágrafo, destinado a resolver o problema de achar constantes (positivas) capazes de transformarem sucessões simples de variáveis casuais independentes em sucessões duplas fracamente convergentes (para leis que podemos supor próprias), arredondamos os resultados principais de GROSHEV e GNEDENKO, contidos nos enunciados de II, VIII e XI, acrescentando-lhes as restantes proposições do parágrafo.

No último capítulo passamos em revista as condições de convergência de somas de variáveis casuais independentes para algumas leis particulares importantes. No parágrafo oitavo aludimos ràpidamente ao caso duma lei limite *imprópria,* o qual já tinha sido estudado na parte B. No parágrafo seguinte tratamos do caso importantíssimo duma lei limite de GAUSS, procurando fazer uma exposição a mais selectiva possível: Aí as proposições I a V, IX, XI a XII e XIV a XVI são conhecidas ou implícitas em resultados conhecidos, a proposição IV tem por corolário o teorema de ZAREMBA citado em VI, as proposições VII e VIII afiguram-se mais práticas do que o teorema de BERNSTEIN e FELLER, as proposições X, X' e XIII parecem ser novas e as proposições XVI' a XVII' apresentam consequências interessantes dos resultados clássicos devidos a LINDEBERG e LIAPOUNOV. No parágrafo seguinte damos as condições de convergência para uma *lei de* POISSON, generalizando ligeiramente os resultados alcançados por GNEDENKO, LÉVY e MARCINKIEWICZ, contidos em I, III e V. Finalmente nos dois últimos parágrafos usamos a teoria geral para resolvermos dois exercícios, possìvelmente pela primeira vez: Determinar as condições de convergência para *leis de* CAUCHY e para *leis gama* (em particular, para *leis qui-quadrado*).

Não queremos fechar esta introdução sem chamarmos a atenção do leitor para dois pontos:

Primeiro, o nosso trabalho é de apresentação e, por vezes, de arredondamento da bela teoria elaborada por GNEDENKO,

(•) Nota posta durante a reimpressão da pág. 2: O número inaugural da «Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete», publicado em 5/4/1962, traz um artigo de MAREK FISZ (págs. 25 a 27), entregue em Outubro de 1961, o qual contém um lema equivalente à proposição VIII de § 6.

KHINTCHINE, KOLMOGOROV, LÉVY, MARCINKIEWICZ, RAIKOV e outros autores, cujo esforço magnífico nunca é demais enaltecer. Mais, foi o nosso desejo facilitar ao consultor apressado desta publicação a apreensão tanto quanto possível extensiva dos resultados mais importantes nela referidos. Por isso, não hesitámos em apresentar alguns enunciados de teoremas com elementos superabundantes do ponto de vista puramente lógico. Ao correr da pena recordamo-nos de tal ter acontecido, por exemplo, no enunciado de X de § 7.

CAPÍTULO I

ESTUDO GERAL DOS LIMITES DE SOMAS DE VARIÁVEIS CASUAIS INDEPENDENTES

§ 2) Bases da doutrina

Teoremas preliminares. Em todo este capítulo colocamo-nos na posição de § 4 de B, isto é, consideramos sucessões duplas de variáveis casuais X_{nk}, com $1 \leqq k \leqq k_n$ e $k_n \longrightarrow \infty$, quando $n \uparrow \infty$, e supomos as variáveis independentes por linhas, isto é, independentes, quando n é fixo e k corre de 1 a k_n.

Pois bem, uma proposição importante para a elaboração da doutrina que temos em vista é o teorema preliminar seguinte:

I) «Quando as variáveis casuais X_{nk}, independentes por linhas, admitem as constantes assintóticas A_{nk}, então, dada qualquer sucessão de números positivos p_n de limite finito p, ficam as variáveis $p_n X_{nk}$ com as constantes assintóticas $p_n A_{nk}$.

Na hipótese de existirem constantes S_n que tornam as leis das somas

$$a) \qquad X_n = X_{n1} + X_{n2} + \cdots + X_{nk_n} - S_n$$

(fracamente) convergentes para uma lei de função característica $f(t)$, as constantes $p_n S_n$ tornam as leis das variáveis casuais $p_n X_n$ (fracamente) convergentes para a lei de função característica $f(pt)$, do mesmo tipo que $f(t)$, se $p > 0$, e imprópria, se $p = 0$.

Em particular, se as leis das somas de a) convergem e se $p=0$, as variáveis casuais $p_n X_{nk}$ obedecem à lei dos grandes números, podendo tomar-se as grandezas $p_n\ S_n$ para constantes de estabilidade.»

Demonstração de I: Representemos por $\mathsf{P}(\ldots)$ a probabilidade do acontecimento contido no parêntesis. Então, sendo n suficientemente grande, temos a desigualdade

$$1)\qquad \sup_{1\leqq k\leqq k_n} \mathsf{P}(|X_{nk}-A_{nk}|\geqq\varepsilon)\geqq$$
$$\geqq \sup_{1\leqq k\leqq k_n} \mathsf{P}(|p_n X_{nk}-p_n A_{nk}|\geqq(p+1)\varepsilon),$$

a qual mostra, juntamente com 2) de § 4 de B, que as grandezas $p_n A_{nk}$ são constantes assintóticas das variáveis $p_n X_{nk}$, quando as grandezas A_{nk} são constantes assintóticas das variáveis X_{nk}.

Posto isso, designemos por $f_n(t)$ a f. c. (isto é, a função característica) de X_n. Temos, por hipótese, $f_n(t)\xrightarrow{s} f(t)$ [A, texto a seguir a V de § 8]. Sendo assim, a desigualdade

$$|f(pt)-f_n(p_n t)|\leqq|f(pt)-f(p_n t)|+|f(p_n t)-f_n(p_n t)|,$$

a continuidade da função f [V de § 6 de A] e a convergência uniforme de f_n para f [VI de § 8 de A] provam que $f_n(p_n t)\longrightarrow$ $\longrightarrow f(pt)$, para todo o t real, donde concluímos, tendo em vista VII' de § 8 de A, que $f_n(p_n t)\xrightarrow{s} f(pt)$ ou seja, por causa de 1) de § 8 de A, que as leis das variáveis $p_n X_n$ tendem para a lei de f. c. $f(pt)$, com $f(pt)$ do mesmo tipo que $f(t)$, se $p>0$, e imprópria, se $p=0$ [A, texto a seguir a IX de § 3 e exemplo 1.º de § 8].

Quanto ao caso particular mencionado na tese, é uma consequência imediata de B, I e 1) de § 7.

A proposição I admite um corolário que por vezes se torna útil. Ei-lo:

I') «Quando se verificam todas as hipóteses do teorema I e, além disso, a lei limite é *própria,* então nenhuma sucessão de números positivos p_n divergente para $+\infty$ pode tornar as variáveis $p_n X_{nk}$ assintòticamente constantes e, simultâneamente, as leis das variáveis casuais $p_n X_n$ (fracamente) convergentes para alguma lei limite.»

Demonstração de I': Se as variáveis $\tilde{X}_{nk} = p_n X_{nk}$ fossem assintòticamente constantes e as leis das variáveis $\tilde{X}_n = p_n X_n$ tendessem para uma lei limite, então I obrigava as variáveis $\tilde{X}_{nk}/p_n = X_{nk}$ a serem assintòticamente constantes e obrigava também as leis das somas $\tilde{X}_n/p_n = X_n$ a convergirem para uma lei *imprópria* (uma conclusão absurda).

Observação: Basta suprimir alguns passos da demonstração de I', convenientemente escolhidos, para reconhecer que *a proposição continua a ser válida, quando se eliminam dela as referências à constância assintótica das variáveis presentes.*

Dado $p_n > 0$, então, sendo $\chi_{nk}^{(\gamma)}$ um quantil da ordem γ de X_{nk} e $\tilde{\chi}_{nk}^{(\gamma)}$ um quantil da ordem γ de $\tilde{X}_{nk} = p_n X_{nk}$, 3') de § 4 de B permite escrever a relação $\tilde{\chi}_{nk}^{(\gamma)} = p_n \chi_{nk}^{(\gamma)}$.

Posto isso, consideremos constantes assintóticas A_{nk} das variáveis X_{nk}, sujeitas à restrição seguinte: Existe um par fixo de números γ' e γ'', com $0 < \gamma' \leqq \gamma'' < 1$, tais que se verifica, para todo o n suficientemente grande e uniformemente em k,

2) $$\chi_{nk}^{(\gamma')} - \eta'_{nk} \leqq A_{nk} \leqq \chi_{nk}^{(\gamma'')} + \eta''_{nk},$$

onde η'_{nk} e η''_{nk} representam números não-negativos que tornam limitadas as somas $\sum_{1 \leqq k \leqq k_n} \eta'^2_{nk}$ e $\sum_{1 \leqq k \leqq k_n} \eta''^2_{nk}$, quando $n \uparrow \infty$.

Então, *supondo que* $p_n \to 0$ e fazendo

$$\tilde{\eta}'_{nk} = p_n \eta'_{nk}, \; \tilde{\eta}''_{nk} = p_n \eta''_{nk} \text{ e } \tilde{A}_{nk} = p_n A_{nk},$$

resulta, também para n suficientemente grande e uniformemente em k,

3) $$\tilde{\chi}_{nk}^{(\gamma')} - \tilde{\eta}'_{nk} \leqq \tilde{A}_{nk} \leqq \tilde{\chi}_{nk}^{(\gamma'')} + \tilde{\eta}''_{nk},$$

$$\text{com} \quad \lim_{n \uparrow \infty} \sum_{1 \leqq k \leqq k_n} \tilde{\eta}'^2_{nk} = \lim_{n \uparrow \infty} \sum_{1 \leqq k \leqq k_n} \tilde{\eta}''^2_{nk} = 0.$$

Designando agora por $F_{nk}(x)$ e $\tilde{F}_{nk}(x)$ as funções de distribuição de X_{nk} e de $\tilde{X}_{nk}$, respectivamente, e supondo que a sucessão das leis das somas de a) de I é convergente, basta ter em conta VII' de § 7 de B para tirar de 3) e de I a igualdade

$$0=\lim_n \sum_k \int_R \frac{x^2}{1+x^2}\, d\tilde{F}_{nk}(x+\tilde{A}_{nk}) =$$

$$=\lim_n \sum_k \int_R \frac{p_n^2\, x^2}{1+p_n^2\, x^2}\, dF_{nk}(x+A_{nk}) =$$

$$=\lim_n \left[p_n^2 \,.\, \sum_k \int_R \frac{x^2}{1+x^2}\, dF_{nk}(x+A_{nk}) \right].$$

Como as grandezas $p_n \longrightarrow 0$ podem ser tomadas arbitràriamente, concluímos que o último somatório de integrais é limitado, quando $n \uparrow \infty$. Portanto, atendendo a 4) de § 4 de B e às desigualdades que precedem o enunciado de VII' de § 7 de B, podemos enunciar a proposição seguinte:

II) «Dadas as variáveis X_{nk}, independentes por linhas, assintòticamente constantes e tais que existem constantes S_n que tornam (fracamente) convergentes as somas de *a)* de I, então quaisquer constantes assintóticas A_{nk} dessas variáveis que satisfaçam às relações 2) tornam limitadas (com respeito a n) as expressões seguintes:

a) $$\sum_{1 \leq k \leq k_n} \int_R \frac{x^2}{1+x^2}\, dF_{nk}(x+A_{nk}),$$

b) $$\sum_{1 \leq k \leq k_n} \int_R h_D(x)\, dF_{nk}(x+A_{nk}),$$

c) $$\sum_{1 \leq k \leq k_n} \int_{|x| \leq D} x^2\, dF_{nk}(x+A_{nk}) \quad \text{e}$$

d) $$\sum_{1 \leq k \leq k_n} \int_{|x| > D} dF_{nk}(x+A_{nk}),$$

nas últimas três das quais D significa um número positivo arbitrário.»

Passamos a supor que as variáveis X_{nk} satisfazem às hipóteses de II e, além disso, são *infinitesimais*. Então, as suas esperanças matemáticas truncadas em $\pm D$, definidas pelas igualdades

$$4) \qquad {}_D E_{nk} = \int_{|x| \leqq D} x \, dF_{nk}(x),$$

são constantes assintóticas [B, VIII de § 4]. Doutro lado, entrando com as relações *c)* e *d)* de II na desigualdade do texto imediatamente anterior a VIII de § 7 de B, a saber em

$$(1/2) \, . \sum_k ({}_D E_{nk} - \chi_{nk})^2 \leqq$$

$$\leqq \sum_k \left[\int_{|x| \leqq 2D} x^2 \, dF_{nk}(x + \chi_{nk}) + \chi_{nk}^2 \, . \int_{|x| > D/2} dF_{nk}(x + \chi_{nk}) \right],$$

inferimos de I' de § 4 de B que

$$5) \qquad \sum_{1 \leqq k \leqq k_n} ({}_D E_{nk} - \chi_{nk})^2 \leqq S < +\infty, \text{ quando } n \uparrow \infty.$$

Posto isso, sendo P e Q dois números positivos arbitrários, façamos

$$6) \qquad \inf({}_P E_{nk}, {}_Q E_{nk}) = I_{nk} \text{ e } \sup({}_P E_{nk}, {}_Q E_{nk}) = J_{nk}$$

e consideremos constantes assintóticas A_{nk} das variáveis X_{nk} tais que se tenha, para todo o n suficientemente grande e uniformemente em k,

$$7) \qquad I_{nk} - \xi_{nk} \leqq A_{nk} \leqq J_{nk} + \zeta_{nk},$$

onde ξ_{nk} e ζ_{nk} representam números não-negativos que tornam limitadas (em n) as somas $\sum_{1 \leqq k \leqq k_n} \xi_{nk}^2$ e $\sum_{1 \leqq k \leqq k_n} \zeta_{nk}^2$.

Então, notando que a relação 6) de § 8 de B, aplicada à variável casual (real) simples de valores $a_1, a_2, \ldots, a_n$, todos de probabilidade $1/n$, dá a desigualdade

$$8) \qquad (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \leqq n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2),$$

basta ter em conta 7) para obter

$$\sum_k (A_{nk}-\chi_{nk})^2 = \sum_k [(\chi_{nk}-J_{nk}) + (-\zeta_{nk}) + (J_{nk}+\zeta_{nk}-A_{nk})]^2 \leqq$$
$$\leqq 3 . \{ \sum_k (\chi_{nk}-J_{nk})^2 + \sum_k \zeta_{nk}^2 + \sum_k [\zeta_{nk}+(J_{nk}-\chi_{nk})+(\chi_{nk}-I_{nk})+\xi_{nk}]^2 \} \leqq$$
$$\leqq 15 . [\sum_k (J_{nk}-\chi_{nk})^2 + \sum_k (I_{nk}-\chi_{nk})^2 + \sum_k \zeta_{nk}^2 + \sum_k \xi_{nk}^2] ,$$

onde o último somatório é limitado, por causa de 5) a 7). Portanto, as grandezas A_{nk} satisfazem a 2) e podemos aplicar II. Daí o corolário:

II') «Quando se verificam as hipóteses de II, as variáveis X_{nk} são infinitesimais e as suas constantes assintóticas A_{nk} satisfazem a 7), tem-se também uma condição suficiente para que resultem limitadas as expressões *a)*, *b)*, *c)* e *d)* de II.»

* * *

Teorema básico de Gnedenko e Khintchine. Em face do exposto estamos aptos a deduzir uma proposição que constitui a *base* do estudo da convergência das somas de *a)* de I e a que podemos chamar *teorema de* GNEDENKO *e* KHINTCHINE. Vejamos:

III) «Dadas as variáveis casuais X_{nk}, independentes por linhas, infinitesimais e possuindo as funções de distribuição $F_{nk}(x)$, podem determinar-se constantes S_n que tornem as leis das somas

a) $$X_n = X_{n1} + X_{n2} + \cdots + X_{nk_n} - S_n$$

(fracamente) convergentes para uma lei limite, *quando e só quando* se verifica a condição seguinte: Representando por P e Q dois números positivos arbitrários e tomando constantes assintóticas A_{nk} das variáveis X_{nk}, sujeitas à restrição de sair, para n suficientemente grande e uniformemente em k, a desigualdade

b) $$\inf\left[\int_{|x|\leqq P} x\, dF_{nk}(x), \int_{|x|\leqq Q} x\, dF_{nk}(x)\right] - \xi_{nk} \leqq A_{nk} \leqq$$
$$\leqq \sup\left[\int_{|x|\leqq P} x\, dF_{nk}(x), \int_{|x|\leqq Q} x\, dF_{nk}(x)\right] + \zeta_{nk},$$

onde ξ_{nk} e ζ_{nk} significam números não-negativos que satisfazem a

$$c) \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leqq k\leqq k_n} \xi_{nk}^2 = \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leqq k\leqq k_n} \zeta_{nk}^2 = 0\,,$$

é possível associar às constantes A_{nk} e às variáveis casuais X_{nk} uma sucessão de variáveis casuais infinitamente divisíveis cujas funções características têm logaritmos definidos pela fórmula

$$d) \qquad \log g_n(t) = i\,.\,(-S_n + \sum_{1\leqq k\leqq k_n} A_{nk})\,.\,t + \\ + \sum_{1\leqq k\leqq k_n} \int_R (e^{itx}-1)\, dF_{nk}(x+A_{nk})$$

e cujas leis convergem para uma lei limite.

A lei limite é a mesma, quer em *a)* quer em *d)*.

Se alguma sucessão de leis definidas por *d)* tiver uma lei limite, esta é também lei limite de qualquer outra sucessão que resulte da primeira, fazendo variar as constantes A_{nk} no âmbito das relações *b)* e *c)*.»

Demonstração de III: Comecemos por notar que *d)* é uma modificação inessencial do caso da fórmula de De Finetti em que se anula o coeficiente de t^2 [A, 4) de § 10], o que equivale a dizer que $g_n(t)$ é a f. c. duma lei i. d. (infinitamente divisível) comparativamente simples e privada de componente gausseana.

Posto isso, designemos por $f_{nk}(t)$ a f. c. de X_{nk} e por $f_n(t)$ a f. c. de X_n. Sai [A, IV de § 7 e 1) de § 8]

$$9) \qquad f_n(t) = e^{-iS_n t}\,.\prod_{1\leqq k\leqq k_n} f_{nk}(t)\,.$$

Tomemos *quaisquer* grandezas A_{nk} que se sujeitem a *b)* e *c)* e façamos

$$10) \qquad f_{nk}^*(t) = e^{-iA_{nk}t}\,.\,f_{nk}(t) \quad \text{e} \quad F_{nk}^*(x) = F_{nk}(x+A_{nk})\,.$$

Então, atendendo a *d)*, 9) e 10) e usando depois A, 1) de § 6, podemos escrever

$$|\log f_n(t) - \log g_n(t)| = |\sum_k [\log f^*_{nk}(t) - \int_R (e^{itx} - 1)\, dF^*_{nk}(x)]| =$$

$$= |\sum_k \{\log[1 + \varphi_{nk}(t)] - \varphi_{nk}(t)\}|,$$

onde

11) $$\varphi_{nk}(t) = f^*_{nk}(t) - 1.$$

Como de 11) se tira [B, VII de § 4]

$$\sup_{1 \leq k \leq k_n} |\varphi_{nk}(t)| \xrightarrow{s} 0, \quad \text{quando } n \uparrow \infty,$$

sai, para n suficientemente grande,

$$|\log f_n(t) - \log g_n(t)| = |\sum_k \sum_{2 \leq l < +\infty} (-1)^l \varphi^l_{nk}(t)/l| \leq$$

$$\leq \sum_k \sum_{2 \leq l < +\infty} |\varphi_{nk}(t)|^l/l \leq \frac{1}{2} \cdot \sum_k \frac{|\varphi_{nk}(t)|^2}{1 - |\varphi_{nk}(t)|} \leq \sum_k |\varphi_{nk}(t)|^2.$$

Tendo em vista 4) e recordando que $|e^{itu} - 1 - itu| \leq t^2 u^2$ [A, texto antes de 6) de § 10], podemos escrever, suprimindo temporàriamente os índices n e k,

$$|\varphi(t)| = |\int_R [e^{it(x-A)} - 1]\, dF(x)| \leq$$

$$\leq |\int_{|x| \leq D} [e^{it(x-A)} - 1 - it(x - A)]\, dF(x)| +$$

$$+ |\int_{|x| > D} [e^{it(x-A)} - 1]\, dF(x)| +$$

$$+ |\int_{|x| \leq D} it[(x - {}_DE) + ({}_DE - A)]\, dF(x)| \leq$$

$$\leq t^2 \cdot \int_{|x| \leq D} (x - A)^2\, dF(x) + 2 \cdot \int_{|x| > D} dF(x) + |t| \cdot$$

$$\cdot [|{}_DE \cdot \int_{|x| > D} dF(x)| + |{}_DE - A| \cdot \int_{|x| \leq D} dF(x)] \leq$$

$$\leq t^2 \cdot \int_{|x| \leq D} (x - A)^2\, dF(x) + (2 + D \cdot |t|) \cdot \int_{|x| > D} dF(x) + |t| \cdot |{}_DE - A|.$$

Daí e de 8) tiramos

$$\frac{1}{3} \cdot \sum_k |\varphi_{nk}(t)|^2 \leqq t^4 \cdot \sup_k \int_{|x| \leqq D} (x - A_{nk})^2 \, dF_{nk}(x) \cdot$$

$$\cdot \sum_k \int_{|x| \leqq D} (x - A_{nk})^2 \, dF_{nk}(x) + (2 + D \cdot |t|)^2 \cdot$$

$$\cdot \sup_k \int_{|x|>D} dF_{nk}(x) \cdot \sum_k \int_{|x|>D} dF_{nk}(x) + t^2 \cdot \sum_k ({}_D E_{nk} - A_{nk})^2.$$

Recordando que as variáveis X_{nk} são infinitesimais, tiramos de 10) e de B, I' de § 4, que sai, para n suficientemente grande,

$$12) \quad \frac{1}{3} \cdot |\log f_n(t) - \log g_n(t)| \leqq t^4 \cdot \sup_k \int_{|x| \leqq 2D} x^2 \, dF^*_{nk}(x) \cdot$$

$$\cdot \sum_k \int_{|x| \leqq 2D} x^2 \, dF^*_{nk}(x) + (2 + D \cdot |t|)^2 \cdot \sup_k \int_{|x|>D/2} dF^*_{nk}(x) \cdot$$

$$\cdot \sum_k \int_{|x|>D/2} dF^*_{nk}(x) + t^2 \cdot \sum_k ({}_D E_{nk} - A_{nk})^2,$$

onde os dois supremos tendem para zero, quando $n \uparrow \infty$ [B, V e 1) de § 4].

Admitamos agora que existem constantes S_n tais que convergem as somas de a) do enunciado.

Como as hipóteses feitas a respeito das constantes A_{nk} implicam que elas satisfazem a 7), concluímos então de II' que saem limitadas as somas de integrais que figuram em 12).

Além disso, supondo $P \leqq Q$ e n suficientemente grande, as fórmulas 4) e 6) dão

$$\sum_k (J_{nk} - I_{nk}) = \sum_k \left| \int_{P<|x| \leqq Q} x \, dF_{nk}(x) \right| \leqq Q \cdot \sum_k \int_{|x|>P} dF_{nk}(x) \leqq$$

$$\leqq Q \cdot \sum_k \int_{|x|>P/2} dF^*_{nk}(x),$$

onde o último somatório é limitado por causa de II'. Daí se tira que

$$\sum_k (J_{nk} - I_{nk})^2 \leqq \sup_k (J_{nk} - I_{nk}) \cdot \sum_k (J_{nk} - I_{nk})$$

tem limite nulo, quando $n \uparrow \infty$ [B, VIII e I de § 4]. Então, pondo $D = P$ em 12), resulta

$$\sum_k ({}_D E_{nk} - A_{nk})^2 \leqq \sum_k [\zeta_{nk} + (J_{nk} - I_{nk}) + \xi_{nk}]^2 \leqq 3 \cdot$$

$$\cdot [\sum_k \zeta_{nk}^2 + \sum_k (J_{nk} - I_{nk})^2 + \sum_k \xi_{nk}^2] \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad n \uparrow \infty. ^{(*)}$$

Em conclusão,

13) $$\lim_{n \uparrow \infty} [\log f_n(t) - \log g_n(t)] = 0, \qquad \text{para todo o } t.$$

Notando agora que as f. c. $g_n(t)$ nunca se anulam, por serem i. d. [A, I de § 9], e que as f. c. $f_n(t)$ convergem (fracamente) para uma f. c., a qual podemos designar por $f(t)$, inferimos de 13) que

$$g_n(t) \xrightarrow{s} f(t), \qquad \text{quando } n \uparrow \infty.$$

Assim fica demonstrado que as leis das somas de *a)* não podem convergir para uma lei limite sem que alguma (e até toda a) sucessão de constantes A_{nk}, escolhida de acordo com *b)* e *c)*, faça tender as leis i. d. definidas em *d)* para a mesma lei limite.

Passamos a demonstrar a condição suficiente do nosso teorema.

Para cada n vamos escolher uma f. c. i. d. $g_n(t)$ de acordo com *d)*. Corresponde uma função $G_n(u)$ que é de distribuição, a menos dum factor constante não-negativo [A, I de § 11]. Para obter esta função, recorde-se 10) e faça-se

14) $$G_n(-\infty) = 0 \quad \text{e} \quad dG_n(u) = \sum_{1 \leqq k \leqq k_n} \frac{u^2}{1+u^2} \, dF_{nk}^*(u);$$

(*) Talvez valha a pena chamar a atenção para o facto que existem constantes assintóticas A_{nk} das variáveis X_{nk} que satisfazem a *b)* de III, mas não satisfazem a *c)* de III e nem sequer tornam $\Sigma \xi_{nk}^2$ e $\Sigma \zeta_{nk}^2$ simultâneamente limitados, quando $n \uparrow \infty$. Exemplo: $\zeta_{nk} = 1/k_n^{1/3}$, seja qual for k, torna $\Sigma \zeta_{nk}^2 \to +\infty$.

então *d)* toma o aspecto

$$15)\quad \log g_n(t) = i \cdot \{-S_n + \sum_{1 \leq k \leq k_n} [A_{nk} + \int_R \frac{x}{1+x^2}\, dF^*_{nk}(x)]\} \cdot t +$$
$$+ \int_R \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) \frac{1+u^2}{u^2}\, dG_n(u),$$

característico da representação de Lévy e Khintchine duma lei i. d.

Admitamos agora que, escolhidas constantes S_n convenientes, se tem

$$16)\qquad g_n(t) \xrightarrow{s} g(t), \qquad \text{quando } n \uparrow \infty,$$

e designemos por $G(u)$ a função que corresponde a $g(t)$ na representação de Lévy e Khintchine. Resulta [B, I de § 3]

$$17)\quad G_n(u) \xrightarrow{c} G(u) \quad \text{e, portanto,} \quad G_n(+\infty) \longrightarrow G(+\infty).$$

Pois bem, 14) e 17) permitem escrever

$$\sum_k \int_R \frac{x^2}{1+x^2}\, dF^*_{nk}(x) \longrightarrow G(+\infty) < +\infty,$$

o que mostra que são limitadas as expressões que figuram em *a)* de II; consequentemente, saem também limitadas as somas de integrais que figuram em 12). Nestas circunstâncias podemos passar novamente de 12) para 13). No fim de contas inferimos de 13) e 16) que

$$f_n(t) \xrightarrow{s} g(t), \qquad \text{quando } n \uparrow \infty,$$

o que completa a segunda parte da nossa demonstração.

Para terminar a demonstração de III basta observar o seguinte: Se alguma sucessão de leis i. d. associadas às variáveis X_{nk} e a certas constantes assintóticas A_{nk} sujeitas a *b)* e *c)* tende para uma lei limite, então as somas X_n convergem, pela condição suficiente, para a mesma lei limite, a qual é também lei limite de qualquer outra sucessão que resulte da primeira por mudança das constantes iniciais para outras admissíveis, conforme se viu no decurso das considerações relativas à condição necessária.

Observação: Se as variáveis casuais X_{nk} das somas de *a)* de III forem assintòticamente constantes, mas não infinitesimais, podemos fazer as translações que consistem em diminuir cada uma delas de uma das suas constantes assintóticas; depois introduzimos a alteração correspondente nas grandezas S_n. As constantes assintóticas bem como as funções de distribuição das desigualdades *b)* passam então a dizer respeito às variáveis transladadas (infinitesimais). Feitas estas adaptações, continua válida a condição necessária e suficiente do teorema de Gnedenko e Khintchine.

Exemplo: Considere-se a sucessão de variáveis casuais simples independentes $X_1, X_2, \ldots$ tal que o termo genérico X_n pode tomar os valores 0 e 1, o primeiro com probabilidade q_n e o outro com probabilidade $p_n = 1 - q_n$; depois ponha-se $k_n = n$ e $X_{nk} = (X_k - p_k)/B_n$, com $B_n = +\sqrt{\sum_{1 \leqq k \leqq n} p_k\, q_k}$; finalmente admita-se que $\lim_{n \uparrow \infty} B_n = \infty$, afim de assegurar que as variáveis X_{nk} saiam infinitesimais. Então, escolhendo

$$P > \sup_n (1\, B_n) \quad \text{e} \quad A_{nk} = {}_P E_{nk}, \quad \text{tem-se} \quad A_{nk} \equiv 0$$

e, portanto, as leis i. d. associadas que constam de *d)* são definidas por

$$\log g_n(t) + i\, S_n \cdot t = \sum_{1 \leqq k \leqq n} \left(q_k \cdot e^{-i p_k t / B_n} + p_k \cdot e^{i q_k t / B_n} - 1\right).$$

Depois(*) use-se 14); sendo n suficientemente grande, resulta, se $u < 0$, $G_n(u) = 0$ e, se $u > 0$,

---

(*) Caso se deseje obter a f. c. da soma genérica de *a)*, use-se a fórmula 9); sai

$$\log f_n(t) = -\, i S_n \cdot t + \sum_{1 \leqq k \leqq n} \log\left(q_k \cdot e^{-i p_k t / b_n} + p_k \cdot e^{i q_k t / B_n}\right).$$

$$G_n(u) = \sum_{1 \leq k \leq n} \left(q_k \cdot \frac{p_k^2/B_n^2}{1+p_k^2/B_n^2} + p_k \cdot \frac{q_k^2/B_n^2}{1+q_k^2/B_n^2} \right) =$$

$$= \sum_{1 \leq k \leq n} \left(\frac{q_k p_k^2}{B_n^2} + \frac{p_k q_k^2}{B_n^2} - \frac{q_k p_k^4/B_n^4}{1+p_k^2/B_n^2} - \frac{p_k q_k^4/B_n^4}{1+q_k^2/B_n^2} \right) \geq 1 -$$

$$-(1/B_n^4) \cdot \sum_{1 \leq k \leq n} [p_k q_k (p_k^2 - p_k q_k + q_k^2)] \geq 1 - 1/B_n^2 \longrightarrow 1,$$

quando $n \uparrow \infty$.

Conclui-se que $G_n(u)$ tende completamente para uma das funções $G(u)$ do exemplo 2.º de § 11 de A. Este facto, o teorema I de § 3 de B, a possibilidade de dispor das constantes S_n em *d)* ou 15) e o nosso teorema III mostram que aqui existem constantes S_n tais que as somas de *a)* convergem para uma variável casual normal. A variância de qualquer lei limite é 1 [A, exemplo 4.º de § 8].

Convém assinalar que mais adiante encontraremos outros tratamentos mais simples do nosso exemplo.

Suponhamos que existem constantes S_n tais que as leis das somas de *a)* de III convergem para uma lei limite de f. c. $f(t)$ e consideremos constantes S'_n às quais fazemos corresponder as somas

a') $$X'_n = X_{n1} + X_{n2} + \cdots + X_{nk_n} - S'_n.$$

Quando se parte de *a')*, os logaritmos das f. c. i. d. associadas às constantes A_{nk} e às variáveis X_{nk} obtêm-se de 15), mudando S_n em S'_n e $g_n(t)$ em $g'_n(t)$. Sai

$$\log g_n(t) - \log g'_n(t) = i(S'_n - S_n)\, t,$$

onde, pela hipótese feita e devido a III, $\log g_n(t) \xrightarrow{s} \log f(t)$, quando $n \uparrow \infty$, com $\log f(t) \neq \infty$ [A, V e I de § 9].

Admitindo agora que as leis das somas de *a')* convergem para uma lei limite de f. c. $f'(t)$, resulta de III que $\log g'_n(t) \xrightarrow{s} \log f'(t) \neq \infty$; portanto, $S'_n - S_n \longrightarrow S \neq \infty$. Inversamente, se o limite S existe e é finito, sai a relação

$\log g_n'(t) \xrightarrow{s} \log f(t) - i\,S\,t$ e as leis de *a')* convergem para uma lei limite de f. c. $f'(t) = f(t) \cdot e^{-iSt}$.

Em conclusão, temos a proposição seguinte:

III') «Convergindo as somas de *a)* de III para uma lei limite, as somas de *a')* convergem também para uma lei limite, possìvelmente diferente da primeira, *quando e só quando* existe uma constante real S tal que

$$\lim_{n \uparrow \infty} (S_n' - S_n) = S \neq \infty .$$

Verificada esta condição, sai igual a iSt a diferença entre os logaritmos das funções características das leis limite correspondentes a *a)* e a *a')*.»

* * *

Um teorema de Kkintchine. Caso uma variável casual X seja limite (fraco) de somas da forma *a)* de *I*, onde $k_n \longrightarrow \infty$, quando $n \uparrow \infty$, os símbolos S_n significam constantes e os X_{nk} $(k = 1, 2, \ldots, k_n)$ representam variáveis casuais independentes por linhas e assintòticamente constantes, então a lei de X é i. d. [III e observação anexa, bem como V de § 9 de A].

Posto isso, consideremos uma variável casual i. d. arbitrária e uma sucessão qualquer de números naturais $l_n \longrightarrow \infty$, quando $n \uparrow \infty$. Então, dado n, pode igualar-se a variável escolhida à soma de l_n variáveis *independentes,* i. d. e idênticamente distribuidas [A, 2) de § 9]; a f. c. comum das l_n parcelas depende de n e tende fracamente para 1, quando $n \uparrow \infty$ [A, texto antes de I de § 9]. Concluímos que as parcelas das diversas decomposições da variável considerada, correspondentes aos diferentes valores de n, formam uma sucessão dupla de variáveis casuais *infinitesimais* [B, VII de § 4].

As considerações que acabámos de fazer provam o belo *teorema* de KHINTCHINE:

IV) «Coincidem as seguintes classes de leis:

a) a classe das leis infinitamente divisíveis;

b) a classe das leis dos limites (fracos) de somas da forma $X_{n1} + X_{n2} + \cdots + X_{nk_n} - S_n$, onde $k_n \longrightarrow \infty$, quando

$n \uparrow \infty$, os S_n significam constantes e os $X_{nk} (k = 1, 2, \ldots, k_n)$ representam variáveis casuais independentes por linhas e assintòticamente constantes;

c) a classe das leis mencionadas em *b)*, para as quais $k_n = n$, $S_n = 0$ e as variáveis X_{nk}, além de serem independentes por linhas e assintòticamente constantes, são cumulativamente infinitesimais, infinitamente divisíveis e idênticamente distribuídas por linhas;

d) toda a classe de leis que se encontre em condições intermédias às de *b)* e de *c)*.»

O mérito deste resultado é inquestionável.

* * *

Subconvergência. Para terminar este parágrafo vamos fazer uma aplicação de certos resultados aqui alcançados ao estudo da *subconvergência* (isto é, da convergência ao longo de subsucessões) das somas de *a)* de III. As considerações que vamos empreender levar-nos-ão à proposição seguinte:

V) «Dadas as variáveis casuais X_{nk}, independentes por linhas e infinitesimais, é possível encontrar constantes S_n que permitam extrair da sucessão das leis das somas

a) $$X_n = X_{n1} + X_{n2} + \cdots + X_{nk_n} - S_n$$

uma subsucessão (fracamente) convergente para uma lei limite, *quando e só quando* existem constantes assintóticas A_{nk} (das variáveis X_{nk}), sujeitas a restrições *b)* e *c)* iguais às restrições homólogas de III, tais que, pondo

d) $$G_n(u) = \sum_{1 \leq k \leq k_n} \int_{-\infty}^{u} \frac{x^2}{1+x^2} \, dF_{nk}(x + A_{nk}),$$

a sucessão $G_n(+\infty)$ admite uma subsucessão convergente $G_j(+\infty)$ e, além disso, uma subsucessão fracamente convergente $G_i(u)$, extraída da sucessão $G_j(u)$, satisfaz à relação (*)

(*) A seguir subentende-se que $u \downarrow -\infty$ ou $u \uparrow +\infty$ ao longo dos pontos em que existe $\lim\limits_{i \uparrow +\infty} G_i(u)$.

e) $$\lim_{i\uparrow+\infty} G_i(+\infty) \leqq \lim_{u\uparrow+\infty} \lim_{i\uparrow+\infty} G_i(u) - \lim_{u\downarrow-\infty} \lim_{i\uparrow+\infty} G_i(u).$$

Quando ocorre a condição necessária e suficiente anterior, então a sucessão X_i correspondente à sucessão G_i admite constantes S_i que a tornam uma subsucessão convergente extraída de *a)*.

Caso a condição necessária e suficiente se verifique para certos índices i e para certas constantes assintóticas, sujeitas a *b)* e *c)*, então ela verifica-se para os mesmos índices i e para todas as constantes assintóticas análogas.»

Demonstração de V: Suponhamos primeiro que é possível encontrar constantes S_n que estejam nas condições do enunciado.

Então, escolhendo *quaisquer* constantes assintóticas A_{nk} de acordo com *b)* e *c)*, sucede que a toda a subsucessão convergente X_i, extraída de *a)*, fica correspondendo uma sucessão de funções $G_i(u)$, extraída de *d)*, tal que as fórmulas 14) e 17), com i em lugar de n, permitem escrever $G_i(u) \xrightarrow{c} G(u)$. Logo

$$\lim_{i\uparrow+\infty} G_i(+\infty) \leqq G(+\infty) - G(-\infty) =$$

$$= \lim_{u\uparrow+\infty} \lim_{i\uparrow+\infty} G_i(u) - \lim_{u\downarrow-\infty} \lim_{i\uparrow+\infty} G_i(u).$$

Acabamos de mostrar que a subconvergência das somas de *a)* implica a condição expressa no enunciado e passamos agora a provar a implicação inversa.

Para este efeito, começamos por admitir que existem constantes assintóticas A_{nk}, sujeitas a *b)* e *c)*, tais que a sucessão $G_n(+\infty)$ que se obtém de *d)*, quando se põe $u=+\infty$, possui uma subsucessão convergente $G_j(+\infty)$.

Suponhamos primeiro que $G_j(+\infty) \to 0$. Então, temos $G_j(u) \xrightarrow{c} 0$ e a relação *e)* é satisfeita trivialmente; doutro lado, tomando constantes S_j convenientes, correspondem somas X_j cujas leis tendem, de acordo com a demonstração de III, para uma lei limite i. d., a qual sai imprópria [A, exemplo 1.º de § 11].

Suponhamos agora que $G_j(+\infty) \to J \neq 0, \infty$. Então, a sucessão $G_j(u)/\sup_j G_j(+\infty)$ é de funções de quase-distribuição e como tal reparte-se por subsucessões $G_i(u)/\sup_j G_j(+\infty)$, cada uma das quais converge fracamente para uma função de quase-distribuição [A, III' de § 5].

Considerando a subsucessão especial referida no enunciado, sai $G_i(u) \xrightarrow{s} G(u)$, onde $G(u)$ é uma função de quase-distribuição, a menos dum factor constante. Se existisse um ponto de continuidade u da função G tal que $G(u) - J = \varepsilon > 0$, resultava, para i suficientemente grande, $G_i(u) > G(u) - \varepsilon/2 = J + \varepsilon/2 > G_i(+\infty)$; como isso é impossível, tem-se $J \geqq G(u)$, para *todo* o valor de u, donde $J \geqq G(+\infty)$. Doutro lado, a relação *e)* implica $J \leqq G(+\infty) - G(-\infty)$.

Concluímos não só que $G(-\infty) = 0$ e $G(+\infty) = J$, de modo que $G(u)$ sai uma função de distribuição, a menos dum factor constante não-negativo, como também que $G_i(u) \xrightarrow{c} G(u)$ e, consequentemente, que podemos dispor das constantes S_i de 15) por forma tal que as leis das somas X_i tendam para uma lei limite.

Para terminar a demonstração, notemos que a condição necessária e suficiente, relativa a certos índices i e a certas constantes assintóticas, sujeitas a *b)* e *c)*, implica que existem constantes S_i que tornam as somas X_i convergentes e que isso implica, por sua vez, a condição necessária e suficiente, com os mesmos índices i e com *quaisquer* constantes assintóticas análogas.

Observações:

1.ª: O caso em que as variáveis X_{nk} de *a)* de V são assintòticamente constantes, mas não infinitesimais, pode resolver-se pelas translações referidas na observação ao teorema III.

2.ª: Se a sucessão $G_n(+\infty)$ de *d)* de V tiver limite infinito para certas constantes assintóticas sujeitas a *b)* e *c)*, então não pode haver subsucessão convergente extraída de *a)*. Mais, se a sucessão $G_n(+\infty)$ for ilimitada para certas constantes assintóticas sujeitas a *b)* e a *c)*, então as leis das somas X_n admitem subsucessões que saem divergentes, isso sejam quais forem as constantes S_n.

3.ª: Se $G_i(+\infty) \longrightarrow J < +\infty$ e $G_i(u) \xrightarrow{s} G(u)$, então, seja qual for o índice i e seja qual for o ponto de *continuidade* u da função G, temos sempre a desigualdade

$$|J - G(+\infty)| \leq |J - G_i(+\infty)| + |G_i(+\infty) - G_i(u)| +$$
$$+ |G_i(u) - G(u)| + |G(u) - G(+\infty)|,$$

da qual se depreende que $G(+\infty) = J$, desde que se verifique a condição seguinte: Quando $u \uparrow \infty$, ao longo duma sucessão, as funções $G_i(u)$ tendem para $G_i(+\infty)$, uniformemente ao longo duma subsucessão (infinita) de valores do índice i, ou, na alternativa, quando $h \uparrow \infty$, onde h significa uma sucessão extraída da sucessão i, $G_h(u)$ tende para $G(u)$, uniformemente ao longo de pontos u (de continuidade da função G) que formem uma sucessão divergente para $+\infty$. — Substituindo na desigualdade acima referida J por 0 e $+\infty$ por $-\infty$, pode estabelecer-se uma condição análoga à anterior, debaixo da qual $G(-\infty) = 0$.

4.ª: Se tivermos em conta que toda a sucessão (numérica) convergente é limitada e que toda a sucessão (infinita) limitada admite uma subsucessão convergente, então 4) de § 4 de B e as desigualdades que precedem VII' de § 7 de B permitem afirmar que a sucessão

$$\sum_{1 \leq k \leq k_n} \int_R \frac{x^2}{1+x^2} \, dF_{nk}(x + A_{nk})$$

possui uma subsucessão convergente ou (infinita) limitada, quando e só quando existe um número $D > 0$ tal que a sucessão

$$\sum_{1 \leq k \leq k_n} \int_R h_D(x) \, dF_{nk}(x + A_{nk})$$

admite uma subsucessão (infinita) limitada ou, equivalentemente, tal que as duas sucessões

$$\sum_{1 \leq k \leq k_n} \int_{|x| \leq D} x^2 \, dF_{nk}(x + A_{nk})$$

e

$$\sum_{1 \leq k \leq k_n} \int_{|x| > D} dF_{nk}(x + A_{nk})$$

saem conjuntamente limitadas ao longo duma subsucessão (infinita) de valores de n.

5.ª: A demonstração feita esclarece que a convergência da sucessão $G_n(+\infty)$ *não é suficiente* para impor a existência de constantes S_n que tornem convergentes ou subconvergentes as somas X_n, salvo no caso $G_n(+\infty) \to 0$, no qual as leis das variáveis X_n se podem fazer tender para uma lei imprópria.

§ 3) Teoremas gerais de convergência

Primeiro teorema de convergência. Já usámos, uma vez por outra, o teorema de GNEDENKO e KHINTCHINE, estabelecido em § 2, para tratar casos concretos de convergência de somas de variáveis casuais independentes. Passamos agora a fazer o seu uso orientado em vista à resolução do problema geral que é o objecto deste capítulo.

As fórmulas 14) e 15) de § 2 mostram que a representação de LÉVY e KHINTCHINE das leis i. d. associadas que se introduziram através de *d)* de III de § 2 é caracterizada como segue [A, 1) de § 11]:

1) $$a_n = - S_n + \sum_{1 \leq k \leq k_n} \left[A_{nk} + \int_R \frac{x}{1+x^2} \, dF_{nk}(x + A_{nk}) \right];$$

2) $$G_n(u) = \sum_{1 \leq k \leq k_n} \int_{-\infty}^{u} \frac{x^2}{1+x^2} \, dF_{nk}(x + A_{nk}).$$

Ora, a convergência das leis das somas de *a)* de III de § 2 para alguma lei limite é concomitante com a convergência das leis i. d. individualizadas pelas fórmulas 1) e 2) para a mesma lei limite e esta convergência, por sua vez, é governada pelo teorema I de § 3 de B, com a particularidade de ser possível satisfazer à condição $a_n \longrightarrow a$, dispondo convenientemente das constantes S_n. Daí inferimos a parte principal e de III e III' de § 2 inferimos a parte final da proposição seguinte, a que podemos chamar *primeiro teorema de convergência:*

I) «Dadas as variáveis casuais X_{nk}, independentes por linhas, infinitesimais(*) e tendo as funções de distribuição $F_{nk}(x)$, para que possam determinar-se constantes S_n que tornem as leis das somas

$$a)\qquad X_n = X_{n1} + X_{n2} + \cdots + X_{nk_n} - S_n$$

(fracamente) convergentes para uma lei limite (infinitamente divisível), quando $n \uparrow \infty$, *é condição necessária e suficiente* que, representando por P e Q dois números positivos arbitrários, existam constantes assintóticas A_{nk} (das variáveis X_{nk}), sujeitas à restrição de sair a desigualdade, válida para n suficientemente grande e uniformemente em k,

$$b)\qquad \inf\left[\int_{|x|\leqq P} x\,dF_{nk}(x),\ \int_{|x|\leqq Q} x\,dF_{nk}(x)\right] - \xi_{nk} \leqq A_{nk} \leqq$$
$$\leqq \sup\left[\int_{|x|\leqq P} x\,dF_{nk}(x),\ \int_{|x|\leqq Q} x\,dF_{nk}(x)\right] + \zeta_{nk},$$

onde ξ_{nk} e ζ_{nk} significam números não-negativos que satisfazem a

$$c)\qquad \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leqq k\leqq k_n} \xi^2_{nk} = \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leqq k\leqq k_n} \zeta^2_{nk} = 0,$$

e que exista mais uma função $G(u)$ que é de distribuição, a menos dum factor constante não-negativo, tais que as grandezas A_{nk} e $G(u)$ verificam a relação

$$d)\qquad \sum_{1\leqq k\leqq k_n} \int_{-\infty}^{u} \frac{x^2}{1+x^2}\,dF_{nk}(x + A_{nk}) \xrightarrow{c} G(u), \quad \text{quando } n \uparrow \infty.$$

(*) O caso em que as variáveis são assintòticamente constantes, sem serem infinitesimais, pode resolver-se pelas translações referidas na observação ao teorema III de § 2.

Satisfeita esta condição, o conjunto das constantes S_n admissíveis é dado pela fórmula(*)

$$e) \quad S_n = \sum_{1 \leq k \leq k_n} \left[A_{nk} + \int_R \frac{x}{1+x^2}\, dF_{nk}(x + A_{nk}) \right] - a_n ,$$

onde a_n representa o termo geral duma sucessão (real) convergente arbitrária.

O limite da sucessão a_n, seja a, e a função $G(u)$ caracterizam a lei limite sob a forma de Lévy e Khintchine.

Se a relação *d)* ocorre para uma certa sucessão de constantes assintóticas sujeitas a *b)* e *c)*, então ela tem lugar para todas as sucessões análogas, sempre com a mesma função limite $G(u)$.

Quando se pretende simultâneamente que as somas de *a)* sejam convergentes e que seja possível tomar $S_n \to 0$ (ou $S_n \equiv 0$), a condição necessária e suficiente continua a ser a mesma anterior, mas acrescida da imposição que os somatórios que figuram em *e)* devem formar uma sucessão convergente.»

Observação: Quando convergem as somas de *a)*, as leis limite só podem diferir umas das outras, caso apresentem valores distintos para o limite da sucessão a_n. Então, as constantes S_n, definidas a menos dum infinitésimo, determinam os termos da sucessão a_n, também a menos dum infinitésimo, e vice-versa (III' de § 2). Logo, fixado o limite a da sucessão a_n, a diferença de quaisquer duas somas possíveis $S_n + a_n$, correspondentes ao mesmo valor de n, tem limite nulo, quando $n \uparrow \infty$. Daí pode concluir-se, escolhendo $U > 0$ de modo que $\pm U$ sejam pontos de continuidade de $G(u)$ e pondo $A_{nk} = {}_U E_{nk}$ (ver 4) de § 2), que

$$\lim_{n \uparrow \infty} \sum_{1 \leq k \leq k_n} \int_R \frac{x}{1+x^2}\, dF_{nk}(x + {}_U E_{nk}) \overset{(**)}{=}$$

(*) Ou por $e_{\mathrm{I}})$ da observação seguinte.

(**) A justificação desta passagem dar-se-á mais adiante na observação ao teorema II e em 12).

$$=\int_{|u|\geqq U}\frac{dG(u)}{u}-\int_{|u|<U}u\,dG(u)=c(U),^{(*)}$$

donde se tira uma variante de *e)*, a saber

$$e_I)\;S_n=\sum_{1\leqq k\leqq k_n}\int_{|x|\leqq U}x\,dF_{nk}(x)-(a_n-c(U)).$$

Uma alternativa curiosa é fazer

$$A_{nk}={}_UE_{nk}+\eta_{nk},\qquad\text{com}\qquad\lim_{n\uparrow\infty}\sum_{1\leqq k\leqq k_n}\eta_{nk}=\eta,$$

escolha esta que é compatível com *b)* e *c)* de I, para obter de *e)* e $e_I)$ a igualdade

$$\lim_{n\uparrow\infty}\sum_{1\leqq k\leqq k_n}\int_R\frac{x}{1+x^2}\,dF_{nk}(x+{}_UE_{nk}+\eta_{nk})=-\eta+c(U).$$

Exemplo: Vamos retomar e completar o exemplo relativo ao teorema III de § 2, com $A_{nk}={}_UE_{nk}\equiv 0$. A fórmula *e)* de I dá agora

$$S_n=-a_n+\sum_{1\leqq k\leqq n}\left(q_k\cdot\frac{-p_k/B_n}{1+p_k^2/B_n^2}+p_k\cdot\frac{q_k/B_n}{1+q_k^2/B_n^2}\right),$$

mas é preferível usar $e_I)$ que dá imediatamente $S_n=-a_n$. Desejando, pode tomar-se $S_n\longrightarrow 0$ ou $S_n\equiv 0$, donde $a=0$.

Outro exemplo: Consideremos a sucessão dupla de variáveis casuais $X_{nk}(n=2,3,\ldots;\ k=1,2,\ldots,2n)$, independentes por linhas e tendo as funções de distribuição

$$F_{nk}(x)=\frac{n^2-k}{\pi n^2}\cdot\left(\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}\frac{n^2x}{k}\right)+\frac{k}{n^2}\cdot\delta(x),$$

com $\delta(x)=0$ ou x^2 ou 1, conforme $x\leqq 0$ ou $0\leqq x\leqq 1$ ou $x\geqq 1$. Então, dado ε tal que $0<\varepsilon\leqq 1$, tem-se

(*) Se a lei limite for simétrica com respeito a alguma constante real, a função $c(U)$ aqui definida sai nula [B, II de § 2].

$$\sup_k [F_{nk}(-\varepsilon)+1-F_{nk}(+\varepsilon)]=$$
$$=\sup_k\left(1-2\frac{n^2-k}{\pi n^2}\operatorname{arctg}\frac{n^2\varepsilon}{k}-\frac{k\varepsilon^2}{n^2}\right)\longrightarrow 0,$$

quando $n\uparrow\infty$, o que prova que as nossas variáveis são infinitesimais. Além disso,

$$\int_{|x|\leq 1} x\,dF_{nk}(x)=\frac{2k}{3n^2} \quad \text{e} \quad \sum_k\left(\frac{2k}{3n^2}\right)^2=\frac{4n(2n+1)\cdot(4n+1)}{27n^4}\longrightarrow 0,$$

donde concluímos que podemos usar I, com $A_{nk}\equiv 0$. Resulta

$$G_n(u)=\sum_k\int_{-\infty}^{u}\frac{x^2}{1+x^2}\,dF_{nk}(x)=$$
$$=\sum_k\left[\frac{k}{\pi(k+n^2)}\left(\operatorname{arc\,tg} u-\frac{k}{n^2}\cdot\operatorname{arc\,tg}\frac{n^2u}{k}\right)+\frac{k(n^2-k)}{2n^2(k+n^2)}+\right.$$
$$\left.+\frac{k}{n^2}\cdot\int_{-\infty}^{u}\frac{x^2}{1+x^2}\,d\delta(x)\right];$$

em particular,

$$G_n(+\infty)=\sum_k\left[\frac{k(n^2-k)}{n^2(k+n^2)}+\frac{k}{n^2}\cdot(1-\log 2)\right].$$

Logo, tendo em vista que $\sum_k k=n(2n+1)$, que

$$\frac{n^2-2n}{2n+n^2}\leq\frac{n^2-k}{k+n^2}\leq\frac{n^2-1}{1+n^2} \quad \text{e que} \quad \frac{1}{2n+n^2}\leq\frac{1}{k+n^2}\leq\frac{1}{1+n^2},$$

saem as relações $G_n(+\infty)\longrightarrow 2+2(1-\log 2)$ e, dado u finito,

$$G_n(u)\longrightarrow\frac{2}{\pi}\cdot\operatorname{arc\,tg} u+1+2\cdot\int_{-\infty}^{u}\frac{x^2}{1+x^2}\,d\delta(x)=G(u),$$

a última das quais implica $G(-\infty)=0$ e $G(+\infty)=2+2\cdot(1-\log 2)$. Portanto, $G_n(u)\xrightarrow{c} G(u)$, de modo que existem constantes S_n que tornam as leis das somas de *a)* convergentes para uma lei limite (i. d.). Finalmente, as constantes S_n admissíveis podem determinar-se por *e)* ou *e_I)*, aqui de preferência por *e)*, e calculam-se, através de contas elementares, em $S_n = 4 - \pi - a_n$. Acrescentamos que $G^{(*)}(u) = (2/\pi) \cdot \text{arc tg}\, u + 1$ corresponde a uma componente da lei limite que é de CAUCHY [exemplo 4.º de § 11 de A, com $\alpha = 2$].

* * *

Segundo teorema de convergência. Passamos agora a representar as leis i. d. de *d)* de III de § 2 e a sua lei limite, se a houver, sob a forma de LÉVY modificada.

Então, usando 1) e 2) do texto e B, 3) de § 3, com o sinal + na última expressão(*), obtemos as relações seguintes [A, 8) e I de § 5 e 8) de § 10]:

$$3)\quad b_n^2 = 0\,;\ \text{para } u < 0\,, M_n(u) = \sum_{1 \leq k \leq k_n} \int_{-\infty}^{u} d\,F_{nk}(x + A_{nk})\,;$$

$$\text{para } u > 0\,, N_n(u) = \sum_{1 \leq k \leq k_n} \int_{u+}^{+\infty} d\,F_{nk}(x + A_{nk})\,.$$

Usando 1) e 2) do texto e B, § 3, 5) e a observação anexa a II, obtemos anàlogamente a relação seguinte, onde U significa um número positivo *arbitrário,*

$$a_n(U) = -S_n + \sum_k \left[A_{nk} + \int_R \frac{x}{1+x^2}\, d\,F_{nk}(x + A_{nk}) \right] +$$
$$+ \sum_k \int_{|x| < U} \frac{x^3}{1+x^2}\, d\,F_{nk}(x + A_{nk}) - \sum_k \int_{|x| \geqq U} \frac{x}{1+x^2}\, d\,F_{nk}(x + A_{nk}),$$

a qual se simplifica para

$$4)\quad a_n(U) = -S_n + \sum_{1 \leq k \leq k_n} \left[A_{nk} + \int_{|x| < U} x\, d\,F_{nk}(x + A_{nk}) \right].$$

Sabemos que a convergência das leis das somas de *a)* de I para alguma lei limite é concomitante com a convergência das leis i. d. individualizadas pelas fórmulas 3) e 4) para a mesma lei limite e que esta última convergência é governada pelo teorema II de § 3 de B e a observação anexa,

(*) Quer dizer, interpretamos os integrais do ponto de vista da medida.

com a particularidade de ser possível satisfazer à condição $a_n(U) \longrightarrow a(U)$, dispondo convenientemente das constantes S_n. Este facto permite-nos imitar a dedução que nos levou de 1) e 2) a I para tirarmos de 3) e 4) outra proposição, à qual vamos chamar *segundo teorema de convergência* e que passamos a enunciar:

II) «Dadas as variáveis casuais X_{nk}, independentes por linhas, infinitesimais(*) e tendo as funções de distribuição $F_{nk}(x)$, para que possam determinar-se constantes S_n que tornem as leis das somas de *a)* de I (fracamente) convergentes para uma lei limite (infinitamente divisível), quando $n \uparrow \infty$, *é condição necessária e suficiente* que existam constantes assintóticas A_{nk} (das variáveis X_{nk}), sujeitas a relações *b)* e *c)* iguais às relações homólogas de I, e que existam mais uma constante não-negativa b^2 e duas funções, $M(u)$ e $N(u)$, a primeira definida para $u<0$, não-decrescente (, semicontínua à esquerda) e nula no ponto $-\infty$ e a outra definida para $u>0$, não-crescente (, contínua à direita) e nula no ponto $+\infty$, ambas sujeitas à restrição

$$\int_{-\varepsilon}^{0-} u^2\, d\, M(u) + \int_{0+}^{+\varepsilon} u^2\, d\, N(u) < +\infty, \text{ para qualquer } \varepsilon > 0,$$

tais que as grandezas A_{nk}, b^2, $M(u)$ e $N(u)$ verificam as três relações seguintes:

d_1) $$\lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq k_n} F_{nk}(u + A_{nk}) = M(u),$$

isso em todo o ponto $u<0$ que é de continuidade da função M,

d_2) $$\lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq k_n} [1 - F_{nk}(u + A_{nk})] = N(u),$$

isso em todo o ponto $u>0$ que é de continuidade da função N, e

d_3) $$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \lim_{n\uparrow\infty} \max \sum_{1\leq k\leq k_n} \int_{|x|<\varepsilon} x^2\, d\, F_{nk}(x + A_{nk}) =$$
$$= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \lim_{n\uparrow\infty} \min \sum_{1\leq k\leq k_n} \int_{|x|<\varepsilon} x^2\, d\, F_{nk}(x + A_{nk}) = b^2.$$

(*) Repete-se a nota ao teorema I.

Satisfeita esta condição, o conjunto das constantes S_n admissíveis é dado pela fórmula (•)

$$e) \qquad S_n = \sum_{1 \leq k \leq k_n} \left[A_{nk} + \int_{|x|<U} x \, dF_{nk}(x + A_{nk}) \right] - a_n(U),$$

onde $U > 0$ é arbitrário, debaixo da restrição de $\mp U$ serem pontos de continuidade das funções M e N, respectivamente, e onde $a_n(U)$ representa o termo genérico duma sucessão (real) convergente arbitrária.

O limite da sucessão $a_n(U)$, seja $a(U)$, a constante b^2 e as funções $M(u)$ e $N(u)$ caracterizam a lei limite sob a forma de Lévy modificada.

Se as relações *d_1)* a *d_3)* ocorrem para uma certa sucessão de constantes assintóticas sujeitas a *b)* e *c)*, as mesmas relações têm lugar para todas as sucessões análogas, a primeira sempre com a mesma função $M(u)$, a segunda sempre com a mesma função $N(u)$ e a última sempre com a mesma constante b^2.

Quando se pretende simultâneamente que as somas de *a)* de I sejam convergentes e que seja possível tomar $S_n \equiv 0$, a condição necessária e suficiente anterior completa-se do mesmo modo que na parte final de I.»

Observação: Admitida a convergência das somas de *a)* de I e escolhidos $U > 0$ e uma sucessão de constantes assintóticas A_{nk} de acordo com II, vemos, pelas expressões *e)* de I e II, pela primeira parte da observação ao teorema I e pela fórmula 13) de § 11 de A, que tem lugar a relação

$$\lim_{n \uparrow \infty} \left[\sum_k \int_R \frac{x}{1+x^2} \, dF_{nk}(x + A_{nk}) - \sum_k \int_{|x|<U} x \, dF_{nk}(x + A_{nk}) \right] =$$
$$= \int_{|u| \geq U} \frac{dG(u)}{u} - \int_{|u|<U} u \, dG(u),$$

a qual mostra que os dois somatórios convergem ou diver-

(•) Ou por *e_{II})* da observação seguinte.

gem simultâneamente, quando $n \uparrow \infty$. Doutro lado, é possivel deduzir a igualdade

$$\lim_{n\uparrow\infty} \sum_k \int_{|x|<U} x\, dF_{nk}(x + {}_U E_{nk}) = 0,\text{(*)}$$

a qual justifica a observação ao teorema I, prova que a expressão *e)* de II pode tomar o aspecto

$$e_{II})\qquad S_n = \sum_{1\leq k\leq k_n} \int_{|x|\leq U} x\, dF_{nk}(x) - a_n(U)$$

e permite concluir de *e)* e $e_{II})$ que se verifica a relação

$$\lim_{n\uparrow\infty} \sum_k \int_{|x|<U} x\, dF_{nk}(x + {}_U E_{nk} + \eta_{nk}) = -\eta,$$

com respeito à qual valem as mesmas convenções da observação anterior.

Exemplo: Retomemos o primeiro exemplo relativo ao teorema I. Logo se vê que, para n suficientemente grande, as somas contidas em $d_1)$ e em $d_2)$ de II ficam nulas; portanto, sai $M(u) \equiv 0$ e $N(u) \equiv 0$ e só podemos ter uma lei limite de Gauss [A, exemplo 2.º de § 11]. A soma de integrais contida em $d_3)$ reduz-se, para n suficientemente grande, a

$$\sum_{1\leq k\leq n} (q_k\, p_k^2 + p_k\, q_k^2)/B_n^2 = 1,$$

de modo que resulta $b^2 = 1$. Finalmente, a fórmula *e)* de II ou, talvez melhor, a fórmula $e_{II})$ dá $S_n = -a_n(U)$.

Outro exemplo: Retomemos agora o segundo exemplo relativo ao teorema I. Tendo em vista os cálculos anteriores e mais que a função $M(u)$ da representação de Lévy da componente de Cauchy da lei limite é $-2/(\pi u)$, para $u<0$, a relação $d_1)$ de II permite estabelecer o resultado

(*) A dedução desta igualdade far-se-á em 12).

$$\lim_{n \uparrow \infty} \sum_{1 \leq k \leq 2n} \left(\frac{\pi}{2} \pm \operatorname{arc\,tg} \frac{n^2 u}{k} \right) = \mp \frac{2}{u},$$

conforme $u<0$ ou $u>0$.

* * *

Terceiro teorema ou teorema fundamental de convergência. A comparação dos integrais de *d)* e de *e)* de I com os que figuram em d_1) a d_3) e em *e)* de II sugere um certo ganho de simplicidade no sentido dos primeiros para os últimos que é pelo menos formal e, muitas vezes, se torna efectivo. Em contrapartida, os processos de passagem ao limite complicam-se em geral, quando se passa da condição necessária e suficiente de I para a de II.

Sejam quais forem os méritos relativos dos dois teoremas referidos, eles padecem duma desvantagem comum: Embora haja uma certa liberdade de escolha das constantes assintóticas no âmbito das relações *b)* e *c)*, esta liberdade está longe de ser completa e as constantes que se afiguram mais cómodas, os zeros, podem ficar vedadas. Assim se compreende, quanto é importante remodelar a condição necessária e suficiente de convergência das somas de variáveis independentes e infinitesimais, por forma que possam usar-se constantes assintóticas idênticamente nulas em todos os casos.

Conseguido este objectivo, não haverá qualquer dificuldade em estender a condição necessária e suficiente encontrada ao caso das variáveis assintòticamente constantes arbitrárias (nem sempre infinitesimais).

O desenvolvimento das ideias apresentadas conduz ao terceiro teorema ou teorema fundamental de convergência, o qual é devido a GNEDENKO e constitui *o ponto culminante de toda a teoria aqui feita.* Ei-lo:

III) «Dadas as variáveis casuais X_{nk}, com $1 \leq k \leq k_n$ e $k_n \longrightarrow \infty$, quando $n \uparrow \infty$, independentes por linhas, assintòticamente constantes e tendo as funções de distribuição $F_{nk}(x)$, para que possam determinar-se constantes S_n que tornem as leis das somas

a) $$X_n = X_{n1} + X_{n2} + \cdots + X_{nk_n} - S_n$$

(fracamente) convergentes para uma lei (infinitamente divisível), quando $n \uparrow \infty$, *é condição necessária e suficiente* que existam constantes assintóticas A_{nk} (das variáveis X_{nk}), uma constante não-negativa b^2 e duas funções, $M(u)$ e $N(u)$, a primeira definida para $u<0$, não-decrescente (, semicontínua à esquerda) e nula no ponto $-\infty$ e a outra definida para $u>0$, não-crescente (, contínua à direita) e nula no ponto $+\infty$, ambas sujeitas à restrição

$$\int_{-\varepsilon}^{0-} u^2 dM(u) + \int_{0+}^{+\varepsilon} u^2 dN(u) < +\infty, \text{ para qualquer } \varepsilon > 0,$$

tais que as grandezas $A_{nk}, b^2, M(u)$ e $N(u)$ verificam as três relações seguintes:

b_1) $$\lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq k_n} F_{nk}(u + A_{nk}) = M(u),$$

isso em todo o ponto $u<0$ que é de continuidade da função M,

b_2) $$\lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq k_n} [1 - F_{nk}(u + A_{nk})] = N(u),$$

isso em todo o ponto $u>0$ que é de continuidade da função N, e

b_3) $$\lim_{n\uparrow\infty} \max \sum_k \left\{ \int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x + A_{nk}) - \left[\int_{|x|<\varepsilon} x \, dF_{nk}(x + A_{nk}) \right]^2 \right\} \text{ e}$$

$$\lim_{n\uparrow\infty} \min \sum_k \left\{ \int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x + A_{nk}) - \left[\int_{|x|<\varepsilon} x \, dF_{nk}(x + A_{nk}) \right]^2 \right\}$$

tendem para b^2, quando $\varepsilon \downarrow 0$.

Satisfeita esta condição, o conjunto das constantes S_n admissíveis é dado pela fórmula

c) $$S_n = \sum_{1\leq k\leq k_n} \left[A_{nk} + \int_{|x|\leq U} x \, dF_{nk}(x + A_{nk}) \right] - a_n(U),$$

onde $U>0$ é arbitrário, debaixo da restrição de $\mp U$ serem pontos de continuidade das funções M e N, respectivamente, e onde $a_n(U)$ representa o termo geral duma sucessão (real) convergente arbitrária.

O limite da sucessão $a_n(U)$, seja $a(U)$, a constante b^2 e as funções $M(u)$ e $N(u)$ caracterizam a lei limite sob a forma de Lévy modificada.

Quando se pretende simultâneamente que as somas de *a)* sejam convergentes e que seja possível tomar $S_n \to 0$ (ou $S_n \equiv 0$), a condição necessária e suficiente compreende ainda as relações $b_1)$ a $b_3)$, mas acrescidas da imposição que os somatórios que figuram em *c)* devem formar uma sucessão convergente.

Finalmente, se as relações $b_1)$ a $b_3)$ ocorrem para uma certa sucessão de constantes assintóticas das variáveis X_{nk}, as mesmas relações têm lugar para todas as sucessões de tais constantes, a primeira sempre com a mesma função $M(u)$, a segunda sempre com a mesma função $N(u)$ e a última sempre com a mesma constante b^2.»

Demonstração de III: Supondo escolhida uma sucessão dupla *qualquer* de constantes assintóticas A_{nk} das variáveis X_{nk}, podemos pôr

$$5) \qquad X'_{nk} = X_{nk} - A_{nk} \quad \text{e} \quad S'_n = S_n - \sum_{1 \leq k \leq k_n} A_{nk}$$

e escrever *a)* sob a forma

$$a') \qquad X_n = X'_{n1} + X'_{n2} + \cdots + X'_{nk_n} - S'_n.$$

As variáveis X'_{nk} são ***infinitesimais***. Se designarmos por $F'_{nk}(x)$ as funções de distribuição dessas variáveis, então as relações $b_1)$ e $b_2)$ passam a ser

$$b'_1) \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq k_n} F'_{nk}(u) = M(u) \text{ e } b'_2) \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq k_n} [1 - F'_{nk}(u)] = N(u),$$

válidas nos pontos de continuidade de M e de N, respectivamente, e a relação $b_3)$ passa a ser

$$b'_3) \quad \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \lim_{n\uparrow\infty} \max \sum_{1\leq k\leq k_n} \left\{ \int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF'_{nk}(x) - \left[\int_{|x|<\varepsilon} x\, dF'_{nk}(x) \right]^2 \right\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \lim_{n\uparrow\infty} \min \sum_{1\leq k\leq k_n} \left\{ \int_{|x|<\varepsilon} x^2\, dF'_{nk}(x) - \left[\int_{|x|<\varepsilon} x\, dF'_{nk}(x) \right]^2 \right\} = b^2.$$

Se trabalharmos com constantes assintóticas A'_{nk} das variáveis X'_{nk} que satisfaçam a relações análogas às de *b)* e *c)* de II ou I, as igualdades $d_1)$ e $d_2)$ de II passam a ser

$d'_1)$
$$\lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq k_n} F'_{nk}(u+A'_{nk})=M(u)$$

e

$d'_2)$
$$\lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq k_n} [1-F'_{nk}(u+A'_{nk})]=N(u),$$

válidas nos pontos de continuidade de M e de N, respectivamente, e a igualdade $d_3)$ de II passa a ser

$d'_3)$
$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \lim_{n\uparrow\infty} \max \sum_{1\leq k\leq k_n} \int_{|x|<\varepsilon} x^2\, dF'_{nk}(x+A'_{nk})=$$
$$=\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \lim_{n\uparrow\infty} \min \sum_{1\leq k\leq k_n} \int_{|x|<\varepsilon} x^2\, dF'_{nk}(x+A'_{nk})=b^2.$$

Sendo assim, provar a condição necessária e suficiente de III é a mesma coisa que provar a equivalência entre o conjunto das relações $b'_1)$ a $b'_3)$ e o conjunto das relações $d'_1)$ a $d'_3)$.

Está pois delineado o plano da nossa demonstração. Antes de entrarmos em pormenores, convém recordar a propriedade [I' de § 4 de B]

6)
$$\sup_{1\leq k\leq k_n} |A'_{nk}|=L'_n \longrightarrow 0, \text{ quando } n\uparrow\infty.$$

Admitamos agora $d'_1)$. Então, fixado um ponto de continuidade u de M e dado δ, com $0<\delta<-u$, de modo tal que $u\mp\delta$ sejam pontos de continuidade de M, tiramos da desigualdade

7)
$$\sum_{1\leq k\leq k_n} F'_{nk}(u+A'_{nk}-\delta)\leq \sum_{1\leq k\leq k_n} F'_{nk}(u)\leq \sum_{1\leq k\leq k_n} F'_{nk}(u+A'_{nk}+\delta),$$

válida para n suficientemente grande, a relação

$$M(u-\delta)\leq \lim_{n\uparrow\infty} \min \sum_k F'_{nk}(u)\leq \lim_{n\uparrow\infty} \max \sum_k F'_{nk}(u)\leq M(u+\delta),$$

da qual sai $b'_1)$, fazendo $\delta\downarrow 0$.

De $b'_1)$ e da desigualdade

8) $$\sum_k F'_{nk}(u-\delta) \leqq \sum_k F'_{nk}(u+A'_{nk}) \leqq \sum_k F'_{nk}(u+\delta),$$

homóloga de 7), concluímos semelhantemente pela relação $d'_1)$.

Portanto, $b'_1)$ e $d'_1)$ são equivalentes.

Em seguida admitamos $d'_2)$. Então, fixado um ponto de continuidade u de N e dado δ, com $0<\delta<u$, por forma que $u \mp \delta$ sejam pontos de continuidade de N, tiramos de 7) que é válida, para n suficientemente grande, a relação

$$N(u-\delta) \geqq \sum_k [1-F'_{nk}(u)] \geqq N(u+\delta),$$

a qual prova $b'_2)$. Depois $b'_2)$ e 8) dão $d'_2)$. Concluímos que também $b'_2)$ e $d'_2)$ são equivalentes.

Atendendo agora a 6), podemos estabelecer, para n suficientemente grande, as relações

$$\sum_k \int_{|x|<\varepsilon/2} x^2\, dF'_{nk}(x+A'_{nk}) \leqq \sum_k \int_{|x|<\varepsilon} (x-A'_{nk})^2\, dF'_{nk}(x) \leqq$$
$$\leqq \sum_k \int_{|x|<2\varepsilon} x^2\, dF'_{nk}(x+A'_{nk}),$$

as quais provam que $d'_3)$ é equivalente a

9) $$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \lim_{n\uparrow\infty} \max \sum_{1\leqq k\leqq k_n} \int_{|x|<\varepsilon} (x-A'_{nk})^2\, dF'_{nk}(x) =$$
$$= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \lim_{n\uparrow\infty} \min \sum_{1\leqq k\leqq k_n} \int_{|x|<\varepsilon} (x-A'_{nk})^2\, dF'_{nk}(x) = b^2.$$

O penúltimo parágrafo do teorema II mostra que não há qualquer perda de generalidade, se tomarmos um número $U>0$ e pusermos

10) $$A'_{nk} = {}_U E'_{nk} = \int_{|x|\leqq U} x\, dF'_{nk}(x)$$

nas relações $d'_1)$ a $d'_3)$ ou, equivalentemente, em $d'_1)$, $d'_2)$ e 9). Procedendo deste modo, considerando $\varepsilon>0$ *arbitrário*, tomando $\delta \geqq 0$ de modo que $\mp(\varepsilon-\delta)$ sejam pontos de continuidade de

M e de N, respectivamente, e pondo $U>\varepsilon$, tiramos de 6), 10), b_1') e b_2') que a desigualdade

$$\Big|\sum_k\int_{|x|<\varepsilon}(x-A'_{nk})^2\,dF'_{nk}(x)-$$

$$-\sum_k\Big\{\int_{|x|<\varepsilon}x^2\,dF'_{nk}(x)-\Big[\int_{|x|<\varepsilon}x\,dF'_{nk}(x)\Big]^2\Big\}\Big|\leqq$$

$$\leqq\sum_k\Big\{\Big[\int_{|x|<\varepsilon}x\,dF'_{nk}(x)\Big]^2-2\cdot{}_UE'_{nk}\cdot\int_{|x|<\varepsilon}x\,dF'_{nk}(x)+{}_UE'^2_{nk}\Big\}+$$

$$+\sum_k\Big[{}_UE'^2_{nk}\cdot\int_{|x|\geqq\varepsilon}dF'_{nk}(x)\Big]\leqq\sum_k\Big[\int_{\varepsilon\leqq|x|\leqq U}|x|\,dF'_{nk}(x)\Big]^2+$$

$$+L'^2_n\cdot\sum_k\int_{|x|\geqq\varepsilon}dF'_{nk}(x)\leqq\Big[L'^2_n+U^2\cdot\sup_k\int_{|x|\geqq\varepsilon}dF'_{nk}(x)\Big]\cdot$$

$$\cdot\sum_k\int_{|x|\geqq\varepsilon-\delta}dF'_{nk}(x),$$

tem um último membro cujo segundo factor tende para $M(-\varepsilon+\delta)+N(\varepsilon-\delta)$ e cujo primeiro factor é evanescente [B, 1) de § 4]. Portanto, fixado ε, qualquer subsucessão da sucessão natural n que leve as somas correspondentes de 9) a um certo limite faz caminhar as somas correspondentes de b_3') para o mesmo limite e vice-versa. Logo, sendo válidas as relações b_1') e b_2') ou, equivalentemente, as relações d_1') e d_2'), também as igualdades b_3') e 9) saem equivalentes.

Assim fica provado que o conjunto das relações d_1') a d_3') é equivalente ao conjunto das relações b_1') a b_3') ou, o que vem a ser a mesma coisa, que o conjunto das relações b_1) a b_3) do enunciado constitui de facto uma condição necessária e suficiente.

Posto isso, vamos adaptar a expressão *e)* de II ao conjunto das constantes S'_n admissíveis, introduzidas em 5) e *a')*. Sai a fórmula

$$11)\qquad S'_n=\sum_{1\leqq k\leqq k_n}\Big[A'_{nk}+\int_{|x|<U}x\,dF'_{nk}(x+A'_{nk})\Big]-a_n(U),$$

onde os símbolos têm os significados anteriormente explicados.

Escolhamos agora as grandezas A'_{nk} de 11) de acordo com 10), o que não representa perda de constantes S'_n (III' de § 2). Então, fixado $\delta>0$ de modo que $\mp(U\pm\delta)$ sejam pontos de continuidade de M e de N, tem-se, por causa de 6), $b'_1)$ e $b'_2)$,

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_k\int_{|x|<U} x\,dF'_{nk}(x+A'_{nk})\Big|\leqq\Big|\sum_k\int_{|x|\leqq U}(x-A'_{nk})\,dF'_{nk}(x)\Big|+\\
&+\Big|\sum_k\int_{|x|=U}(x-A'_{nk})\,dF'_{nk}(x)\Big|+\Big|\sum_k\int_{|x-A'_{nk}|<U}(x-A'_{nk})\,dF'_{nk}(x)-\\
&-\sum_k\int_{|x|<U}(x-A'_{nk})\,dF'_{nk}(x)\Big|\leqq\sum_k\int_{|x|>U}|A'_{nk}|\,dF'_{nk}(x)+\\
&+\sum_k\int_{|x|=U}|x-A'_{nk}|\,dF'_{nk}(x)+\sum_k\int_{U-|A'_{nk}|\leqq|x|\leqq U+|A'_{nk}|}|x-A'_{nk}|\,dF'_{nk}(x)\leqq\\
&\leqq L'_n\cdot\sum_k\int_{|x|>U}dF'_{nk}(x)+(2U+3L'_n)\cdot\sum_k\int_{U-\delta\leqq|x|\leqq U+\delta}dF'_{nk}(x)\longrightarrow\\
&\rightarrow 2U\cdot[M(-U+\delta)-M(-U-\delta)+N(U-\delta)-N(U+\delta)],\ \text{quando } n\uparrow\infty,
\end{aligned}$$

onde, não o esqueçamos, a função M é contínua em $-U$ e a função N é contínua em $+U$. Portanto, sai a igualdade

$$12)\qquad \lim_{n\uparrow\infty}\sum_{1\leqq k\leqq k_n}\int_{|x|<U}x\,dF'_{nk}(x+A'_{nk})=0,\qquad \text{com}\quad A'_{nk}={}_UE'_{nk}.^{(*)}$$

Pois bem, de 5), 10), 11) e 12) tiramos a relação *c)* do enunciado.

As relações $b_1)$ a $b_3)$ e *c)* do enunciado envolvem grandezas $M(u)$, $N(u)$, b^2 e $a_n(U)$ que figuram também em $d'_1)$ a $d'_3)$ e em 11) e que, por isso, caracterizam a lei limite das somas de *a')* (II). Como as somas de *a')* e de *a)* são as mesmas, aquelas grandezas caracterizam também a lei limite das somas de *a)*.

O penúltimo parágrafo do enunciado é uma consequência óbvia da relação *c)* do texto e de III' de § 2.

Por fim, o último parágrafo do enunciado decorre imediatamente do facto que a forma das expressões que figuram

---

(*) A relação 12), com A, E e F em lugar de A', E' e F', permite completar os cálculos relativos às observações aos teoremas I e II.

em a') e em b'_1) a b'_3) é independente da escolha das constantes assintóticas A_{nk} que se queiram subtrair das variáveis X_{nk}.

Fica pois completa a demonstração de III.

Observação: Se designarmos por ξ_n o termo genérico duma das sucessões de variáveis casuais i. d. que o teorema III de § 2 associa às somas de a'), podemos pôr

$$\xi_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \cdots + \xi_{n\,l_n},$$

onde $l_n \longrightarrow \infty$, quando $n \uparrow \infty$, e as variáveis ξ_{nl} são i. d. e infitesimais e onde, além disso, dado n, as parcelas ξ_{nl} são independentes e idênticamente distribuídas, de modo que têm uma função de distribuição comum, a qual vamos representar por $\varphi_n(x)$ (ver texto antes de IV de § 2). Aplicando agora o terceiro teorema de convergência simultâneamente às variáveis X'_{nk} e ξ_{nl}, tira-se a relação

$$\lim_{n\uparrow\infty} \sum_k F_{nk}(u + A_{nk}) = \lim_{n\uparrow\infty} [l_n \cdot \varphi_n(u)],$$

válida nas condições de b_1), e mais a relação

$$\lim_{n\uparrow\infty} \sum_k [1 - F_{nk}(u + A_{nk})] = \lim_{n\uparrow\infty} \{ l_n \cdot [1 - \varphi_n(u)] \},$$

válida nas condições de b_2), tendo qualquer das duas uma interpretação probabilística interessante. – Doutro lado, a relação b_3) de III refere uma convergência especial das somas das variâncias das variáveis $X_{nk} - A_{nk}$ ou das variáveis ξ_{nl}, umas ou outras truncadas pelo intervalo aberto de $-\varepsilon$ a $+\varepsilon$, para a variância da componente *gausseana* da lei limite (isto é, da variável parcela da lei limite que resulta de fazer $M(u) \equiv 0$ e $N(u) \equiv 0$ na correspondente representação de Lévy).

Nota final: É fácil adaptar os teoremas I a III a variáveis casuais $X_{nk} = X_k / B_n$, com $1 \leqq k \leqq n$ e $B_n > 0$; basta usar, para o efeito, as fórmulas de B, § 8, texto antes de I e observação depois de III. No § 7 ocupar-nos-emos dum problema que compreende a adaptação referida como caso particular.

§ 4) Estudo duma variante do teorema fundamental de convergência

Uma alternativa para a condição de convergência do teorema fundamental. Há uma alternativa interessante para as relações $b_1)$ e $b_2)$ de III de § 3, a qual vem exposta numa proposição citada por LOÈVE. Vejamos:

I) «Dadas as variáveis casuais X_{nk}, com $1 \leq k \leq k_n$ e $k_n \to \infty$, quando $n \uparrow \infty$, independentes por linhas, assintòticamente constantes e tendo as funções de distribuição $F_{nk}(x)$, a relação $b_1)$ de III de § 3 verifica-se, *quando e só quando* as funções de distribuição dos termos da sucessão casual $\inf\limits_{1 \leq k \leq k_n} (X_{nk} - A_{nk})$ tendem para $1 - e^{-M(u)}$ nos pontos $u < 0$ que são de continuidade da função M. Anàlogamente, a relação $b_2)$ de III de § 3 verifica-se, *quando e só quando* as funções de distribuição dos termos da sucessão casual $\sup\limits_{1 \leq k \leq k_n} (X_{nk} - A_{nk})$ tendem para $e^{-N(u)}$ nos pontos $u > 0$ que são de continuidade da função N.»

Demonstração de IV: Como as variáveis $X'_{nk} = X_{nk} - A_{nk}$ são infinitesimais, as suas funções de distribuição $F'_{nk}(x) = F_{nk}(x + A_{nk})$ satisfazem às duas relações seguintes [B, 1) de § 4]:

1) $$a)\ \lim_{n \uparrow \infty} \sup_{1 \leq k \leq k_n} F'_{nk}(u) = 0, \text{ para } u < 0;$$

$$b)\ \lim_{n \uparrow \infty} \inf_{1 \leq k \leq k_n} F'_{nk}(u) = 1, \text{ para } u > 0.$$

Doutro lado, $\sup\limits_k X'_{nk}$ é uma variável casual [A, VI' de § 3] cuja função de distribuição $J_n(u)$ é dada pela expressão [A, 2) ou 3) de § 7]

2) $$J_n(u) = \prod_{1 \leq k \leq k_n} F'_{nk}(u).$$

Recordemos ainda a desigualdade [B, texto a seguir a 2) de § 5]

3) $$\log J_n(u) \leqq - \sum_{1 \leqq k \leqq k_n} [1 - F'_{nk}(u)]$$

e suponhamos que $u > 0$ é um ponto de continuidade da função N.

Então, fazendo $1 - F'_{nk}(u) = \varphi_{nk}$ e atendendo a 1 *b)* e a 2), obtemos, para n suficientemente grande,

$$-\log J_n(u) - \sum_k [1 - F'_{nk}(u)] = -\sum_k [\log(1 - \varphi_{nk}) + \varphi_{nk}] =$$

$$= \sum_k \Big(\sum_{2 \leqq l < \infty} \varphi^l_{nk} / l \Big) \leqq \frac{1}{2} \cdot \sum_k [\varphi^2_{nk} / (1 - \varphi_{nk})] \leqq \sup_k \varphi_{nk} \cdot \sum_k \varphi_{nk},$$

onde o último produto tem limite nulo, desde que $\sum_k \varphi_{nk}$ seja limitado. Ora esta hipótese verifica-se òbviamente, quando tem lugar a relação *b_2)* de III de § 3, e verifica-se também, quando $\log J_n(u) \longrightarrow -N(u)$, por causa de 3). Deste modo fica demonstrada uma das partes (a segunda) do nosso teorema.

Para demonstrar a outra parte, comecemos por notar que o facto da variável casual X ter a função de distribuição $F(u)$ implica que a variável $-X$ tem a função de distribuição $1 - F(-u+0)$. Aplicando esta propriedade duas vezes consecutivas, tira-se de 2) que a variável casual $\inf_k X'_{nk} = -\sup_k (-X'_{nk})$ tem uma função de distribuição, seja $I_n(u)$, que é dada pela expressão

4) $$I_n(u) = 1 - \prod_{1 \leqq k \leqq k_n} [1 - F'_{nk}(u)].$$

Fazendo agora $F'_{nk}(u) = \psi_{nk}$ e atendendo a 1 *a)* e a 4), sai a desigualdade, válida para n suficientemente grande,

$$-\log[1 - I_n(u)] - \sum_k F'_{nk}(u) \leqq \sup_k \psi_{nk} \cdot \sum_k \psi_{nk},$$

à qual se junta a desigualdade

$$\log[1 - I_n(u)] \leqq -\sum_k F'_{nk}(u),$$

homóloga de 3). Sendo assim e supondo que $u<0$ é um ponto de continuidade da função M, torna-se fácil completar a demonstração do nosso teorema.

Exemplo: Retomemos o primeiro exemplo relativo ao teorema II de § 3. Sai $I_n(u)=0$, para $u<-1/B_n$, e, portanto, $\lim\limits_{n\uparrow\infty} I_n(u)=0$, para $u<0$; depois $J_n(u)=1$, para $u>1/B_n$, e, portanto, $\lim\limits_{n\uparrow\infty} J_n(u)=1$, para $u>0$. Estabelecemos novamente que $M(u)\equiv 0$ e $N(u)\equiv 0$ e que a lei limite, caso exista, só pode ser de Gauss. Depois completa-se o estudo, recorrendo a $b_3)$ de III de § 3 ou, o que vem a ser a mesma coisa, recorrendo a $d_3)$ de II de § 3.

* * *

Outro teorema de Khintchine. Notemos agora que a constância assintótica das variáveis casuais X_{nk} implica as relações seguintes, respectivamente por 1 *a)* e 2) e por 1 *b)* e 4):

5) $\lim\limits_{n\uparrow\infty} J_n(u)=0$, para $u<0$; 6) $\lim\limits_{n\uparrow\infty} I_n(u)=1$, para $u>0$.

Na hipótese da constância assintótica ser forte [B, 1) e 1') de § 5], a igualdade óbvia

7) $$\sup_k |X'_{nk}| = \sup(|\sup_k X'_{nk}|, |\inf_k X'_{nk}|)$$

conduz à relação

8) $$\lim_{n\uparrow\infty} \mathsf{P}(|\sup_k X'_{nk}| \geqq \varepsilon) = \lim_{n\uparrow\infty} \mathsf{P}(|\inf_k X'_{nk}| \geqq \varepsilon) = 0,$$

válida com todo o $\varepsilon>0$, ou ainda ao conjunto formado por 5) e 6) e mais pelas duas relações seguintes:

5') $\lim\limits_{n\uparrow\infty} I_n(u)=0$, para $u<0$; 6') $\lim\limits_{n\uparrow\infty} J_n(u)=1$, para $u>0$.

Inversamente, se admitirmos conjuntamente 5), 6), 5') e 6'), inferimos primeiro 8) e depois, por causa de 7), que as variáveis X'_{nk} são fortemente infinitesimais.

Podemos resumir o estudo feito na proposição (auxiliar) seguinte:

II) «As variáveis casuais X_{nk}, independentes por linhas, admitem as constantes assintóticas *fortes* A_{nk}, *quando e só quando* se verificam conjuntamente as relações 5), 6), 5') e 6').»

É óbvio que II tem o seu interesse próprio no problema da caracterização da constância assintótica forte. A este propósito é bom observar que o conjunto das duas relações 5) e 6) constitui uma condição necessária, mas de modo nenhum suficiente para que as variáveis X_{nk} admitam as constantes assintóticas A_{nk}, mesmo quando estas se encontram isentas da exigência de serem fortes. Exemplo: Sejam quais forem n e k, tome-se $A_{nk}=0$ e X_{nk} de valores -1, 0 e 1, qualquer deles com probabilidade igual a $1/3$.

Posto isso, podemos raciocinar como segue: Se as somas de variáveis assintòticamente constantes de *a)* de III de § 3 convergem e se as variáveis são fortemente assintòticamente constantes, então valem simultâneamente os teoremas I e II, o que implica $M(u)\equiv 0$ e $N(u)\equiv 0$ ou seja uma lei limite de Gauss(*) [A, exemplos 1.º e 2.º de § 11]. Inversamente, se as somas de *a)* de III convergem e se a lei limite é de Gauss(*), não só temos as relações óbvias 5) e 6), como também I assegura o conjunto das relações 5') e 6') e, consequentemente, assegura a constância assintótica forte das parcelas de *a)*. O que precede prova que o seguinte *teorema de Khintchine:*

III) «Dadas as variáveis casuais X_{nk}, independentes por linhas, assintòticamente constantes e tais que existem constantes S_n que tornam as leis das somas

$$X_n = X_{n1} + X_{n2} + \cdots + X_{nk_n} - S_n$$

(fracamente) convergentes para uma lei limite (infinitamente divisível), então essas variáveis são fortemente assintòtica-

(*) Se a lei for *imprópria,* consideramo-la lei de Gauss degenerada.

mente constantes, *quando e só quando* a lei limite sai de GAUSS (própria ou imprópria).»

Observação: Podem dar-se demonstrações diferentes, porventura mais directas, do teorema III. A conclusão deveras interessante é que *uma lei limite diferente da de GAUSS é incompatível com a constância assintótica forte* e que tal constância implica uma lei limite, sim ou não, conforme se cumprir ou deixar de cumprir a condição b_3) de III de § 3(*) (ver I e II). Assim fica patente a importância primordial que tem a lei de GAUSS no conjunto das leis limite possíveis.

CAPÍTULO II

MODOS ESPECIAIS DE CONVERGÊNCIA DE SOMAS DE VARIÁVEIS CASUAIS INDEPENDENTES

§ 5) Complementos aos teoremas gerais de convergência

Condições de validade dos teoremas de convergência primeiro e segundo. O teorema III de § 3 e o teorema de convergência que corresponde a I de § 4 apresentam a vantagem de serem absolutamente gerais, mas incluem uma terceira relação um tanto complicada na condição necessária e suficiente de convergência. Por isso tem certo interesse definir situações em que essa terceira relação se deixe simplificar.

Consideremos as variáveis X_{nk}, independentes por linhas e tendo as constantes assintóticas A_{nk}, e comecemos por analisar o caso em que a relação b_3) de III de § 3 pode tomar o aspecto d_3) de II de § 3, isso sem alteração das constantes assintóticas envolvidas. Em tal hipótese, as relações b_1) a b_3) de III de § 3 saem equivalentes às relações d_1) a d_3) de II de § 3 e estas, por seu turno, saem equivalentes à relação *d)* de I de § 3 [2) e 3) de § 3 e B, I e II de § 3], apresentando todas essas relações as constantes assintóticas iniciais. Portanto, podemos usar indistintamente os teoremas de conver-

(*) Ou a sua versão simplificada que aparece no capítulo seguinte.

gência primeiro ou segundo com as constantes assintóticas presentes, não havendo necessidade de indagar, se as variáveis infinitesimais $X_{nk}-A_{nk}$ admitem constantes assintóticas que, além de serem idênticamente nulas, também satisfazem às restrições *b)* e *c)* dos enunciados daqueles teoremas.

Pois bem, considerações elementares concernentes a limites de sucessões mostram que a relação $b_3)$ de III de § 3 pode tomar a forma simplificada $d_3)$ de II de § 3, quando e só quando se verificar a igualdade

$$1) \qquad \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \lim_{n\uparrow\infty} \max_{1\leq k\leq k_n} \left[\int_{|x|<\varepsilon} x\, dF_{nk}(x+A_{nk})\right]^2 = 0.$$

Este facto e as reflexões anteriores dão a proposição seguinte:

I) «As variáveis casuais X_{nk}, independentes por linhas e assintòticamente constantes, ajustam-se às condições necessárias e suficientes *d)* do teorema de convergência primeiro e $d_1)$ a $d_3)$ do teorema de convergência segundo, expressas nas constantes assintóticas A_{nk}, *quando e só quando* estas satisfazem à relação 1) supracitada.»

Vejamos agora um corolário da proposição anterior.

I') «Para que as variáveis casuais X_{nk}, independentes por linhas e assintòticamente constantes, se ajustem às condições necessárias e suficientes dos teoremas de convergência primeiro e segundo, expressas nas constantes assintóticas A_{nk}, basta que a lei limite eventual tenha componente *gausseana* (de variância) nula e que, além disso, exista um par fixo de números γ' e γ'', com $0<\gamma'\leqq\gamma''<1$, tais que se verifica, para todo o n suficientemente grande e uniformemente em k, a desigualdade seguinte, relativa a quantis,

$$a) \qquad \chi_{nk}^{(\gamma')} - \eta'_{nk} \leqq A_{nk} \leqq \chi_{nk}^{(\gamma'')} + \eta''_{nk},$$

onde η'_{nk} e η''_{nk} são números não-negativos que satisfazem a

$$\lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq k_n} \eta'^2_{nk} = \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq k_n} \eta''^2_{nk} = 0.»$$

Demonstração de I': Caso as constantes assintóticas A_{nk} se sujeitem a *d)* de I de § 3, elas verificam $d_1)$ a $d_3)$ de II de § 3 e, se $b^2=0$, verificam também $b_1)$ a $b_3)$ de III de § 3. Portanto, só falta provar que as hipóteses postas no enunciado implicam a igualdade 1).

Suponhamos primeiro que a relação *a)* de I' tem o aspecto particular

$$a') \qquad \chi_{nk}^{(\gamma')} \leqq A_{nk} \leqq \chi_{nk}^{(\gamma'')},$$

designemos por I_{nk} aquele dos dois intervalos $-\varepsilon<x<0$ e $0<x<\varepsilon$, onde é maior o módulo do integral de x com respeito a $F'_{nk}(x)=F_{nk}(x+A_{nk})$, e recordemos a desigualdade de Liapounov de 4) de § 8 de B (com $a=2$, $b=1$ e $c=0$). Sai

$$\sum_k \Big[\int_{|x|<\varepsilon} x\, dF'_{nk}(x)\Big]^2 \leqq \sum_k \Big[\int_{I_{nk}} |x|\, dF'_{nk}(x)\Big]^2 \leqq$$
$$\leqq \sum_k \Big[\int_{I_{nk}} dF'_{nk}(x)\cdot\int_{I_{nk}} x^2\, dF'_{nk}(x)\Big] \leqq$$
$$\leqq \sup_k \int_{I_{nk}} dF'_{nk}(x)\cdot \sum_k \int_{|x|<\varepsilon} x^2\, dF'_{nk}(x),$$

de modo que a definição de 3') de § 4 de B dá

$$\frac{1-\sup(1-\gamma',\gamma'')}{\sup(1-\gamma',\gamma'')}\cdot\sum_k\Big[\int_{|x|<\varepsilon} x\,dF'_{nk}(x)\Big]^2 \leqq \big[1-\sup(1-\gamma',\gamma'')\big]\cdot$$
$$\cdot\sum_k\int_{|x|<\varepsilon} x^2\, dF'_{nk}(x) \leqq \sum_k\Big\{\int_{|x|<\varepsilon} x^2\, dF'_{nk}(x) - \Big[\int_{|x|<\varepsilon} x\, dF'_{nk}(x)\Big]^2\Big\},$$

onde o limite máximo do último somatório tende, por hipótese, para zero, quando $\varepsilon \downarrow 0$ (III de § 3, com $b^2=0$). Daí se tira 1).

Caso as grandezas A_{nk} sejam tais que $\chi_{nk}^{(\gamma')}-\zeta'_{nk}=A_{nk}$, com $0\leqq\zeta'_{nk}\leqq\eta'_{nk}$, basta ter em conta a desigualdade elementar $(x+\zeta'_{nk})^2\leqq 2\cdot(x^2+\zeta'^2_{nk})$ para que saia, com n suficientemente grande, a relação

$$\sum_k\Big[\int_{|x|<\varepsilon} x\,dF'_{nk}(x)\Big]^2 \leqq \sum_k\int_{|x+\zeta'_{nk}|<\varepsilon}(x+\zeta'_{nk})^2\,dF_{nk}(x+\chi_{nk}^{(\gamma')}) \leqq$$
$$\leqq 2\cdot\sum_k\Big[\int_{|x|<2\varepsilon} x^2\,dF_{nk}(x+\chi_{nk}^{(\gamma')})+\zeta'^2_{nk}\cdot\int_{|x|<2\varepsilon} dF_{nk}(x+\chi_{nk}^{(\gamma')})\Big],$$

onde o limite máximo do penúltimo somatório tende para zero, quando $\varepsilon \downarrow 0$, isso pela primeira parte da demonstração presente. Este facto e a hipótese relativa aos números $\eta'_{nk} (\geq \zeta'_{nk})$ conduzem novamente a 1).

O caso $\chi_{nk}^{(\gamma'')} \leq A_{nk} = \chi_{nk}^{(\gamma'')} + \zeta''_{nk}$ trata-se de modo análogo.

Finalmente, os diversos casos podem sobrepor-se, quando houver necessidade de fazê-lo. Assim fica completada a demonstração de I'.

Exemplos: O teorema I' aplica-se, em particular, às leis *impróprias*, de Poisson e de Cauchy [exemplos 1.º, 3.º e 4.º de § 11 de A].

* * *

Outro tipo de simplificação da condição de convergência do teorema fundamental. Passamos a encarar outro tipo de simplificação da relação b_3) de III de § 3 cujo estudo nos vai conduzir ao resultado seguinte:

II) «Dadas as variáveis casuais X_{nk}, independentes por linhas e assintòticamente constantes, e dada uma família de leis infinitamente divisíveis que podem representar-se na forma de Lévy pela mesma constante não-negativa b^2 e pelo mesmo par de funções $M(u)$ e $N(u)$, estas sujeitas às condições usuais e, além disso, dotadas de secções de invariabilidade não-vazias, a primeira numa antevizinhança e a outra numa postvizinhança da origem, dado tudo isso, é possível determinar constantes S_n tais que as leis das somas

$$a) \qquad X_n = X_{n1} + X_{n2} + \cdots + X_{nk_n} - S_n$$

sejam (fracamente) convergentes para uma lei da família anterior, *quando e só quando* existe uma sucessão (dupla) de constantes assintóticas A_{nk} das variáveis X_{nk}, para a qual se verificam simultâneamente as relações seguintes:

$$b_1) \qquad \lim_{n \uparrow \infty} \sum_{1 \leq k \leq k_n} F_{nk}(u + A_{nk}) = M(u),$$

válida em todo o ponto $u<0$ que é de continuidade da função M,

$$b_2)\qquad \lim_{n\uparrow\infty}\sum_{1\leq k\leq k_n}[1-F_{nk}(u+A_{nk})]=N(u),$$

válida em todo o ponto $u>0$ que é de continuidade da função N, e

$$b_3)\ \lim_{n\uparrow\infty}\sum_k\Big\{\int_{|x|<\varepsilon}x^2\,dF_{nk}(x+A_{nk})-\Big[\int_{|x|<\varepsilon}x\,dF_{nk}(x+A_{nk})\Big]^2\Big\}=b^2,$$

válida para *algum* $\varepsilon>0$ tal que $\varepsilon<\delta$, onde δ significa um número positivo que não excede a menor das amplitudes das duas secções de invariabilidade.

Se as relações $b_1)$ a $b_3)$ ocorrem para algum $\varepsilon<\delta$ e para alguma sucessão de constantes assintóticas das variáveis, as mesmas relações verificam-se para todo o $\varepsilon<\delta$ e para todas as sucessões de tais constantes, a primeira sempre com a mesma função $M(u)$, a segunda sempre com a mesma função $N(u)$ e a última sempre com a mesma constante b^2.

Finalmente, as constantes S_n admissíveis regem-se pelos princípios do terceiro teorema de convergêneia.»

Demonstração de II: Admitamos primeiro que as leis das somas de *a)* convergem para uma lei limite que se encontra nas condições do enunciado. Então, sendo A_{nk} uma sucessão *arbitrária* de constantes assintóticas das variáveis X_{nk}, fazendo $F'_{nk}(x)=F_{nk}(x+A_{nk})$, atribuindo a u e a v o significado de números quaisquer sujeitos à desigualdade $0<v<u<\delta$ e tendo em conta as relações $b_1)$ e $b_2)$ de III de § 3 (ou do nosso teorema), sai

$$\Big|\sum_k\Big\{\int_{|x|<u}x^2\,dF'_{nk}(x)-\Big[\int_{|x|<u}x\,dF'_{nk}(x)\Big]^2\Big\}-$$

$$-\sum_k\Big\{\int_{|x|<v}x^2\,dF'_{nk}(x)-\Big[\int_{|x|<v}x\,dF'_{nk}(x)\Big]^2\Big\}\Big|=$$

$$=\Big|\sum_k\Big\{\int_{v\leq|x|<u}x^2\,dF'_{nk}(x)-\Big[\int_{v\leq|x|<u}x\,dF'_{nk}(x)\Big]^2\Big\}-$$

$$-2\cdot\sum_k\left[\int_{|x|<v} x\,dF'_{nk}(x)\cdot\int_{v\leqq|x|<u} x\,dF'_{nk}(x)\right]\Big|\leqq$$

$$\leqq\sum_k\int_{v\leqq|x|<u} x^2\,dF'_{nk}(x)+$$

$$+2\cdot\sum_k\left[\int_{|x|<v}|x|\,dF'_{nk}(x)\cdot\int_{v\leqq|x|<u}|x|\,dF'_{nk}(x)\right]\leqq$$

$$\leqq(u^2+2\,u\,v)\cdot\sum_k\int_{v\leqq|x|<u} dF'_{nk}(x)\longrightarrow u\,(u+2\,v)\cdot$$

$$\cdot\,[M(-v)-M(-u)+N(v)-N(u)]=0,$$

donde concluímos que tanto o limite máximo como também o limite mínimo da sucessão

$$\sum_{1\leqq k\leqq k_n}\left\{\int_{|x|<\varepsilon} x^2\,dF_{nk}(x+A_{nk})-\left[\int_{|x|<\varepsilon} x\,dF_{nk}(x+A_{nk})\right]^2\right\},$$

quando $n\uparrow\infty$, é o mesmo para qualquer ε entre 0 e δ.(*) Este facto e as relações $b_1)$ a $b_3)$ de III de § 3 mostram que as relações $b_1)$ a $b_3)$ do enunciado constituem uma condição necessária de convergência.

Para tratar da condição suficiente, vamos supor que as funções $M(u)$ e $N(u)$ têm as propriedades referidas no enunciado e que existem constantes assintóticas A_{nk} das variáveis X_{nk}, para as quais se verificam as relações $b_1)$ a $b_3)$ supracitadas. Então, o cálculo acima feito prova que o limite b^2 da relação $b_3)$ do enunciado não se altera, quando se faz variar ε entre 0 e δ, e, em particular, quando se faz $\varepsilon\downarrow 0$; consequentemente, verificam-se as relações $b_1)$ a $b_3)$ de III de § 3. Concluímos que é possível determinar constantes S_n tais que as leis das somas X_n sejam convergentes para uma lei limite, cuja representação de Lévy se faz precisamente à custa das grandezas b^2, $M(u)$ e $N(u)$, conforme queríamos mostrar.

Quanto à parte final do enunciado, consideramo-la óbvia em face do exposto.

(*) Logo se vê que a conclusão é também válida para a sucessão $\sum_k\int_{|x|<\varepsilon} x^2\,dF_{nk}(x+A_{nk})$.

Exemplos: O teorema II aplica-se, em particular, às famílias das leis *impróprias*, de GAUSS e de POISSON [exemplos 1.º, 2.º e 3.º de § 11 de A].

* * *

Convergência de somas com variâncias limitadas: Estudo geral. Suponhamos que as variáveis casuais X_{nk} são integráveis e que admitem as suas esperanças matemáticas E_{nk} como constantes assintóticas, isto é, têm desvios infinitesimais. Então, podemos fazer $A_{nk}=E_{nk}$ e aplicar o terceiro teorema de convergência ou, caso as esperanças matemáticas o consintam, um dos dois primeiros teoremas de convergência.

Avançando agora um pouco mais nas hipóteses, passamos a supor que as variáveis X_{nk} têm variâncias e vamos estabelecer um teorema importante, devido essencialmente a BAWLY. Ei-lo:

III) «Dadas as variáveis casuais X_{nk}, independentes por linhas, com funções de distribuição $F_{nk}(x)$, com variâncias V_{nk} tais que

a) $\sum\limits_{1\leq k\leq k_n} V_{nk}$ é limitado em relação a n

e com esperanças matemáticas E_{nk} tais que

b) os desvios $X_{nk}-E_{nk}$ são infinitesimais,

dadas essas variáveis, existem constantes S_n que tornam as leis das somas

c) $$X_n=X_{n1}+X_{n2}+\cdots+X_{nk_n}-S_n$$

(fracamente) convergentes para uma lei limite (infinitamente divisível), *quando e só quando* é possível associar às variáveis casuais X_n uma sucessão de variáveis casuais infinitamente divisíveis cujas funções características têm logaritmos definidos pela fórmula

d) $$\log g_n(t)=i\cdot\left(-S_n+\sum_{1\leq k\leq k_n} E_{nk}\right)\cdot t+\sum_{1\leq k\leq k_n}\int_R (e^{itx}-1)\,dF_{nk}(x+E_{nk})$$

e cujas leis convergem para uma lei limite.

A lei limite é a mesma para as sucessões referidas em *c)* e em *d)*.»

Demonstração de III: Tendo em vista 4) de § 8 de B (com $a=2$, $b=1$ e $c=0$), podemos escrever a desigualdade

$$\sum_k \Big[\int_{|x|\leq D} x\, dF_{nk}(x+E_{nk})\Big]^2 \leq$$
$$\leq \sum_k \Big[\int_{|x|>D} dF_{nk}(x+E_{nk}) \cdot \int_{|x|>D} x^2\, dF_{nk}(x+E_{nk})\Big] \leq$$
$$\leq \sup_k \int_{|x|>D} dF_{nk}(x+E_{nk}) \cdot \sum_k V_{nk},$$

onde o último membro tem limite nulo, quando $n\uparrow\infty$, por causa das relações *a)* e *b)* do enunciado. Por aí se vê que as constantes assintóticas idênticamente nulas das variáveis $X_{nk}-E_{nk}$ respeitam as restrições *b)* e *c)* de III de § 2. Este facto e III de § 2 provam o nosso teorema.

Observação: Os desvios $X_{nk}-E_{nk}$ são infinitesimais, quando $\lim\limits_{n\uparrow\infty} \sup\limits_{1\leq k\leq k_n} V_{nk}=0$; pois, dado $\varepsilon>0$, tem-se

$$\sup_{1\leq k\leq k_n} \mathsf{P}(|X_{nk}-E_{nk}|\geq\varepsilon)\leq$$
$$\leq \sup_{1\leq k\leq k_n} \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{x^2}{\varepsilon^2}\, dF_{nk}(x+E_{nk}) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \sup_{1\leq k\leq k_n} V_{nk}.$$

Se representarmos as leis correspondentes a *d)* de III pela forma de LÉVY e KHINTCHINE, obtemos as igualdades (ver 14) e 15) de § 2)

$$2)\quad \int_R (1+u^2)\, dG_n(u) = \sum_{1\leq k\leq k_n} \int_R x^2\, dF_{nk}(x+E_{nk}) = \sum_{1\leq k\leq k_n} V_{nk},$$

as quais mostram que a variável i.d. associada a X_n ($n=1,2,\ldots$) tem variância igual à de X_n [A, III' de § 7 e 15) e 19) de § 11]. Sendo assim, há vantagem em fazer

$$3)\qquad C_n(-\infty)=0 \quad \text{e} \quad dC_n(u) = \sum_{1\leq k\leq k_n} u^2\, dF_{nk}(u+E_{nk}),$$

donde

$$\int_R \frac{it}{u}\, dC_n(u) = it \cdot \sum_k \int_R x\, dF_{nk}(x+E_{nk}) = 0,$$

para transformar *d)* de III na fórmula

$$\text{4)} \qquad \log g_n(t) = i \cdot (-S_n + \sum_{1 \leq k \leq k_n} E_{nk}) \cdot t +$$
$$+ \sum_{1 \leq k \leq k_n} \int_R \frac{e^{itu} - 1 - itu}{u^2}\, dC_n(u),$$

a qual representa as leis associadas sob a forma de Kolmogorov [B, 8) e 9) de § 3], com

$$\text{4')} \qquad \alpha_n = -S_n + E_{n1} + E_{n2} + \cdots + E_{nk_n},$$

de modo que a esperança matemática de cada variável X_n sai igual à esperança matemática da sua associada [A, 9) de § 4].

As considerações precedentes conduzem fàcilmente a um *corolário* de III que pode enunciar-se como segue:

III') «Se as leis das somas de *c)* de III tenderem (fracamente) para uma lei limite (infinitamente divisível), esta tem necessàriamente variância e, portanto, pode ser representada sob a forma de Kolmogorov.»

Demonstração de III': Quando se verifica a hipótese de III', as funções $G_n(u)$ da fórmula 2) convergem completamente para uma função $G(u)$, a qual é de distribuição a menos dum factor constante não-negativo. Então, supondo que a e $b > a$ são pontos de continuidade da função G e atendendo ao primeiro teorema de Helly-Bray, sai a relação

$$\lim_{a \downarrow -\infty,\, b \uparrow +\infty} \lim_{n \uparrow \infty} \int_a^b (1+u^2)\, dG_n(u) = \lim_{a \downarrow -\infty,\, b \uparrow +\infty} \int_a^b (1+u^2)\, dG(u),$$

a qual prova, juntamente com *a)* de III e com 2), que o último limite é finito. Logo u^2 é integrável com respeito à função G [8) de § 5 e I de § 4 de A]. Concluímos que a lei limite tem variância e, portanto, pode ser representada sob a forma de KOLMOGOROV [III e IV de § 11 de A].

III' mostra que as leis das somas de *c)* de III nunca podem convergir para uma lei de CAUCHY [A, § 8, exemplo 6.º].

Observação: Quando se decompõe uma variável casual i. d., tendo a variância V e a esperança matemática E, na soma de s variáveis independentes, i. d. e idênticamente distribuidas, cada parcela fica com a variância V/s e com a esperança matemática E/s [18), 19) e IV de § 11 de A]. Este facto, III' e a observação posterior a III permitem concluir que é válida a modificação de IV de § 2 que resulta, quando se substituem as expressões *leis, variáveis casuais, somas* e *constância assintótica* por *leis com variância, variáveis casuais com variância, somas de variâncias limitadas* e *constância assintótica com respeito às esperanças matemáticas,* respectivamente.

* * *

Convergência de somas com variâncias limitadas: Estudo específico. Estamos agora aptos a deduzir uma proposição importante a que podemos chamar *teorema de convergência de* GNEDENKO *e* BAWLY.

IV) «São dadas as variáveis casuais X_{nk}, independentes por linhas, tendo as funções de distribuição $F_{nk}(x)$, dotadas de variâncias V_{nk} e assintòticamente constantes com respeito às suas esperanças matemáticas E_{nk}. Para que possam determinar-se constantes S_n tais que as leis das somas

$$a) \qquad X_n = X_{n1} + X_{n2} + \cdots + X_{nk_n} - S_n$$

sejam (fracamente) convergentes para uma lei limite (infinitamente divisível) com variância e, além disso, as variâncias e as esperanças matemáticas das variáveis X_n tendam, respectivamente, para a variância e a esperança matemática da lei limite, é condição necessária e suficiente que exista uma função de distribuição a menos dum factor constante não-negativo, digamos $C(u)$, que verifica a relação

$$b) \qquad \sum_{1 \leq k \leq k_n} \int_{-\infty}^{u} x^2 \, dF_{nk}(x+E_{nk}) \xrightarrow{c} C(u), \text{ quando } n \uparrow \infty.$$

Caso a relação *b)* se encontre satisfeita, o conjunto das constantes S_n admissíveis é dado pela fórmula

$$c) \qquad S_n = E_{n1} + E_{n2} + \cdots + E_{nk_n} - \alpha_n ,$$

onde α_n representa o termo geral duma sucessão (real) convergente arbitrária.

O limite da sucessão α_n, seja α, e a função $C(u)$ caracterizam a lei limite sob a forma de Kolmogorov.

Quando se pretende que as somas de *a)* tenham as propriedades expostas e, além disso, seja possível tomar $S_n \equiv 0$, a condição necessária e suficiente é a relação *b)* acrescida da exigência que as somas $E_{n1} + E_{n2} + \cdots + E_{nk_n}$ formem uma sucessão convergente, quando $n \uparrow \infty$.»

Demonstração de IV: A relação *a)* de III verifica-se, quer se suponha que as variâncias das somas X_n tendem para a variância da lei limite, quer se admita a relação *b)* do enunciado, a qual implica

$$\sum_k V_{nk} \longrightarrow C(+\infty) < +\infty .$$

Sendo assim, encontram-se realizadas todas as hipóteses do teorema III, tanto no caso da condição necessária como no da condição suficiente, de modo que podemos transferir, em qualquer dos casos, o estudo da convergência das leis das somas de *c)* de III para as leis i. d. associadas, isso sem prejuízo da lei limite eventual e também sem prejuízo das esperanças matemáticas e das variâncias envolvidas (ver o texto a seguir à observação anexa a III).

Condição suficiente: Primeiro, a fórmula 3) e a relação *b)* do enunciado mostram que $C_n(u) \xrightarrow{c} C(u)$; depois, se fixarmos constantes S_n convenientes em 4'), as esperanças matemáticas α_n convergem para o limite que queiramos escolher, seja α. Daí resulta não só que as leis i. d. com variâncias de *d)* de III tendem para uma lei limite com variância, caracterizada pelas grandezas α e $C(u)$, mas também que as variâncias daquelas leis tendem para a variância da lei limite [B, III de § 3]. Finalmente, α é a esperança matemática da lei limite.

Condição necessária: Por hipótese, escolhidas constantes S_n convenientes, as leis i. d. de *d)* de III e as suas variâncias tendem, respectivamente, para uma lei limite com representação de Kolmogorov e a sua variância. Isto implica a relação *b)* do enunciado [3) do texto e B, III de § 3].

Satisfeita a relação *b)*, podemos obter constantes S_n admissíveis, tomando $\alpha_n \equiv 0$ em 4'). Este facto e III' de § 2 mostram que a relação *c)* dá todas as sucessões de constantes S_n admissíveis.

Quanto à parte final do enunciado, consideramo-la evidente.

Exemplo: Retomemos mais uma vez o exemplo relativo ao teorema III de § 2. Sai $E_{nk} \equiv 0$ e $V_{nk} = p_k q_k / B_n^2$. Então, para n suficientemente grande,

$$\sum_{1 \leqq k \leqq n} \int_{-\infty}^{u} x^2 \, dF_{nk}(x) \text{ vale 0 ou vale } \Big(\sum_{1 \leqq k \leqq n} p_k q_k\Big) / B_n^2 = 1,$$

conforme $u < 0$ ou $u > 0$. Concluímos que as somas de *b)* de IV tendem completamente para a função $C(u)$ que caracteriza as leis de Gauss de variância unitária [A, exemplo 2.º de § 11].

A proposição III permite estabelecer um teorema de convergência um pouco mais geral do que IV. Ei-lo:

V) «Dadas as variáveis casuais X_{nk}, sujeitas às hipóteses referidas em III, para que possam determinar-se constantes S_n que tornem as leis das somas de *c)* de III (fracamente) convergentes para uma lei limite (infinitamente divisível com variância) e que tornem também as esperanças matemáticas das variáveis X_n convergentes para a esperança matemática da lei limite, é condição necessária e suficiente que, fixadas *quaisquer* duas subsucessões fracamente convergentes, extraídas da sucessão

$$b) \qquad C_n(u) = \sum_{1 \leq k \leq k_n} \int_{-\infty}^{u} x^2 \, dF_{nk}(x + E_{nk}),$$

os seus limites sejam funções que difiram por uma constante (possìvelmente diferente dum par de subsucessões convergentes para outro).

Satisfeita essa condição, o enunciado pode completar-se como em IV, desde que se tome para função $C(u)$ a função que se anula no ponto $-\infty$ e que dá uma constante, quando subtraída de qualquer dos limites tirados de *b)*.»

Demonstração de V: Por causa de III e de III', o nosso objectivo é deduzir uma condição necessária e suficiente para que as leis das somas de *d)* de III, *de variâncias limitadas* e com representações de Kolmogorov caracterizadas pelas grandezas α_n e $C_n(u)$ das fórmulas 4') e 3), tendam para uma lei com representação de Kolmogorov, caracterizada por uma constante real α e por uma função $C(u)$ que é de distribuição a menos dum factor constante não-negativo. Mais, a relação $\alpha_n \longrightarrow \alpha$ deve juntar-se à condição deduzida, caso *não* figure nela.

Pois bem, um retoque ligeiro da demonstração de III de § 3 de B mostra que a condição necessária e suficiente referida é que $\alpha_n \longrightarrow \alpha$ e, além disso, que os limites de *quaisquer* duas subsucessões fracamente convergentes extraídas da sucessão $C_n(u)$ sejam funções (de quase-distribuição a menos de factores constantes não-negativos) que difiram por uma constante.(*) Este facto, as relações 3) e a possibilidade de dis-

---

(*) *Condição suficiente retocada:* A hipótese $C_n(+\infty) \leqslant C < +\infty$ implica que a sucessão $C_n(u)$ se reparte por subsucessões fracamente convergentes $C_n^{(p)}(u)$ $(p = 1, 2, 3, \ldots)$, às quais correspondem subsucessões $\alpha_n^{(p)}$ da sucessão α_n. Dado p, sai $\alpha_n^{(p)} \to \alpha$ e $C_n^{(p)}(u) \xrightarrow{s} C(u) + c^{(p)}$, com $C(-\infty) = 0$, $C(+\infty) < +\infty$ e $c^{(p)} \geqslant 0$ constante. Logo, pelo segundo teorema de Helly-Bray, $i\alpha_n^{(p)} \cdot t + \int_R (e^{itu} - 1 - itu)\, dC_n^{(p)}(u)/u^2 \to i\alpha t + \int_R (e^{itu} - 1 - itu)\, dC(u)/u^2$, isso seja qual for p. Etc. — *Condição necessária retocada:* Também aqui existe por das constantes S_n de 4') provam a parte principal do nosso teorema.

Depois completa-se a demonstração de V nos mesmos moldes que a de IV.

Exemplo: Sejam quais forem n e k, suponhamos que

$$E_{2n,k}=0 \text{ e } F_{2n,k}(x)=0 \text{ ou } 1/(12n^2) \text{ ou } 1-1/(6n^2) \text{ ou } 1,$$

conforme

$$+k_{2n}^{1/2}\cdot x=x_{2n}\leqq -2n \text{ ou } -2n<x_{2n}\leqq 0 \text{ ou } 0<x_{2n}\leqq n$$
$$\text{ou } n<x_{2n},$$

e suponhamos ainda que

$$E_{2n+1,k}=0 \text{ e } F_{2n+1,k}(x)=0$$
$$\text{ou } 2/[3(2n+1)^2] \text{ ou } 1-1/[3(2n+1)^2] \text{ ou } 1,$$

conforme

$$+k_{2n+1}^{1/2}\cdot x=x_{2n+1}\leqq -2n-1 \text{ ou } -2n-1<x_{2n+1}\leqq 0$$
$$\text{ou } 0<x_{2n+1}\leqq 2\cdot(2n+1) \text{ ou } 2\cdot(2n+1)<x_{2n+1}.$$

Como de costume, consideramos as variáveis apresentadas independentes por linhas. Logo se reconhece que elas são (de desvios) infinitesimais [1) de § 4 de B].

Resulta

$$C_{2n}(u)=0 \text{ ou } 1/3 \text{ ou } 1/2,$$

conforme

$$+k_{2n}^{1/2}\cdot u=u_{2n}\leqq -2n \text{ ou } -2n<u_{2n}\leqq n \text{ ou } n<u_{2n},$$
$$\text{e } C_{2n+1}(u)=0 \text{ ou } 2/3 \text{ ou } 2,$$

---

um número não-negativo γ tal que $C_n(+\infty)\leqslant C(+\infty)+\gamma<+\infty$. Sai $\alpha_n\to\alpha$, como anteriormente. Depois, existe uma subsucessão $C_n^{(1)}(u)$ de $C_n(u)$ tal que $C_n^{(1)}(u)\overset{s}{\to}C(u)+c^{(1)}$. Se suprimirmos os termos de $C_n^{(1)}(u)$ na sucessão $C_n(u)$, então a sucessão remanescente admite uma subsucessão $C_n^{(2)}(u)\overset{s}{\to}C(u)+$ $+c^{(2)}$. Etc.

conforme

$$+k_{2n+1}^{1/2}\cdot u = u_{2n+1} \leqq -2n-1 \quad \text{ou} \quad -2n-1 < u_{2n+1} \leqq 2\cdot(2n+1)$$
$$\text{ou} \quad 2\cdot(2n+1) < u_{2n+1},$$

de modo que se encontra satisfeita a hipótese *a)* de III. Se admitirmos que

$$2n/|k_{2n}^{1/2}| \quad \text{e} \quad (2n+1)/|k_{2n+1}^{1/2}|$$

tendem para $+\infty$, quando $n\uparrow\infty$, sai

$$C_{2n}(u) \xrightarrow{s} 1/3 \quad \text{e} \quad C_{2n+1}(u) \xrightarrow{s} 2/3.$$

Podemos tomar $S_{2n} \equiv 0 \equiv S_{2n+1}$ e obtemos somas convergentes para a lei unitária.

Vejamos agora um *corolário* de V relativo aos valores das variâncias presentes:

V$'_1$) «Quando as variáveis casuais X_{nk}, sujeitas às hipóteses referidas em III, verificam a condição de V, então a variância da lei limite não pode exceder o limite mínimo da sucessão formada pelas variâncias das somas X_n de *c)* de III.»

Demonstração de V$'_1$: A sucessão formada pelas variâncias das somas do enunciado é a sucessão $C_n(+\infty)$ que se tira de *b)* de V, fazendo $u=+\infty$. Suponhamos que a subsucessão $C_j(+\infty) \longrightarrow C < +\infty$. Então, podemos extrair da sucessão de funções $C_j(u)$ uma subsucessão fracamente convergente $C_i(u)$, a qual, devido à condição de V, é tal que $C_i(u) \xrightarrow{s} C(u)+c$, onde $c \geqq 0$ significa uma constante. Se um ponto de continuidade u da função C tornasse $C(u)+c-C=\varepsilon>0$, resultava, para i suficientemente grande, a desigualdade absurda

$$C_i(u) > C(u)+c-\varepsilon/2 = C+\varepsilon/2 > C_i(+\infty);$$

logo $C(u)+c-C \leqq 0$ para *todo* o valor de u e, portanto, $C \geqq C(+\infty)+c \geqq C(+\infty)$, onde $C(+\infty)$ é a variância da lei limite, ficando assim demonstrada a tese.

Outro *corolário* interessante de V é a proposição seguinte:

V'_2) «Dadas as variáveis casuais X_{nk}, independentes por linhas, tendo as variâncias V_{nk} e admitindo as suas esperanças matemáticas E_{nk} como constantes assintóticas, então a condição

a) $$V_n = \sum_{1 \leq k \leq k_n} V_{nk} \leq V < +\infty$$

assegura a existência de constantes S_n tais que a sucessão das leis das somas

b) $$X_n = X_{n1} + X_{n2} + \cdots + X_{nk_n} - S_n$$

se pode repartir por subsucessões, cada uma das quais converge (fracamente) para uma lei limite (infinitamente divisível com variância) e tem esperanças matemáticas que tendem para a esperança matemática da sua lei limite.»

Demonstração de V'_2: Vimos, em 2) e 3), que a sucessão V_n se confunde com a sucessão $C_n(+\infty)$. Pois bem, se esta última for limitada, então a sucessão $C_n(u)$ reparte-se por subsucessões fracamente convergentes tais que, sendo $C_m(u)$ uma *qualquer* dessas subsucessões, a sucessão X_m correspondente satisfaz à condição suficiente de V. Assim fica provado o nosso corolário.

Observação: Quando a sucessão V_n de V'_2 tem uma subsucessão (infinita) limitada, seja V_p, então as somas X_p, tiradas de *b)*, podem ser repartidas do mesmo modo que se repartem as somas X_n na hipótese *a)*. Concluímos que o caso $V_n \longrightarrow +\infty$ é o único em que não podemos assegurar que existem constantes S_n tais que as leis das somas X_n contêm uma subsucessão convergente para uma lei limite (i. d. com variância) e as esperanças matemáticas das leis dessa subsucessão tendem para a esperança matemática da sua lei limite.

Fechamos este parágrafo com um *exemplo* destinado a mostrar que a condição *a)* de V'_2 não é necessária para que se verifique a tese desse corolário. Com efeito, tome-se $k_n = n^2$, $E_{nk} \equiv 0$, $V_{nk} = 1/n$(*), idênticamente em k, e $C_n(u) = 0$ ou $n/2$ ou n, conforme $u \leqq -n$ ou $-n < u \leqq n$ ou $u > n$(**). Sai $V_n = C_n(+\infty) = n \uparrow +\infty$. Todavia,

$$G_n(u) = \int_{-\infty}^{u} \frac{dC_n(x)}{1+x^2} = 0 \text{ ou } \frac{n/2}{1+n^2} \text{ ou } \frac{n}{1+n^2},$$

conforme $u \leqq -n$ ou $-n < u \leqq n$ ou $u > n$, de modo que $G_n(u) \xrightarrow{c} 0$ e, pondo $S_n \equiv 0$, as leis das somas X_n convergem para a lei imprópria de esperança matemática nula.

§ 6) Convergência para leis de Lévy

Um teorema sobre funções convexas. Iniciamos o parágrafo por uma exposição preparatória, a qual pertence à teoria das funções convexas.

Recordemos que uma função $\Theta(x)$, real e de variável real, se diz *convexa* ou *convexa no sentido lato* num intervalo de valores x, quando ela satisfaz à desigualdade

$$1) \qquad \Theta[(x_1+x_2)/2] \leqq [\Theta(x_1)+\Theta(x_2)]/2,$$

válida para quaisquer valores x_1 e x_2 pertencentes ao intervalo considerado.

A função $\Theta(x)$ diz-se *convexa no sentido restrito* num intervalo de valores x, quando ela satisfaz à desigualdade

$$2) \quad \Theta(q_1x_1+q_2x_2+\cdots+q_sx_s) \leqq q_1\cdot\Theta(x_1)+q_2\cdot\Theta(x_2)+\cdots+q_s\cdot\Theta(x_s),$$
$$\text{com} \quad 0<q_1, q_2, \ldots, q_s \quad \text{e} \quad q_1+q_2+\cdots+q_s=1,$$

(*) Ver a observação posterior a III.

(**) Podem obter-se variáveis X_{nk}, independentes por linhas e conformes com o texto, considerando primeiro variáveis i. d. X_n de esperanças matemáticas nulas e de representações de Kolmogorov feitas à custa das funções $C_n(u)$ aqui citadas e decompondo depois cada X_n na soma de n^2 parcelas independentes e idênticamente distribuídas.

válida para qualquer número natural s, para quaisquer valores $x_1, x_2, \ldots, x_s$ pertencentes ao intervalo considerado e para quaisquer constantes $q_1, q_2, \ldots, q_s$ que satisfaçam às restrições indicadas.

Postas estas definições, estamos aptos a enunciar a proposição seguinte:

I) «Se uma função for convexa num intervalo aberto e se for limitada superiormente num intervalo significativo, interior ao primeiro, então a função, considerada no intervalo primitivo, goza das propriedades seguintes:

É limitada superiormente em *qualquer* intervalo interior; é contínua e convexa no sentido restrito; tem as duas semiderivadas laterais, a esquerda e a direita, em toda a parte, não podendo o valor da semiderivada esquerda num ponto exceder o da semiderivada direita no mesmo ponto; quando a variável independente passa dum valor para outro maior, o supremo das duas semiderivadas relativo ao primeiro não pode exceder o ínfimo das mesmas relativo ao outro valor; tem derivada em qualquer ponto que não pertence ao conjunto de pontos, finito ou numerável, nos quais a semiderivada esquerda é descontínua à direita e, simultâneamente, a semiderivada direita é descontínua à esquerda; finalmente, se uma das semiderivadas for contínua num ponto, a outra sai também contínua no mesmo ponto.»

Demonstração de I: Seja $\Theta(x)$ uma função convexa no intervalo aberto $a<x<b$ e seja $c \leqq x \leqq d$, com $c<d$, o intervalo interior ao primeiro em que a função $\Theta(x)$ sai limitada superiormente, o qual consideramos fechado (sem qualquer perda de generalidade).

Se $x_1, x_2, x_3, \ldots$ forem valores *arbitrários* de x no intervalo primitivo, então não só temos a desigualdade 1) como também, supondo que m é um número natural e que se verifica a relação

$$\Theta[(x_1 + \cdots + x_{2^{m-1}})/2^{m-1}] \leqq [\Theta(x_1) + \cdots + \Theta(x_{2^{m-1}})]/2^{m-1},$$

resulta a nova relação

$$\Theta[(x_1+\cdots+x_{2^m})/2^m]\leqq$$
$$\leqq\{\Theta[(x_1+\cdots+x_{2^{m-1}})/2^{m-1}]+\Theta[(x_{2^{m-1}+1}+\cdots+x_{2^m})/2^{m-1}]\}/2\leqq$$
$$\leqq[\Theta(x_1)+\cdots+\Theta(x_{2^m})]/2^m.$$

Concluímos, por indução finita, que a desigualdade entre os membros extremos da última relação é válida para qualquer número natural m.

Mais, se $p>1$ for um número natural qualquer, escolha-se m por forma que $2^{m-1}<p\leqq 2^m$ e, caso seja $p<2^m$, ponha-se

$$x_{p+1}=\cdots=x_{2^m}=(x_1+\cdots+x_p)/p=x_0;$$

então

$$(x_1+\cdots+x_{2^m})/2^m=[px_0+(2^m-p)\cdot x_0]/2^m=x_0$$

e sai

$$\Theta(x_0)\leqq[\Theta(x_1)+\cdots+\Theta(x_p)+(2^m-p)\cdot\Theta(x_0)]/2^m,$$

donde

$$\Theta(x_0)\leqq[\Theta(x_1)+\cdots+\Theta(x_p)]/p.$$

Concluímos assim que tem lugar a desigualdade

$$3)\quad \Theta[(x_1+x_2+\cdots+x_p)/p]\leqq[\Theta(x_1)+\Theta(x_2)+\cdots+\Theta(x_p)]/p,$$

válida para todo o número natural p.

Se $r_1, r_2, \ldots, r_s$ forem *quaisquer números racionais positivos de soma igual a* 1, podemos fazer $r_\sigma=i_\sigma/p\,(\sigma=1,2,\ldots,s)$, onde supomos que as s fracções são de termos inteiros e positivos. Nestas condições, a fórmula 3) dá

$$\Theta[(i_1x_1+i_2x_2+\cdots+i_sx_s)/p]\leqq[i_1\cdot\Theta(x_1)+i_2\cdot\Theta(x_2)+\cdots+i_s\cdot\Theta(x_s)]/p$$

ou, equivalentemente,

$$4)\quad \Theta(r_1x_1+r_2x_2+\cdots+r_sx_s)\leqq r_1\cdot\Theta(x_1)+r_2\cdot\Theta(x_2)+\cdots+r_s\cdot\Theta(x_s),$$

uma desigualdade que se confundiria com 2), se os coeficientes $r\,r$ não estivessem sujeitos à condição de serem racionais.

Sejam agora a' e b' dois números tais que $a<a'<c$ e $d<b'<b$.

Pois bem, se escolhermos um ponto x de modo que $a'<x<c$, existem números naturais i e j, com $i<j$, tais que $y=a'+j\cdot(x-a')/i$ pertence ao intervalo $c\leqq x\leqq d$, no qual $\Theta(x)$ tem, por hipótese, um supremo finito que vamos designar por S. Portanto, usando 4) no caso $s=2$, podemos escrever

$$\begin{gathered}\Theta(x)=\Theta\{[iy+(j-i)\cdot a']/j\}\leqq\\ \leqq i\cdot\Theta(y)/j+(j-i)\cdot\Theta(a')/j\leqq[iS+(j-i)\cdot\Theta(a')]/j\leqq\\ \leqq\sup[|S|,|\Theta(a')|],\end{gathered}$$

o que prova que a função $\Theta(x)$ é limitada superiormente no intervalo $a'<x\leqq d$. De forma semelhante se vê que, seleccionando um ponto x de modo que $d<x<b'$, sai

$$\Theta(x)\leqq\sup[|S|,|\Theta(b')|],$$

o que prova que a função $\Theta(x)$ é limitada superiormente no intervalo $a'<x<b'$. Como esta conclusão é válida, seja qual for a escolha de a' e b' nas condições acima indicadas, podemos afirmar que a função $\Theta(x)$ tem a primeira propriedade referida no enunciado.

Ora, dados os números naturais i e $j>i$ e dado um número x situado entre a e b, existem sempre números *positivos* η tão pequenos que os pontos $x\pm j\eta$ também se situam entre a e b. Por isso e por causa de 4), obtemos as duas relações seguintes, uma para o sinal $+$ e a outra para o sinal $-$,

$$\begin{gathered}\Theta(x\pm i\eta)=\Theta\{[i\cdot(x\pm j\eta)+(j-i)\cdot x]/j\}\leqq\\ \leqq i\cdot\Theta(x\pm j\eta)/j+(j-i)\cdot\Theta(x)/j,\end{gathered}$$

as quais implicam

5) $\quad[\Theta(x\pm i\eta)-\Theta(x)]/i\leqq[\Theta(x\pm j\eta)-\Theta(x)]/j$, com $i<j$.

As duas desigualdades 5) e mais a desigualdade

$$2\cdot\Theta(x)\leqq\Theta(x-i\eta)+\Theta(x+i\eta),$$

esta uma consequência imediata de 1), permitem escrever

$$6) \qquad [\Theta(x)-\Theta(x-j\eta)]/j \leqq [\Theta(x)-\Theta(x-i\eta)]/i \leqq$$
$$\leqq [\Theta(x+i\eta)-\Theta(x)]/i \leqq [\Theta(x+j\eta)-\Theta(x)]/j, \text{ com } i<j.$$

Em 6) fixemos i, façamos $\eta \longrightarrow 0$ continuamente e ponhamos $j \longrightarrow +\infty$ de modo tal que os pontos $x \pm j\eta$ se conservem num intervalo interior ao intervalo compreendido entre a e b. Então, a primeira propriedade da função $\Theta(x)$ implica

$$\lim_{\eta \to 0} \Theta(x-i\eta) = \Theta(x) = \lim_{\eta \to 0} \Theta(x+i\eta),$$

o que prova que a função $\Theta(x)$ é contínua em qualquer ponto x situado entre a e b.

A continuidade que acabamos de estabelecer e a desigualdade 4) permitem chegar a 2), fazendo tender os rr para os qq. Portanto, a função $\Theta(x)$ é convexa no sentido restrito em $a<x<b$.

Retomemos a fórmula 6) e ponhamos nela $j\eta=\varepsilon$ e $i\eta=\delta$. Sai

$$7) \qquad [\Theta(x)-\Theta(x-\varepsilon)]/\varepsilon \leqq [\Theta(x)-\Theta(x-\delta)]/\delta \leqq [\Theta(x+\delta)-\Theta(x)]/\delta \leqq$$
$$\leqq [\Theta(x+\varepsilon)-\Theta(x)]/\varepsilon, \text{ com } \delta<\varepsilon.$$

Aqui podemos considerar $\varepsilon>0$ arbitrário, contanto que $x+\varepsilon$ e $x-\varepsilon$ se situem entre a e b, mas δ parece estar sujeito à restrição $\delta=i\varepsilon/j$; contudo, dado ε, a continuidade de $\Theta(x)$ *alarga* 7) *a valores positivos quaisquer de* δ (não superiores a ε). Portanto, quando $\varepsilon \downarrow 0$, $[\Theta(x-\varepsilon)-\Theta(x)]/(-\varepsilon)$ não decresce e $[\Theta(x+\varepsilon)-\Theta(x)]/\varepsilon$ não cresce, pelo que existe o limite de qualquer dessas duas razões incrementais, quando $\varepsilon \longrightarrow 0$; o limite da primeira é $\Theta'_e(x)$, a *semiderivada esquerda* da função Θ no ponto x, e o limite da outra é $\Theta'_d(x)$, a *semiderivada direita* correspondente.

Em face de 7) é óbvio que se verifica a relação

$$8) \qquad \Theta'_e(x) \leqq \Theta'_d(x) \quad \text{para} \quad a<x<b.$$

Posto isso, façamos $x-\delta=x_1$, $x=x_2$ e $x+\varepsilon=x_3$ em 7) e iteremos a desigualdade resultante; obtemos

$$9) \qquad [\Theta(x_2)-\Theta(x_1)]/(x_2-x_1)\leqq[\Theta(x_3)-\Theta(x_2)]/(x_3-x_2)\leqq$$
$$\leqq[\Theta(x_4)-\Theta(x_3)]/(x_4-x_3),$$

$$\text{com} \quad a<x_1<x_2<x_3<x_4<b \quad \text{e} \quad x_2-x_1\leqq x_3-x_2\leqq x_4-x_3 .$$

Quando $x_2\downarrow x_1$ e $x_3\uparrow x_4$ em 9), sai $\Theta'_d(x_1)\leqq\Theta'_e(x_4)$. Esta relação e 8) permitem escrever a desigualdade

$$10) \qquad \Theta'_e(x_1)\leqq\Theta'_d(x_1)\leqq\Theta'_e(x_4)\leqq\Theta'_d(x_4),$$

da qual se depreende que o supremo das duas semiderivadas da função $\Theta(x)$, tomado num ponto de $a<x<b$, não pode exceder o ínfimo dessas semiderivadas, tomado em qualquer ponto ulterior do mesmo intervalo.

Ora bem, se x_1 [ou x_4] for um ponto em que a semiderivada esquerda [ou direita] da função Θ saia contínua à direita [ou à esquerda], basta fazer $x_4\longrightarrow x_1$ [ou $x_1\longrightarrow x_4$] em 10), para que resulte $\Theta'_e(x_1)=\Theta'_d(x_1)$ [ou $\Theta'_e(x_4)=\Theta'_d(x_4)$]. Consequentemente, a função $\Theta(x)$ só pode deixar de admitir derivada no conjunto dos pontos do intervalo $a<x<b$, nos quais a sua semiderivada esquerda for descontínua à direita e, simultâneamente, a sua semiderivada direita for descontínua à esquerda.

O conjunto de pontos que acabamos de mencionar pertence ao conjunto dos pontos em que as duas semiderivadas de $\Theta(x)$, ambas funções monotónicas, são simultâneamente descontínuas e como tal é um conjunto finito ou numerável.

Suponhamos, finalmente, que a função $\Theta'_e(x)$ é contínua no ponto y situado entre a e b; logo $\Theta'_e(y)=\Theta'_d(y)$. Tendo em vista 10), podemos agora raciocinar como segue: Se $y'<y$, sai

$$\Theta'_e(y')\leqq\Theta'_d(y')\leqq\Theta'_e(y),$$

donde, fazendo $y'\uparrow y$,

$$\lim_{y'\uparrow y}\Theta'_d(y')=\Theta'_e(y)=\Theta'_d(y);$$

$$\text{se} \quad y''' > y'' > y, \quad \text{sai} \quad \Theta'_e(y) \leq \Theta'_d(y'') \leq \Theta'_e(y'''),$$

donde, fazendo $y''' \downarrow y$,

$$\lim_{y'' \downarrow y} \Theta'_d(y'') = \Theta'_e(y).$$

Portanto, a função $\Theta'_d(x)$ é também contínua no ponto y.— Semelhantemente se mostra que a continuidade de $\Theta'_d(x)$ no ponto y implica a de $\Theta'_e(x)$ no mesmo ponto.

Está assim completada a demonstração de I.

Observação: Se trocarmos o sinal $\leq$ da fórmula 1) por $\geq$, obtemos a definição de *função côncava* ou *côncava no sentido lato* e, se trocarmos o sinal da desigualdade em 2), obtemos a definição de *função côncava no sentido restrito*. Se uma função $\Theta(x)$ for côncava num qualquer dos dois sentidos, então $-\Theta(x)$ sai convexa no mesmo sentido. Sendo assim, podemos estabelecer um teorema para funções côncavas, o qual resulta de I por pequenas modificações óbvias.

* * *

Novas propriedades das funções características. Seguem mais algumas considerações preliminares do assunto que pretendemos estudar neste parágrafo.

Para começar, chamemos a uma f. c. *própria*, quando e só quando a sua lei for própria. Então, podemos apresentar a proposição auxiliar seguinte:

II) «Uma função característica *própria* não pode ter módulo idênticamente igual a 1.»

Demonstração de II: Admitamos que existe uma f. c. *própria* $f(t)$ tal que $|f(t)| \equiv 1$ e vamos representar por $F(x)$ a função de distribuição correspondente. Então, sendo t_1 e t_2 dois números reais significativos que tornam t_1/t_2 *irracional*, existem números reais $\tau_s (s=1, 2)$ tais que $f(t_s) = e^{i\tau_s}$. Tendo agora em vista a definição de f. c., sai a relação

$$1 = e^{-i\tau_s} \cdot f(t_s) = \int_R e^{i \cdot (xt_s - \tau_s)} dF(x),$$

a qual implica

$$\int_R [1-\cos(x t_s-\tau_s)]\, dF(x)=0,$$

onde a função integranda é não-negativa. Concluímos que, fixado o índice s, a função $F(x)$ só pode crescer num x tal que $x t_s-\tau_s=2\pi\lambda_s$, onde λ_s significa um número inteiro; doutro lado, a hipótese duma f. c. própria obriga $F(x)$ a ter (pelo menos) dois pontos de crescimento distintos, sejam x' e x''. Portanto, para cada s existem dois números inteiros distintos λ_s' e λ_s'' tais que se verificam as igualdades

$$x' t_s-\tau_s=2\pi\lambda_s' \quad \text{e} \quad x'' t_s-\tau_s=2\pi\lambda_s'',$$

as quais implicam

$$|x'-x''|\cdot|t_s|=2\pi\cdot|\lambda_s'-\lambda_s''| \quad (s=1,2).$$

Por divisão ordenada sai

$$|t_1/t_2|=|\lambda_1'-\lambda_1''|/|\lambda_2'-\lambda_2''|,$$

de modo que se infere o resultado absurdo que $|t_1/t_2|$ é racional.

Assim fica demonstrada a proposição auxiliar.

A demonstração que acabamos de fazer contém o *corolário* seguinte:

II') «Uma função característica própria f (t) não pode ter o seu módulo igual a 1 para dois valores de t cuja razão seja irracional.»

* * *

Passamos a apresentar uma *definição:*

Uma lei de função característica f (t) diz-se **autodecomponível**, *quando a cada número γ, positivo e menor que 1, corresponde uma função característica $f_\gamma(t)$ que verifica a igualdade*

11) $$f(t)=f(\gamma t)\cdot f_\gamma(t), \text{ seja qual for } t \text{ real.}$$

Logo se vê que *uma lei imprópria é autodecomponível,* pois, sendo c uma constante, tem-se $e^{ict} = e^{ic\gamma t} \cdot e^{ic(1-\gamma)t}$.

Agora propomo-nos demonstrar a proposição seguinte:

III) «A função característica duma lei autodecomponível é significativa em todo o campo real.»

Demonstração de III: Se a f. c. $f(t)$ duma lei autodecomponível se anular para algum t real, então a sua continuidade e a igualdade $f(0)=1$ impõem a existência dum número $t_0 \neq 0$ tal que

$$f(2\,t_0)=0 \quad \text{e} \quad f(t)\neq 0, \quad \text{para} \quad |t|<2\cdot|t_0|.$$

Tendo em vista 11), concluímos que

$$f_\gamma(2\,t_0)=0 \quad \text{e} \quad f_\gamma(t)\neq 0, \quad \text{para} \quad |t|<2\cdot|t_0|.$$

Sendo assim, II e IV de § 8 de A mostram que

$$1=1-|f_\gamma(2\,t_0)|^2 \leqq 4\cdot[1-|f_\gamma(t_0)|^2], \quad \text{donde} \quad 1-|f_\gamma(t_0)|^2 \geqq 1/4;$$

doutro lado, fazendo $\gamma \uparrow 1$, tira-se de 11) que

$$f_\gamma(t_0)=f(t_0)/f(\gamma\, t_0) \longrightarrow 1 \quad \text{e, portanto,} \quad 1-|f_\gamma(t_0)|^2 \longrightarrow 0.$$

Fica assim demonstrada a tese, por redução ao absurdo.

Observação: Supondo que certa variável casual se sujeita a uma lei autodecomponível, podemos interpretar a definição acima dada como segue: Fixado um alargamento *qualquer* de escala, a variável considerada é sempre a soma da sua transformada pelo alargamento com outra variável bem determinada e independente dessa transformada. Não oferece interesse encarar uma mudança de escala, consistindo numa contracção, à qual corresponderia a desigualdade $\gamma>1$, pois a relação 11) dava $|f(\gamma\, t)|\geqq|f(t)|$ [A, § 6, III], donde

$$1\geqq|f(t)|\geqq|f(t/\gamma)|\geqq|f(t/\gamma^2)|\geqq\cdots\geqq\lim_{n\uparrow\infty}|f(t/\gamma^n)|=|f(0)|=1$$

e, portanto, $|f(t)|\equiv 1$, o que implicava uma lei imprópria (II). Finalmente, $\gamma=1$ conduz ao resultado trivial $f_1(t)\equiv 1$ (ver a proposição II').

* * *

Outro teorema de KHINTCHINE. Suponhamos agora que as variáveis casuais X_{nk} admitem as constantes assintóticas A_{nk} e são da forma X_k/B_n, com $1\leq k\leq n$, onde B_n significa o termo geral duma sucessão simples de constantes *positivas* e onde X_k significa o termo geral duma sucessão simples de variáveis casuais *independentes*. Recordemos, a propósito, as igualdades $A_{nk}=A_k/B_n$, introduzidas no princípio de § 8 de B.

Terminamos as nossas considerações preliminares, estudando as restrições a impor às grandezas B_n para que possam existir constantes S_n tais que as leis das somas

$$X_1/B_n+X_2/B_n+\cdots+X_n/B_n-S_n \tag{12}$$

tendam (fracamente) para uma lei limite (i. d., por causa de IV de § 2), isso pelo menos na hipótese em que tal lei é própria. A este respeito esclarece-nos a proposição seguinte, devida a KHINTCHINE:

IV) «Se as leis das somas 12), de parcelas independentes por linhas e assintòticamente constantes, convergem (fracamente) para uma lei limite (infinitamente divisível) *própria*, então $B_n\longrightarrow+\infty$ e $B_{n+1}/B_n\longrightarrow 1$, quando $n\uparrow\infty$.»

Demonstração de IV: Seja $f_k(t)$ a f. c. da variável X_k. Por hipótese, a f.c. da soma genérica 12) ou seja a função

$$\varphi_n(t)=e^{-iS_nt}\cdot\prod_{1\leq k\leq n} f_k(t/B_n)$$

tende fracamente para alguma f.c. $f(t)$ que *não* é da forma e^{ict}, com c constante [A, § 8, exemplo 1.°].

Se tivéssemos $B_n\longrightarrow 0$, quando $n\uparrow\infty$, a hipótese de as variáveis X_k/B_n admitirem as constantes assintóticas A_k/B_n implicaria $X_k\equiv A_k$, para todo o k, pois a não ser assim 2) de § 4 de B conduziria a uma contradição; logo resultaria

$f_k(t)=e^{iA_k t}$ e, portanto, $it\cdot(-S_n+\sum_{1\leq k\leq n} A_k/B_n)\xrightarrow{s}\log f(t)$,

donde a conclusão absurda

$$\log f(t)=ict, \quad \text{com} \quad c=\lim_{n\uparrow\infty}(-S_n+\sum_{1\leq k\leq n} A_k/B_n).$$

Acabamos de provar que $B_n\longrightarrow 0$ é impossível e de modo análogo se prova que a sucessão de termos B_n não admite nenhuma subsucessão evanescente.—Posto isso, se B_n não tendesse para $+\infty$, existiria uma sucessão crescente de números naturais de termo genérico m tal que $B_m\longrightarrow B\neq 0,\infty$, quando $m\uparrow\infty$; então, fixando um valor arbitrário a k e tomando um valor qualquer para a variável real t, teríamos a relação

$$e^{-iA_k t/B_m}\cdot f_k(t/B_m)\xrightarrow{s} 1,$$

uma consequência de VII de § 4 de B, a qual implicaria, por causa de V de § 6 de A,

$$f_k(t/B)=e^{iA_k t/B} \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad f_k(t)=e^{iA_k t},$$

um resultado que já se reconheceu como absurdo. Logo $B_n\longrightarrow+\infty$, quando $n\uparrow\infty$, e fica demonstrada a primeira parte da nossa tese.

Para demonstrar a segunda parte, comecemos por notar que as variáveis

$$Y_{n+1}=\sum_{1\leq k\leq n+1} X_k/B_{n+1}-S_{n+1} \quad \text{e} \quad Z_n=(\sum_{1\leq k\leq n} X_k+A_{n+1})/B_{n+1}-S_{n+1}$$

têm as funções características

$$\varphi_{n+1}(t)=e^{-itS_{n+1}}\cdot\prod_{1\leq k\leq n+1} f_k(t/B_{n+1}) \quad \text{e}$$

$$\psi_n(t)=e^{-it(S_{n+1}-A_{n+1}/B_{n+1})}\cdot\prod_{1\leq k\leq n} f_k(t/B_{n+1}),$$

respectivamente, a primeira das quais tende, por hipótese, fracamente para a f. c. *própria* $f(t)$ e a outra tem o mesmo comportamento, porque

$$e^{-itA_{n+1}/B_{n+1}} \cdot f_{n+1}(t/B_{n+1}) \xrightarrow{s} 1 \quad [\text{VII de § 4 de B}].$$

Como

$$Z_n = B_n Y_n / B_{n+1} + C_n, \quad \text{onde} \quad C_n = -S_{n+1} + (B_n S_n + A_{n+1})/B_{n+1},$$

sai, fazendo $\qquad \beta_n = B_n / B_{n+1},$

$$\psi_n(t) = e^{itC_n} \cdot \varphi_n(\beta_n t) \quad \text{e} \quad \varphi_n(t) = e^{-itC_n/\beta_n} \cdot \psi_n(t/\beta_n);$$

logo $\qquad |\varphi_n(t)|, |\psi_n(t)|, |\varphi_n(\beta_n t)|, |\psi_n(t/\beta_n)| \xrightarrow{s} |f(t)|.$

Posto isso, consideremos uma sucessão crescente *qualquer* de números naturais m tal que leve β_m a um limite β, quando $m \uparrow \infty$; é óbvio que $\beta \geqq 0$. Se tivéssemos $\beta < 1$, aplicávamos A, V de § 6 e II e VI de § 8, ao segundo membro da desigualdade

$$||f(\beta t)|^2 - |\varphi_m(\beta_m t)|^2| \leqq ||f(\beta t)|^2 - |f(\beta_m t)|^2| + ||f(\beta_m t)|^2 - |\varphi_m(\beta_m t)|^2|$$

para concluir primeiro que

$$|\varphi_m(\beta_m t)|^2 \xrightarrow{s} |f(\beta t)|^2$$

e depois que, seja qual for t,

$$|f(t)| = |f(\beta t)| = |f(\beta^2 t)| = \cdots = |f(0)| = 1;$$

se tivéssemos $\beta > 1$, concluíamos semelhantemente que

$$|\psi_m(t/\beta_m)|^2 \xrightarrow{s} |f(t/\beta)|^2$$

e depois que, seja qual for t,

$$|f(t)| = |f(t/\beta)| = |f(t/\beta^2)| = \cdots = |f(0)| = 1.$$

Como $|f(t)| \equiv 1$ implica a conclusão absurda que $f(t)$ não é f. c. própria (II), inferimos que $\beta_n \longrightarrow 1$, quando $n \uparrow \infty$, e fica assim completada a nossa demonstração.

A proposição IV admite um *corolário* que nos vai ser útil na continuação deste estudo. Ei-lo:

IV') «Se as leis das somas 12), de parcelas independentes por linhas e assintòticamente constantes, convergem para uma lei limite *própria,* então, dado qualquer número γ, com $0 \leqq \gamma \leqq 1$, existem números naturais $l = l(n) < n$ tais que $B_l/B_n \longrightarrow \gamma$, quando $n \uparrow \infty$. Se $0 < \gamma < 1$, tem-se $l \longrightarrow \infty$ e $n - l \longrightarrow \infty$, quando $n \uparrow \infty$.»

Demonstração de IV': Se $\gamma = 0$, basta tomar $l(n) \leqq l_0 < +\infty$ e atender a $B_n \longrightarrow \infty$; se $\gamma = 1$, basta tomar $l(n)$ de modo que $n - l(n) \leqq n_0 < +\infty$ e atender a $B_n/B_{n+1} \longrightarrow 1$.

Examinemos agora a hipótese $0 < \gamma < 1$, na qual se tem forçosamente $l(n) \longrightarrow \infty$ e $n - l(n) \longrightarrow \infty$, pois no caso contrário a sucessão de termos B_l/B_n admitia sublimite nulo ou igual a 1. Se a tese do corolário não fosse correcta, existiriam uma sucessão infinita crescente de números naturais de termo genérico m e um número ε, com $0 < \varepsilon < \inf(\gamma, 1-\gamma)$, tais que, escolhido um m qualquer, verificar-se-ia a desigualdade $\gamma - \varepsilon \geqq B_h/B_m \geqq \gamma + \varepsilon$, isso fosse qual fosse o valor de $h < m$. Pondo m suficientemente grande, ter-se-ia $B_h/B_m \leqq \gamma - \varepsilon$ para os primeiros valores de h admissíveis e $B_h/B_m \geqq \gamma + \varepsilon$ para os últimos valores de h admissíveis; portanto, a cada m corresponderiam dois valores particulares consecutivos de h, sejam h' e h'', tais que

$$B_{h'}/B_m \leqq \gamma - \varepsilon \quad \text{e} \quad B_m/B_{h''} \leqq 1/(\gamma + \varepsilon), \quad \text{donde} \quad B_{h'}/B_{h''} < 1 - \varepsilon/\gamma.$$

A última desigualdade só é compatível com a propriedade $B_n/B_{n+1} \longrightarrow 1$, se h'' for limitado, coisa impossível, porque $B_{h''}/B_m \geqq \gamma + \varepsilon$ e $B_m \longrightarrow +\infty$. Assim fica demonstrado o corolário.

* * *

Teorema básico de Lévy. O problema de caracterizar a família das leis (i. d.) que podem ser limites (fracos) de somas 12), de parcelas independentes por linhas e assintòticamente constantes, foi proposto por Khintchine e foi resolvido por P. LÉVY. Por isso, não parece mal chamar *leis de LÉVY* às leis da família mencionada.

Começamos o estudo das leis de LÉVY por uma proposição sumamente interessante do ponto de vista teórico, à qual podemos chamar *teorema básico de LÉVY:*

V) «Toda a lei autodecomponível é uma lei de LÉVY e reciprocamente.»

Demonstração de V: Suponhamos que a lei da f. c. $f(t)$ é autodecomponível, façamos corresponder a todo o número natural k uma fracção $\gamma_k=(k-1)/k$ e, recordando III, ponhamos

$$\varphi_k(t)=f_{\gamma_k}(kt)=[f(kt)]/[f((k-1)t)].$$

Então, substituindo em 11) a constante γ por γ_k e a variável t por kt, reconhece-se que $\varphi_k(t)$ é uma f. c. para qualquer k, a qual se reduz a $f(t)$ para $k=1$. Pois bem, se fizermos corresponder variáveis casuais *independentes* X_k às f. c. $\varphi_k(t)$, ficam as somas $\sum\limits_{1\leqq k\leqq n} X_k/n$ com as funções características

$$\psi_n(t)=\prod_{1\leqq k\leqq n}\varphi_k(t/n)=f(t),$$

de modo que sai $\psi_n(t)\xrightarrow{s}f(t)$, quando $n\uparrow\infty$. Portanto, se conseguirmos mostrar que as parcelas X_k/n são assintòticamente constantes, ficará provado que toda a lei autodecomponível é também uma lei de LÉVY.

Escolhido um valor para t, designemos por μ o ínfimo de $|f(u)|$, quando u percorre o intervalo fechado de 0 a t; resulta $|f[(k-1)t/n]|\geqq\mu$, para $1\leqq k\leqq n$, e tem-se também $\mu>0$, por causa de III e da continuidade de $f(u)$. Como $n\uparrow\infty$ implica

$$|f(kt/n)-f[(k-1)t/n]|\longrightarrow 0,$$

uniformemente em k, por causa da continuidade uniforme de $f(u)$, concluímos que

$$|f(kt/n)/f[(k-1)t/n]-1|\longrightarrow 0,$$

também uniformemente em k, ou, equivalentemente, que

$$\sup_{1 \leq k \leq n} |\varphi_k(t/n) - 1| \longrightarrow 0,$$

o que mostra que as variáveis casuais X_k/n são infinitesimais [VII de § 4 de B] e, portanto, são assintòticamente constantes dum modo particular.

Falta provar que toda a lei de Lévy é autodecomponível. Mais precisamente, falta provar que toda a lei de Lévy *própria* é autodecomponível, pois já vimos que uma lei imprópria é sempre autodecomponível.

Para o efeito, vamos supor que as parcelas que figuram nas somas 12) são assintòticamente constantes, vamos designar por $f_k(t)$ a f.c. de X_k e vamos admitir que

13) $$\Theta_n(t) = e^{-iS_n t} \cdot \prod_{1 \leq k \leq n} [f_k(t/B_n)] \xrightarrow{s} f(t), \quad \text{quando} \quad n \uparrow \infty,$$

onde $f(t)$ é f.c. *própria*, i.d. e jamais nula [A, § 9, I].

Escolhido um número γ, com $0 < \gamma < 1$, sabemos, por IV', que existem números naturais $l = l(n) < n$ tais que $n \uparrow \infty$ implica $l \longrightarrow \infty$, $n - l \longrightarrow \infty$ e $B_l/B_n \longrightarrow \gamma$. Então, fixado t e dado $\varepsilon > 0$, tem-se, para l suficientemente grande,

$$|f(\gamma t) - \Theta_l(B_l t/B_n)| \leq |f(\gamma t) - f(B_l t/B_n)| +$$
$$+ |f(B_l t/B_n) - \Theta_l(B_l t/B_n)| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

porque a função f é contínua e a sucessão Θ_l converge uniformemente para f em qualquer intervalo fechado [VI de § 8 de A]. Quer dizer:

14) $$\Theta_l(B_l t/B_n) \xrightarrow{s} f(\gamma t), \quad \text{quando} \quad n \uparrow \infty.$$

Visto que podemos escrever

15) $$\Theta_n(t)/\Theta_l(B_l t/B_n) = e^{i(S_l B_l/B_n - S_n)t} \cdot \prod_{l < k \leq n} [f_k(t/B_n)],$$

tiramos de 13) e de 14) que o segundo membro de 15) tem o limite $f(t)/f(\gamma t)$, quando $n \uparrow \infty$, isso seja qual for t. Como o segundo membro referido é uma f.c. para qualquer n [1) e I de § 8 de A], o seu limite é também uma f.c. [VII' de § 8 de A], a qual é inteiramente determinada pela escolha de γ, de modo que pode representar-se por $f_\gamma(t)$. Concluímos que $f(t)$ satisfaz à definição de f. c. duma lei autodecomponível, o que termina a demonstração de V.

V admite um *corolário* interessante e útil para a continuação deste estudo:

V') «Uma lei autodecomponível e as suas componentes são leis infinitamente divisíveis.»

Demonstração de V': É óbvio que basta considerar leis autodecomponíveis próprias (ver o texto a seguir a 11).

Se $f(t)$ for a f. c. de tal lei, então, dado γ, positivo e menor que 1, temos a decomposição, válida para qualquer t,

$$f(t)=f(\gamma t)\cdot f_\gamma(t),$$

onde $f_\gamma(t)$ é uma f.c.. Pois bem, $f(t)$ é a f. c. duma lei de Lévy (V) e como tal é i. d. (IV de § 2); $f(\gamma t)$ é também i. d. [I de § 2 de B]; finalmente, $f_\gamma(t)$ é i. d., porque 15) mostra que a lei correspondente é limite das leis das somas

$$X_{l+1}/B_n+\cdots+X_n/B_n+S_l B_l/B_n-S_n,$$

onde $n-l\longrightarrow\infty$, quando $n\uparrow\infty$, e as parcelas são independentes por linhas e assintòticamente constantes.

* * *

Primeira caracterização das leis de Lévy. Como a f. c. $f(t)$ duma lei de Lévy é i. d. (V e V'), podemos representar o seu logaritmo sob a forma de Lévy e Khintchine:

$$16)\qquad \log f(t)=iat+\int_R\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG(u),$$

onde valem as convenções explicadas a propósito de I de § 11 de A, as quais invocaremos à medida que for oportuno. Assim põe-se a questão de procurar a condição necessária e suficiente a que devem sujeitar-se os parâmetros de 16) para que a lei correspondente seja de Lévy.

Escolhido um número γ, positivo e menor que 1, substituamos a variável t de 16) por γt. Como

$$u/(1+\gamma^2 u^2)=(1/\gamma)\cdot[(\gamma u)/(1+\gamma^2 u^2)]$$

é integrável com respeito a $G(u)$, sai

$$17)\quad \log f(\gamma t)=i a' t+\int_R\left(e^{i\gamma t u}-1-\frac{i\gamma t u}{1+\gamma^2 u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG(u),$$

$$\text{com}\quad a'=\gamma\cdot\left[a+(1-\gamma^2)\cdot\int_R\frac{u}{1+\gamma^2 u^2}\,dG(u)\right].$$

Façamos agora $a''=a-a'$, substituamos γu por u no integral que figura em 17) e recordemos que podemos interpretar os integrais de 16) e de 17) como integrais de Riemann-Stieltjes ou seja como $\overset{\mathcal{R}}{\int}$ (simbòlicamente). Obtemos a relação

$$18)\quad \log\frac{f(t)}{f(\gamma t)}=i a'' t+\overset{\mathcal{R}}{\int_R}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}\,dG(u)-$$

$$-\overset{\mathcal{R}}{\int_R}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}\cdot\frac{1+u^2/\gamma^2}{(1+u^2)/\gamma^2}\,dG(u/\gamma).$$

Como $(1+u^2/\gamma^2)/(1/\gamma^2+u^2/\gamma^2)$ é integrável com respeito a $G(u/\gamma)$, existe uma função de distribuição a menos dum factor constante não-negativo, seja $H_\gamma(u)$, definida pelas igualdades

$$H_\gamma(-\infty)=0 \quad\text{e}\quad dH_\gamma(u)=(\gamma^2+u^2)\,dG(u/\gamma)/(1+u^2).$$

Sendo assim, basta estender 8) de § 10 de A ao intervalo de $\alpha=-\infty$ a $\beta=+\infty$, para tirar de 18) a relação

$$19)\quad \log\frac{f(t)}{f(\gamma t)}=ia''t+$$

$$+\overset{\mathcal{R}}{\int_R}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)\cdot\frac{1+u^2}{u^2}\,d[G(u)-H_\gamma(u)],$$

onde a diferença $G(u)-H_\gamma(u)$ é uma função de variação limitada, a qual se anula para $u=-\infty$. Doutro lado, se $f(t)$ for a f. c. duma lei de LÉVY, sai $f(t)/f(\gamma t)$ uma f. c. i. d. (V e V') e, portanto, existem uma constante a_γ e uma função de distribuição a menos dum factor constante não-negativo, seja $G_\gamma(u)$, tais que se verifica a relação

$$20)\quad \log\frac{f(t)}{f(\gamma t)}=i a_\gamma t+\int_R^{\mathcal{R}}\left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)\cdot\frac{1+u^2}{u^2}\,dG_\gamma(u).$$

Tendo em vista I' de § 11 de A, concluímos de 19) e 20) que são válidas as igualdades

$$a=a'' \text{ e } G_\gamma(u)=G(u)-H_\gamma(u) \text{ para todo } u \text{ real.}$$

O que viemos expondo prova que a função $G(u)$ correspondente à representação de LÉVY e KHINTCHINE duma lei de LÉVY torna não-decrescente (na variável u) a diferença

$$G(u)-\int_{-\infty}^{u}\frac{\gamma^2+v^2}{1+v^2}\,dG(v/\gamma),$$

isso seja qual for o número γ, positivo e menor que 1.

Suponhamos agora que a função $G(u)$ correspondente a uma f.c. i.d. $f(t)$ goza da propriedade que acabamos de referir. Então, dado qualquer γ, positivo e menor que 1, sai $G(u)-H_\gamma(u)$ uma função de distribuição a menos dum factor constante não-negativo e, portanto, definindo a'' como anteriormente, resulta de 19) que $f(t)/f(\gamma t)$ é uma f. c. (i. d.), o que prova que a lei de $f(t)$ é autodecomponível e, consequentemente, é de LÉVY.

Posto isso tudo, estamos aptos a enunciar *outro teorema de LÉVY:*

VI) «Uma lei (infinitamente divisível) é de LÉVY, quando e só quando a função $G(u)$ da sua representação de LÉVY e KHINTCHINE é tal que, dado um número arbitrário γ, com $0<\gamma<1$, a diferença

$$G(u)-\int_{-\infty}^{u}\frac{\gamma^2+v^2}{1+v^2}\,dG(v/\gamma)$$

sai não-decrescente em $-\infty<u<+\infty$.»

Oferece interesse exprimir o resultado alcançado em VI dum modo diverso.

Se passarmos da representação de LÉVY e KHINTCHINE duma lei i. d. para a sua representação de LÉVY [II e 12) de § 11 de A], então, dado γ entre 0 e 1, sai, atendendo a 8) de § 10 de A,

$$\int_{-\infty}^{u}\frac{1+v^2}{v^2}\,d[G(v)-H_\gamma(v)]=$$

$$=\int_{-\infty}^{u}\frac{1+v^2}{v^2}\,dG(u)-\int_{-\infty}^{u}\frac{1+v^2/\gamma^2}{v^2/\gamma^2}\,dG(v/\gamma)=$$

$$=M(u)-M(u/\gamma),\quad \text{se}\quad u<0,\quad \text{e}$$

$$\int_{u+}^{+\infty}\frac{1+v^2}{v^2}\,d[G(v)-H_\gamma(v)]=N(u)-N(u/\gamma),\quad \text{se}\quad u>0,$$

de modo que o não-decrescimento de $G(u)-H_\gamma(u)$ em $-\infty<u<+\infty$ implica que $M(u)-M(u/\gamma)$ e $N(u/\gamma)-N(u)$ saem não-decrescentes, respectivamente em $-\infty<u<0$ e em $0<u<+\infty$.

Suponhamos agora que as funções $M(u)$ e $N(u)$ correspondentes à lei i. d. considerada gozam das propriedades que acabamos de referir. Então, dado γ entre 0 e 1, as funções $M(u)-M(u/\gamma)$ e $N(u)-N(u/\gamma)$ correspondem à representação de LÉVY de certas leis i. d. [II de § 11 de A]. Portanto, sendo $u>0$, as igualdades

$$\int_{u}^{+\infty}\frac{v^2}{1+v^2}\,d[N(v)-N(v/\gamma)]=$$

$$=\int_{u}^{+\infty}dG(v)-\int_{u}^{+\infty}\frac{1+v^2/\gamma^2}{(1+v^2)/\gamma^2}\,dG(v/\gamma)=$$

$$=[G(+\infty)-H_\gamma(+\infty)]-[G(u)-H_\gamma(u)]$$

têm um primeiro membro não-crescente na variável u, de modo que tornam a diferença $G(u)-H_\gamma(u)$ não-decrescente na mesma variável. Semelhantemente se mostra que essa diferença é não-decrescente em $-\infty<u<0$. Finalmente, tem-se

$$[G(+0)-H_\gamma(+0)]-[G(-0)-H_\gamma(-0)]=(1-\gamma^2)b^2\geq 0,$$

independentemente de qualquer hipótese relativa às funções M e N.

O estudo precedente prova o seguinte *corolário* de *VI:*

VI') «Uma lei (infinitamente divisível) é de Lévy, quando e só quando as funções $M(u)$ e $N(u)$ da sua representação de Lévy são tais que, dado um número arbitrário γ, com $0<\gamma<1$, as diferenças $M(u)-M(u/\gamma)$ e $N(u/\gamma)-N(u)$ saem ambas funções não-decrescentes da variável u, a primeira em $-\infty<u<0$ e a outra em $0<u<+\infty$.»

Se a lei i. d. considerada tiver variância, ela pode representar-se pela fórmula de Kolmogorov [IV de § 11 de A]. Então, tendo em vista 12) e 15) de § 11 de A, saem as relações

$$M(u)-M(u/\gamma)=\int_{u/\gamma}^{u}\frac{dC(v)}{v^2},\quad \text{se}\quad u<0,\quad \text{e}$$

$$N(u-0)-N(u/\gamma-0)=\int_{u}^{u/\gamma}\frac{dC(v)}{v^2},\quad \text{se}\quad u>0,$$

as quais nos habilitam a enunciar um *novo corolário:*

VI'') «Uma lei (infinitamente divisível) com variância é de Lévy, quando e só quando a função $C(u)$ da sua representação de Kolmogorov é tal que, dado um número arbitrário γ, com $0<\gamma<1$,

$$\int_{u/\gamma}^{u}\frac{dC(v)}{v^2}\ \text{não decresce em}\ -\infty<u<0\ \text{e}$$

$$\int_{u}^{u/\gamma}\frac{dC(v)}{v^2}\ \text{não cresce em}\ 0<u<+\infty.\text{»}$$

Outra caracterização das leis de Lévy. Embora as proposições VI a VI'' revelem algum progresso, quando comparadas com V, convém dar um aspecto mais prático à condição necessária e suficiente para que uma lei (i. d.) seja de Lévy. Eis o motivo das considerações que vamos empreender em seguida.

Começamos por enunciar *outro teorema de Lévy:*

VII) «Uma lei (infinitamente divisível) é de Lévy, quando e só quando as funções $M(u)$ e $N(u)$ da sua representação de Lévy gozam das propriedades seguintes:

A função $M(u)$, considerada em $-\infty<u<0$, sai contínua e as suas semiderivadas $M'_e(u)$ e $M'_d(u)$, respectivamente à esquerda e à direita, existem ambas em qualquer ponto; além disso, os produtos $u \cdot M'_e(u)$ e $u \cdot M'_d(u)$ são tais que o seu ínfimo em qualquer ponto u_1 não pode ser menor do que o seu supremo em qualquer ponto $u_2>u_1$.

Simultâneamente, a função $N(u)$, considerada em $0<u<$ $<+\infty$, sai contínua e as suas semiderivadas $N'_e(u)$ e $N'_d(u)$ existem ambas em qualquer ponto; além disso, os produtos $u \cdot N'_e(u)$ e $u \cdot N'_d(u)$ são tais que o seu supremo em qualquer ponto u_1 não pode exceder o seu ínfimo em qualquer ponto $u_2>u_1$.»

Demonstração de VII: Suponhamos que as funções $M(u)$ e $N(u)$ correspondem à representação de Lévy duma lei de Lévy e seja γ um número arbitrário, contanto que $0<\gamma<1$.

O não-decrescimento de $M(u)-M(u/\gamma)$, assegurado por VI', impõe a desigualdade

$$M(w/\gamma)-M(v/\gamma)\leqq M(w)-M(v) \tag{21}$$

para quaisquer números v e w tais que $v<w<0$.

Fazendo agora $v=-e^y$, $w=-e^z$ e $\gamma=e^{z-y}$, transformamos 21) primeiro na relação

$$M(-e^y)-M(-e^{2y-z})\leqq M(-e^z)-M(-e^y)$$

e depois, pondo $M(-e^x)=\Theta(x)$ para $-\infty<x<+\infty$, na desigualdade

$$\Theta(y)\leqq[\Theta(z)+\Theta(2y-z)]/2,$$

a qual prova que $\Theta(x)$ é uma função convexa no campo real.

A forma como definimos $\Theta(x)$ mostra claramente que existe um intervalo significativo da variável x, onde a função Θ é limitada, de sorte que pode aplicar-se-lhe a proposição I. Portanto, a função $\Theta(x)$, considerada em $-\infty<x<+\infty$, sai contínua e tem as duas semiderivadas em qualquer ponto; além disso, o supremo das duas semiderivadas num ponto x_2 não pode exceder o ínfimo dessas derivadas noutro ponto $x_1>x_2$. Como qualquer semiderivada da função Θ num ponto x é igual à semiderivada contrária da função M no ponto $u=-e^x$, multiplicada por u, concluímos que a função $M(u)$, considerada em $-\infty<u<0$, tem as propriedades referidas no enunciado.

De modo semelhante se mostra que a função $N(u)$, considerada em $0<u<+\infty$, satisfaz às propriedades atrás mencionadas.

Para demonstrar a parte restante de VII, suponhamos que as funções $M(u)$ e $N(u)$ correspondem à representação de Lévy duma lei i. d. e que elas se sujeitam às condições descritas no enunciado.

Então, dado um número γ, arbitrário, contanto que $0<\gamma<1$, tem-se, para qualquer $u<0$,

$$\inf\{[(u/\gamma)\cdot M'_e(u/\gamma)],[(u/\gamma)\cdot M'_d(u/\gamma)]\}\geq\sup\{[u\cdot M'_e(u)],[u\cdot M'_d(u)]\}$$

ou, equivalentemente, a relação

$$22)\qquad (1/\gamma)\cdot\sup[M'_e(u/\gamma),M'_d(u/\gamma)]\leq\inf[M'_e(u),M'_d(u)],$$

na qual só figuram semiderivadas não-negativas.

Ora, dados dois números negativos u_1 e $u_2>u_1$, podemos *estender o teorema dos acréscimos finitos a funções contínuas em* $u_1\leq u\leq u_2$ *que tenham semiderivadas esquerda e direita em* $u_1<u<u_2$ para obtermos a desigualdade

$$23)\qquad \inf[M'_e(u_3),M'_d(u_3)]\leq[M(u_2)-M(u_1)]/(u_2-u_1)\leq \leq\sup[M'_e(u_3),M'_d(u_3)],$$

válida para algum u_3 situado entre u_1 e u_2.

Doutro lado, de 22) tiramos, fazendo $u=u_2$ e escolhendo γ por forma que $u_1=u/\gamma$, a relação

$$22') \qquad \sup[M'_e(u_1), M'_d(u_1)] \leqq \inf[M'_e(u_2), M'_d(u_2)],$$

a qual prova que, fixados os números negativos v e $w>v$, qualquer das funções não-negativas

$$\sup[M'_e(u), M'_d(u)] \quad \text{e} \quad \inf[M'_e(u), M'_d(u)],$$

considerada no intervalo de v a w, sai não-decrescente e, consequentemente, não pode exceder o seu valor no ponto w, valor esse que é necessàriamente *finito,* porque a hipótese contraditória dava o resultado absurdo $M'(u)=+\infty$ para $w<u<0$. Nestas condições sabe-se(*) que o intervalo de v a w é um intervalo de integrabilidade no sentido de RIEMANN-STIELTJES não só de u com respeito a qualquer das duas funções mencionadas, mas também de qualquer dessas funções com respeito a u. Portanto, dado γ entre 0 e 1, a definição de integral de RIEMANN-STIELTJES conduz à relação

$$M\left(\frac{w}{\gamma}\right)-M\left(\frac{v}{\gamma}\right)=\overset{\mathcal{R}}{\int_v^w} dM\left(\frac{u}{\gamma}\right)\leqq$$

$$\leqq \overset{\mathcal{R}}{\int_v^w} \sup\left[M'_e\left(\frac{u}{\gamma}\right), M'_d\left(\frac{u}{\gamma}\right)\right]\cdot\frac{du}{\gamma}\leqq \overset{\mathcal{R}}{\int_v^w}\inf[M'_e(u), M'_d(u)]\cdot du\leqq$$

$$\leqq \overset{\mathcal{R}}{\int_v^w} dM(u)=M(w)-M(v),$$

a qual prova que a diferença $M(u)-M(u/\gamma)$ é uma função não-decrescente da variável u no intervalo $-\infty<u<0$.

Semelhantemente se mostra que qualquer γ entre 0 e 1 torna a diferença $N(u/\gamma)-N(u)$ uma função não-decrescente

---

(*) Veja-se, por exemplo, os teoremas 8 de § 3 e 12 de § 5, ambos do capítulo VI da parte II do tratado intitulado *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale* por G. VITALI e G. SANSONE.

da variável u no intervalo $0<u<+\infty$, de modo que VI' permite completar a demonstração de VII.

Passamos para um *corolário* de *VII*, a saber:

VII') «Uma lei (infinitamente divisível) é de LÉVY, quando e só quando a função $G(u)$ da sua representação de LÉVY e KHINTCHINE goza das propriedades seguintes, tanto no intervalo $-\infty<u<0$, como também em $0<u<+\infty$:

É contínua e admite as duas semiderivadas $G'_e(u)$ e $G'_d(u)$, respectivamente à esquerda e à direita, em qualquer ponto; além disso, as expressões $(1+u^2)\cdot G'_e(u)/u$ e $(1+u^2)\cdot G'_d(u)/u$ são tais que o seu ínfimo em qualquer ponto u_1 não pode ser menor do que o seu supremo em qualquer ponto $u_2>u_1$.»

Demonstração de VII': Dados qualquer $u>0$ e qualquer $h\neq 0$ tais que $u+h>0$, basta aplicar o teorema do valor médio aos integrais da igualdade

$$\mathcal{R}\!\int_u^{u+h}(1+v^2)\,dG(v)=-\,\mathcal{R}\!\int_u^{u+h}v^2\,dN(v)$$

para poder afirmar a existência de dois números η e ζ, ambos compreendidos entre 0 e 1, que verificam a relação

$$\begin{aligned}24)\qquad &[1+(u+\eta h)^2]\cdot[G(u+h)-G(u)]=\\ &=-(u+\zeta h)^2\cdot[N(u+h-0)-N(u-0)].\end{aligned}$$

Supondo $h>0$ e fazendo $h\to 0$ em 24), vemos que a continuidade de G e a de N no ponto u se implicam mùtuamente. Admitindo agora que N é função contínua no seu domínio, dividindo ambos os membros de 24) por h e fazendo $h\to 0$ por valores de sinal fixo, não só concluímos que a existência duma semiderivada duma das funções G e N no ponto considerado implica a existência da semiderivada homóloga da outra função no mesmo ponto, como também tiramos as igualdades (eventuais)

$$25)\quad (1+u^2)\cdot G'_e(u)/u=-u\cdot N'_e(u) \text{ e } (1+u^2)\cdot G'_d(u)/u=-u\cdot N'_d(u).$$

O caso $u<0$ trata-se dum modo semelhante e conduz às igualdades que resultam de 25), quando se substitui aí $-N'_e(u)$ e $-N'_d(u)$ por $M'_e(u)$ e $M'_d(u)$, respectivamente.

Pois bem, a proposição VII e as considerações que acabamos de fazer provam VII'.

Exemplo: São leis de Lévy as que correspondem à função $G(u)=0$ ou u ou 1, conforme $u\leqq 0$ ou $0\leqq u\leqq 1$ ou $u\geqq 1$.

Segue *outro corolário:*

VII'') «Uma lei (infinitamente divisível) com variância é de Lévy, quando e só quando a função $C(u)$ da sua representação de Kolmogorov goza das propriedades seguintes, tanto no intervalo $-\infty<u<0$, como também em $0<u<+\infty$:

É contínua e admite as duas semiderivadas $C'_e(u)$ e $C'_d(u)$, respectivamente à esquerda e à direita, em qualquer ponto; além disso, as expressões $C'_e(u)/u$ e $C'_d(u)/u$ são tais que o seu ínfimo em qualquer ponto u_1 não pode ser menor do que o seu supremo em qualquer ponto $u_2>u_1$.»

Demonstração de VII'': Sendo u e $u+h$ do mesmo sinal, tem-se a igualdade

$$\mathscr{R}\!\int_u^{u+h} dC(v)=\mathscr{R}\!\int_u^{u+h}(1+v^2)\,dG(v),$$

aos integrais da qual se aplica o teorema do valor médio. Em seguida, procede-se como na demonstração de VII' e alcançam-se as igualdades

$$C'_e(u)/u=(1+u^2)\cdot G'_e(u)/u \quad \text{e} \quad C'_d(u)/u=(1+u^2)\cdot G'_d(u)/u,$$

em face das quais é fácil terminar a demonstração.

* * *

Proposições complementares. O estudo precedente permite deduzir a proposição seguinte:

VIII) «Se alguma das funções $M(u)$ e $N(u)$ da representação de Lévy duma lei de Lévy for limitada no seu domínio de existência, então a mesma função sai idênticamente nula.»

Demonstração de VIII: Suponhamos que $N(u)$ é limitada em $0<u<+\infty$ e façamos

$$|\sup[u \cdot N_e'(u), u \cdot N_d'(u)]| = \mathfrak{N}(u).$$

Então, dado $\delta>0$ e supondo ε tal que $0<\varepsilon<\delta$, sai, em virtude da desigualdade 23) (adaptada à função N), da proposição VII e do texto posterior a 22') (também adaptado à função N),

$$+\infty > \int_{u>0} dN(u) \geqq -\mathcal{R}\!\!\int_\varepsilon^\delta dN(u) \geqq \mathcal{R}\!\!\int_\varepsilon^\delta |\sup[N_e'(u), N_d'(u)]| \cdot du =$$

$$= \mathcal{R}\!\!\int_\varepsilon^\delta \frac{1}{u} \cdot \mathfrak{N}(u)\, du \geqq \mathfrak{N}(\delta) \cdot (\log\delta - \log\varepsilon),$$

seja qual for ε, donde concluímos que $\mathfrak{N}(u) \equiv 0$ ou, atendendo a $N(+\infty)=0$, que $N(u)\equiv 0$.

De modo semelhante se prova que $M(u)$ só pode ser limitada em $-\infty<u<0$ quando $M(u)\equiv 0$, completando assim a demonstração de VIII.

A proposição VIII admite o *corolário* imediato seguinte:

VIII') «Caso as funções $M(u)$ e $N(u)$ da representação de Lévy duma lei de Lévy sejam simultâneamente limitadas, a primeira em $-\infty<u<0$ e a outra em $0<u<+\infty$, a lei considerada sai necessàriamente de Gauss (própria ou imprópria).»

Atendendo a 12) de § 11 de A, tiramos de VIII' um *novo corolário,* a saber:

VIII'') «Caso $(1+u^2)/u^2$ seja integrável na região $|u|>0$ com respeito à função $G(u)$ da representação de Lévy e Khintchine duma lei de Lévy, a lei considerada sai necessàriamente de Gauss (própria ou imprópria).»

Observação: Caso as funções $M(u)$ e $N(u)$ da representação de Lévy duma lei i. d. tenham secções de invariabilidade não-vazias, a primeira numa antevizinhança e a outra numa postvizinhança da origem, resulta de VIII′ que a lei considerada só pode ser de Lévy quando for de Gauss.

*
* *

Exemplos. Vamos agora analisar, quais das leis dos exemplos 1.º a 4.º do final de § 11 de A são leis de Lévy e quais não são.

As leis imprópria, de Gauss e de Cauchy são leis de Lévy, porque têm funções M e N que satisfazem às condições de VII.(*)

Pelo contrário, *a lei de Poisson (própria) não é de Lévy,* porque a sua função G é descontínua em $h \neq 0$ (VII′).(**) Assim se explica a raridade com que essa lei aparece nos estudos de convergência clássicos, dedicados quase exclusivamente aos casos em que a lei limite é de Lévy.

*
* *

Alusão às leis estáveis. Não pormenorizamos aqui o estudo da convergência de leis de somas 12), de parcelas independentes e assintòticamente constantes, para uma lei de Lévy, quando se dá o caso das variáveis $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ serem *idênticamente distribuídas,* isto é, de terem todas a mesma lei. Mencionamos apenas, sem prova, que toda a lei limite que pode aparecer no caso apresentado é uma lei *estável* ou seja tal que a soma de duas variáveis casuais independentes do tipo dessa lei dá uma variável do mesmo tipo.(***)

(*) Notando que as diferenças $\log f(t) - \log f(\gamma t)$ das três leis citadas são, por ordem, $ic(1-\gamma)t$, $ia(1-\gamma)t - b^2(1-\gamma^2)t^2/2$ e $i\beta(1-\gamma)t - \alpha(1-\gamma)\cdot|t|$, reconhecemos não só que se trata de leis de Lévy (V), como também que qualquer delas é tal que as leis componentes referidas no segundo membro de 11) saem da mesma natureza que a composição.

(**) Também podemos invocar a observação feita a seguir a VIII″.

(***) Referimos ainda, também sem prova, que toda a lei estável é limite de leis de somas 12) que se encontram no caso particular citado.

§ 7) Transformação de sucessões simples em sucessões duplas convergentes

Posição do problema. Caso duma lei limite imprópria. É óbvio que o problema da convergência das leis de somas como as de 12) de § 6 para alguma lei limite fica resolvido pelos teoremas de convergência de § 3, § 4 e § 5, adaptados convenientemente ao caso $X_{nk}=X_k/B_n$ (ver a nota final de § 3). Se existir lei limite, esta e as constantes B_n estão sujeitas às restrições estudadas em § 6.

Um problema complementar do que acabamos de referir é o seguinte:

São *dadas* as variáveis casuais independentes $X_1, X_2, \ldots$ $\ldots, X_n, \ldots$ e pretende-se **achar** constantes $B_n>0$ e S_n tais que as somas

1) $$X_1/B_n+X_2/B_n+\cdots+X_n/B_n-S_n$$

tenham parcelas assintòticamente constantes e as suas leis tendam (fracamente) para alguma lei limite, a qual sai necessàriamente uma lei de Lévy.

Caso desejemos uma lei limite imprópria, a resolução do problema posto tem uma teoria muito simples.

Com efeito, podemos fazer corresponder a cada n um número h_n tal que $\mathsf{P}(|\sum_{1\leq k\leq n} X_k|\geq h_n)<1/n$.(*) Portanto, dado $\varepsilon>0$, tem-se, para n suficientemente grande,

$$\mathsf{P}(|\sum_{1\leq k\leq n} X_k/(nh_n)|\geq\varepsilon)<1/n\to 0, \quad \text{quando} \quad n\uparrow\infty,$$

(*) A relação do texto é satisfeita pelos números h_n tais que se verifica a relação $\mathsf{P}(\sup_k|X_k|\geqslant h_n/n)<1/n$ e esta, por sua vez, é satisfeita pelos números h_n que tornam $\mathsf{P}(\sup_k X_k\geqslant h_n/n)<1/(2n)$ e, simultâneamente, $\mathsf{P}(\inf_k X_k\leqslant -h_n/n)<1/(2n)$. Pois bem, podem achar-se números h_n que satisfaçam ao último par de desigualdades, recorrendo às fórmulas 2) e 4) de § 4.

o que prova que as somas $\sum\limits_{1\leq k\leq n} X_k/(n h_n)$ resolvem o problema posto no caso duma lei limite unitária [1), I e IV de § 7 de B]. Consequentemente, sendo c um número real arbitrário, as somas $\sum\limits_{1\leq k\leq n} X_k/(n h_n)+c$ resolvem o problema no caso mais geral duma lei limite imprópria de f. c. e^{ict}.

O que precede justifica amplamente que a seguir nos limitemos quase sempre a estudar a convergência para leis próprias.

* * *

Resultados preliminares. Começamos por estabelecer a proposição auxiliar seguinte:

I) «Dadas as variáveis casuais independentes $X_1, X_2, \ldots$ $\ldots, X_n, \ldots$, as constantes $B_n > 0$ e outras constantes $B'_n > 0$ tais que $B_n/B'_n \rightarrow p \neq \infty$, quando $n \uparrow \infty$, a hipótese que as variantes casuais X_k/B_n, com $1 \leq k \leq n$, admitem as constantes assintóticas A_k/B_n implica que as variáveis casuais X_k/B'_n admitem as constantes assintóticas A_k/B'_n e a hipótese que as constantes S_n tornam as leis das somas

$$a) \qquad X_1/B_n + X_2/B_n + \cdots + X_n/B_n - S_n$$

(fracamente) convergentes para uma lei (de Lévy) *própria* de função característica $f(t)$ implica que as leis das somas modificadas

$$a') \qquad X_1/B'_n + X_2/B'_n + \cdots + X_n/B'_n - B_n \cdot S_n/B'_n$$

convergem (fracamente) para a lei (de Lévy) de função característica $f(pt)$.»

Demonstra-se I, pondo $p_n = B_n/B'_n$ em I de § 2.

Observação: A proposição I continua a ser válida na hipótese de as leis das somas de *a)* convergirem para uma lei imprópria.

De I tira-se o *corolário* seguinte:

I') «Caso as leis das somas de *a)* de I sejam (fracamente) convergentes para uma lei (de Lévy) *própria*, as sucessões de constantes $B'_n > 0$ que tornam as leis das somas modificadas de *a')* de I também (fracamente) convergentes para leis (de Lévy) *próprias* são as que fazem $B_n/B'_n \to p \neq 0, \infty$, quando $n \uparrow \infty$, e só essas.»

Demonstração de I': Tendo em conta I, basta mostrar que a convergência duma sucessão de somas de *a')* para uma variável *própria* de f. c. $\varphi(t)$ obriga a $B_n/B'_n \to p \neq 0, \infty$. Pois bem, a razão B_n/B'_n não pode ter sublimite nulo, porque isso implicava $\varphi(t) \equiv 1$, nem pode ter sublimite infinito, porque isso implicava $f(t) \equiv 1$, nem pode ter dois sublimites finitos e significativos q e r tais que $q < r$, porque isso implicava $f(qt) \equiv f(rt)$, donde, seja qual for t,

$$f(t) = f(qt/r) = f(q^2 t/r^2) = \cdots = f(0) = 1.$$

Segue outra poposição auxiliar, esta devida essencialmente a Gnedenko e Groshev:

II) «Se as variáveis casuais próprias independentes $X_n (n = 1, 2, \ldots)$ têm as funções características $f_n(t)$ e se certas constantes $B_n > 0$ e S_n tornam as parcelas das somas

$$a) \qquad X_1/B_n + X_2/B_n + \cdots + X_n/B_n - S_n$$

assintòticamente constantes e tornam também as leis dessas somas (fracamente) convergentes para uma lei (de Lévy) *própria*, cuja representação de Lévy e Khintchine é caracterizada por $G(u)$, uma função de distribuição a menos dum factor constante positivo, então, sendo $\mathcal{F}_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ a função de distribuição correspondente à função característica $|f_k(t)|^2$, existe um número natural n_1 tal que as igualdades

$$b) \qquad \sum_{1 \leq k \leq n} \int_R \frac{x^2}{\beta_n^2 + x^2} \, d\,\mathcal{F}_k(x) = 2 \cdot G(+\infty), \quad \text{com} \quad n \geq n_1,$$

determinam (univocamente) constantes $\beta_n > 0$, as quais satisfazem necessàriamente à relação $B_n/\beta_n \longrightarrow 1$, quando $n \uparrow \infty$.»

Demonstração de II: Vamos usar a *técnica de simetrização,* descrita a propósito da demonstração de III de § 7 de B, associando às variáveis X_n outras Y_n, independentes entre si e das primeiras e escolhidas de modo tal que, dado n, a variável Y_n tenha a mesma lei que X_n.

Então, as variáveis $Z_n = X_n - Y_n$ ficam independentes e com as funções de distribuição $\mathcal{F}_n(x)$. Mais, as variáveis Z_k/B_n $(k=1, \ldots, n)$ são independentes por linhas e ficam com as f. c. reais $|f_k(t/B_n)|^2$, pelo que saem simétricas [3) de de § 8 de A].

Como, por hipótese, as variáveis X_k/B_n são assintòticamente constantes, existem grandezas A_k/B_n tais que se tem, para qualquer t real,

$$\lim_{n\uparrow\infty} [e^{\mp i A_k t/B_n} \cdot f_k(\pm t/B_n)] = 1, \text{ uniformemente em } 1 \leq k \leq n,$$

donde se tira, também para qualquer t real, que

$$\lim_{n\uparrow\infty} |f_k(t/B_n)|^2 = 1, \text{ uniformemente em } 1 \leq k \leq n,$$

ou seja que as variáveis *simétricas* Z_k/B_n são infinitesimais. Consequentemente, verifica-se a relação 1) de § 5, com

$$k_n = n, \quad A_{nk} = 0 \quad \text{e} \quad F_{nk}(x) = \mathcal{F}_k(B_n x).$$

A hipótese que as leis das somas de *a)* convergem para uma lei de Lévy de f. c. $f(t)$ implica que

$$\prod_{1 \leq k \leq n} |f_k(t/B_n)|^2 \xrightarrow{s} |f(t)|^2,$$

donde concluímos que as leis das somas

$$2) \qquad Z_1/B_n + Z_2/B_n + \cdots + Z_n/B_n,$$

de termos independentes e infinitesimais, tendem para a lei de Lévy de f. c. $|f(t)|^2$, cuja representação de Lévy e Khintchine é caracterizada por uma função $\mathcal{G}(u)$, a qual é de distribuição a menos dum factor constante não-negativo.

Aplicando agora I de § 5 e *d)* de I de § 3 às somas 2) e tendo em vista que $\mathcal{G}(u)$ é função contínua para $u \neq 0$ (VII′ de § 6), sai

3) $$\lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq n} \int_{-\infty}^{B_n u} \frac{x^2}{B_n^2+x^2}\, d\,\mathcal{F}_k(x) = \mathcal{G}(u),$$

para qualquer $u \neq 0$, finito ou infinito.

Em particular, temos

3′) $$\lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq n} \int_R \frac{x^2}{B_n^2+x^2}\, d\,\mathcal{F}_k(x) = \mathcal{G}(+\infty).$$

Se interpretarmos o integral que figura na representação de Lévy e Khintchine duma lei i. d. como integral de Riemann-Stieltjes, podemos escrever primeiro, por causa da propriedade aditiva desse integral, quando se integra com respeito a duas funções diferentes,

$$\log|f(t)|^2 =$$
$$= \int_R^{\mathcal{R}} \left(e^{itu}-1-\frac{itu}{1+u^2}\right)\frac{1+u^2}{u^2}\, d\,[G(u)+G(+\infty)-G(-u+0)],$$

e em seguida, tendo em vista a parte final de I de § 11 de A e o tipo de continuidade das funções $G(u)$ e $\mathcal{G}(u)$, decorrente de VII′ de § 6,

4) $\mathcal{G}(u) = G(u) + G(+\infty) - G(-u)$, para $u \neq 0$, finito ou infinito.

Como a lei limite correspondente a $G(u)$ é própria, tiramos de 4) a relação(*)

4′) $$\mathcal{G}(+\infty) = 2 \cdot G(+\infty) > 0.$$

(*) Se não houvesse interesse em apresentar 4), a relação $\mathcal{G}(+\infty) > 0$ podia deduzir-se mais simplesmente como segue: A hipótese que a f. c. $f(t)$ é própria torna impossível que se tenha $|f(t)|^2 \equiv 1$ (II de § 6) e, portanto, torna impossível $\mathcal{G}(+\infty) = 0$.

Inferimos de 4') que, fixado $\varepsilon>0$, corresponde $\delta>0$ tal que

5) $$2\varepsilon=\mathcal{G}(+\delta)-\mathcal{G}(-\delta)=\lim_{n\uparrow\infty}\sum_{1\leq k\leq n}\int_{-\delta B_n}^{+\delta B_n}\frac{x^2}{B_n^2+x^2}\,d\,\mathcal{F}_k(x),$$

onde a igualdade final se justifica a partir de 3).

Então, sendo $\mathcal{B}_n^2$ o termo geral duma sucessão arbitrária de números positivos, a relação 5) implica que existe um número natural n' tal que sai, para $n\geq n'$,

$$\left|\sum_{1\leq k\leq n}\int_R\left(\frac{x^2}{\mathcal{B}_n^2+x^2}-\frac{x^2}{B_n^2+x^2}\right)d\,\mathcal{F}_k(x)\right|=$$

$$=|B_n^2-\mathcal{B}_n^2|\cdot\sum_{1\leq k\leq n}\int_R\frac{x^2}{(\mathcal{B}_n^2+x^2)\cdot(B_n^2+x^2)}\,d\,\mathcal{F}_k(x)\geq\frac{|B_n^2-\mathcal{B}_n^2|}{\mathcal{B}_n^2+\delta^2 B_n^2}\cdot$$

$$\cdot\sum_{1\leq k\leq n}\int_{-\delta B_n}^{+\delta B_n}\frac{x^2}{B_n^2+x^2}\,d\,\mathcal{F}_k(x)\geq\frac{|1-\mathcal{B}_n^2/B_n^2|}{\mathcal{B}_n^2/B_n^2+\delta^2}\cdot\varepsilon;$$

logo, pondo

6) $$\Theta_n(\mathcal{B}_n^2)=\sum_{1\leq k\leq n}\int_R\frac{x^2}{\mathcal{B}_n^2+x^2}\,d\,\mathcal{F}_k(x),$$

fica a desigualdade

7) $$|\Theta_n(\mathcal{B}_n^2)-\Theta_n(B_n^2)|\geq\varepsilon\cdot|1-\mathcal{B}_n^2/B_n^2|/(\mathcal{B}_n^2/B_n^2+\delta^2),\quad\text{para}\quad n\geq n'.$$

Mais abaixo faremos uso de dois casos particulares de 7), a saber

7') $$|\Theta_n(B_n^2/2)-\Theta_n(B_n^2)|\geq\varepsilon/(1+2\delta^2),\quad\text{para}\quad n\geq n',\ \text{e}$$

7'') $$|\Theta_n(2B_n^2)-\Theta_n(B_n^2)|\geq\varepsilon/(2+\delta^2),\quad\text{para}\quad n\geq n'.$$

Pois bem, dado n, a função $\Theta_n(\mathcal{B}_n^2)$, considerada em $0<\mathcal{B}_n^2<\infty$, é uma função positiva(*), contínua e de derivada

(*) Talvez convenha lembrar a hipótese que nenhuma variável X_k é imprópria ou, equivalentemente, que nenhuma variável Z_k é idênticamente nula (ver II de § 6).

negativa [III_1 e III_3 de § 4 de A]; além disso, fazendo

$$\eta = \varepsilon \cdot \inf[1/(1+2\,\delta^2),\, 1/(2+\delta^2)],$$

resulta de 3') que existe um número natural n'' tal que se verifica a desigualdade

$$\mathcal{G}(+\infty) - \eta < \Theta_n(B_n^2) < \mathcal{G}(+\infty) + \eta, \quad \text{para} \quad n \geqq n''.$$

Então, dado $n \geqq n_1 = \sup(n', n'')$, as propriedades da função $\Theta_n(\mathcal{B}_n^2)$ que acabamos de indicar, juntamente com 7'), 7'') e 4'), mostram primeiro que sai

$$\Theta_n(B_n^2/2) > \mathcal{G}(+\infty) > \Theta_n(2\,B_n^2)$$

e depois que a equação $\Theta_n(\mathcal{B}_n^2) = 2 \cdot G(+\infty)$ tem uma e uma só solução positiva, seja β_n^2, compreendida entre $B_n^2/2$ e $2\,B_n^2$. Esta conclusão é válida para qualquer $n \geqq n_1$.

Sendo assim, podemos usar as relações *b*), 3'), 4') e 6) para reconhecer que $|\Theta_n(\beta_n^2) - \Theta_n(B_n^2)| \longrightarrow 0$, quando $n \uparrow \infty$. Este facto e 7) impõem $B_n/\beta_n \longrightarrow 1$, quando $n \uparrow \infty$, de modo que fica completada a demonstração de II.

Vejamos agora um *corolário* de II.

II') «Se as variáveis casuais próprias X_n verificam todas as hipóteses de II, então, dado qualquer número positivo p, corresponde um número natural n_p tal que as igualdades

$$a) \quad \sum_{1 \leqq k \leqq n} \int_R \frac{x^2}{\beta_n^2 + x^2}\, d\mathcal{F}_k(x) = 2\,p^2 \cdot \int_R \frac{1+u^2}{1+p^2 u^2}\, dG(u), \quad \text{com} \quad n \geqq n_p,$$

determinam (univocamente) constantes $\beta_n > 0$, as quais satisfazem necessàriamente à relação $B_n/\beta_n \longrightarrow p$, quando $n \uparrow \infty$.

Quando p cresce estrita e contìnuamente de 0 a $+\infty$, extremos excluídos, o segundo membro de *a)* faz o mesmo.»

Demonstração de II': A hipótese que as somas de *a)* de II têm parcelas assintòticamente constantes e leis que convergem para uma lei própria de f. c. $f(t)$ implica que, dado o número $p>0$, essas somas, multiplicadas por p, têm parcelas também assintòticamente constantes e leis que convergem para a lei própria de f. c. $f(pt)$ (ver I), à qual corresponde uma função $G_p(u)$ na representação de Lévy e Khintchine. Logo vale a conclusão de II, quando se substitui aí B_n por B_n/p e $G(u)$ por (compare-se com 18) de § 6)

$$8) \qquad G_p(u)=p^2\cdot\int_{-\infty}^{u/p}\frac{1+v^2}{1+p^2v^2}\,dG(v),^{(*)}$$

ficando assim provada a primeira parte de II'.

Quando $p>0$ percorre crescentemente um intervalo fechado, a expressão $p^2(1+u^2)/(1+p^2u^2)$, considerada como função de p, sai positiva, contínua, de derivada (finita) positiva e tal que ela e a sua derivada ficam limitadas por funções de u que são independentes de p e integráveis com respeito a $G(u)$. Logo a função de p dada por

$$8') \qquad G_p(+\infty)=p^2\cdot[G(+0)-G(-0)]+\int_{|u|>0}\frac{1+u^2}{1/p^2+u^2}\,dG(u)^{(*)}$$

vem a ser uma função positiva, contínua e estritamente crescente em $0<p<+\infty$, a qual tende para zero, quando $p\downarrow 0$ [III_1, III_3 e III de § 4 de A].

Tendo em vista que o teorema da convergência monótona [II de § 4 de A] se aplica, quer o integral da função (mensurável) limite seja finito quer seja igual a $+\infty$, tiramos de 8') a relação

$$8'') \qquad \lim_{p\uparrow+\infty}G_p(+\infty)=\int_{|u|>0}\frac{1+u^2}{u^2}\,dG(u)+ \\ +\lim_{p\uparrow+\infty}\{p^2\cdot[G(+0)-G(-0)]\}.^{(*)}$$

Finalmente, 8'') do texto e VIII'' de § 6 permitem completar a demonstração de II'.

(*) As fórmulas 8), 8') e 8'') são válidas para *quaisquer* leis i.d., pois a sua dedução não depende da hipótese de as somas de *a)* de I de § 2 terem o aspecto particular de *a)* de II de § 7.

Exemplo: Tomemos as leis i. d. a que corresponde a função $G(u)=0$ ou $\operatorname{arc} tg\, u - u/(1+u^2)$ ou $\pi/4-1/2$, conforme $u \leqq 0$ ou $0 \leqq u \leqq 1$ ou $1 \leqq u$. De 8'') tira-se $\lim\limits_{p\uparrow+\infty} G_p(+\infty) = = 2\cdot\displaystyle\int_{0<u\leqq 1} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}$, de modo que as leis consideradas não podem ser leis de Lévy.

Outro exemplo: Tomemos as leis i. d. a que corresponde a função $G(u)=0$ ou u^2 ou 1, conforme $u \leqq 0$ ou $0 \leqq u \leqq 1$ ou $1 \leqq u$. Embora todas as leis consideradas tenham componente gausseana nula e não sejam leis de Lévy (VII' de § 6), sai

$$\lim_{p\uparrow+\infty} G_p(+\infty) = 2\cdot\int_{0<u\leqq 1}\left(u+\frac{1}{u}\right)du = +\infty.$$

Terceiro exemplo: Para a lei de Poisson própria do exemplo 3.º de § 11 de A obtém-se $\lim\limits_{p\uparrow+\infty} G_p(+\infty) = \lambda$, o que confirma o facto já conhecido que a lei não é de Lévy.

Observação: Se X e Y forem duas variáveis casuais *independentes*, possuindo as funções de distribuição $F_X(x)$ e $F_Y(y)$, respectivamente, e se $Z = X+Y$ tiver a função de distribuição $F_Z(z)$, então, dado z, sai $F_Y(z-x)$ uma função (monótona) mensurável de x, a qual é limitada entre 0 e 1 e, portanto, integrável com respeito à probabilidade definida por $F_X(x)$. Nestas condições torna-se fácil provar que a relação

$$9)\qquad F_Z(z) = \int_R F_Y(z-x)\,dF_X(x)$$

é válida para qualquer z.

Em primeiro lugar, dado z, não só a função $F_Y(z-x)$ sai semicontínua à direita na variável x, como também 8) de § 5 de A dá a igualdade

$$\int_R F_Y(z-x)\,dF_X(x) = \lim_{a\downarrow-\infty,\, b\uparrow+\infty}\int_a^b F_Y(z-x)\,dF_X(x).$$

Em seguida, supondo a e b fixos, escolhamos um número natural n, consideremos pontos $a=x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ e $x_n=b$ tais que $x_{l-1}<x_l\,(l=1,2,\ldots,n)$ e substituamos $F_Y(z-x)$ pela função mensurável simples e não-negativa $X_n(x)$ que se reduz ao número $F_Y(z-x_l+0)$ em cada intervalo $x_{l-1}\leqq x<x_l$ e que se anula na região $a>x\geqq b$. Fazendo $n\uparrow\infty$ e introduzindo as condições de divisão do intervalo $a\leqq x<b$ usuais na definição do conceito de integral de RIEMANN-STIELTJES, a sucessão de funções $X_n(x)$ tende crescentemente para a função $X(x)$ que se confunde com $F_Y(z-x)$ na região $a\leqq x<b$ e que é nula no exterior desta região. Logo as propriedades expressas em A, 2) e 4) de § 4, 3) de § 7 e II de § 2, permitem escrever

$$\int_R F_Y(z-x)\,dF_X(x)=$$

$$=\lim_{a\downarrow-\infty,\,b\uparrow+\infty}\ \lim_{\sup|x_l-x_{l-1}|\to 0}\ \sum_{1\leqq l\leqq n}\{F_Y(z-x_l+0)\cdot[F_X(x_l)-F_X(x_{l-1})]\}=$$

$$=\lim_{a\downarrow-\infty,\,b\uparrow+\infty}\ \lim_{\sup|x_l-x_{l-1}|\to 0}\ \sum_{1\leqq l\leqq n}\mathsf{P}_{X,Y}(x_{l-1}\leqq X<x_l,-\infty<Y\leqq z-x_l)=$$

$$=\lim_{a\downarrow-\infty,\,b\uparrow+\infty}\mathsf{P}_{X,X+Y}(a\leqq X<b\,,X+Y<z)=$$

$$=\mathsf{P}_{X,Z}(-\infty<X<+\infty\,,Z<z)=F_Z(z),\quad \text{c. q. d.}$$

Vimos no princípio da demonstração de II que, dado k, a função de distribuição $\mathcal{F}_k$ corresponde a uma certa diferença X_k-Y_k de variáveis independentes e idênticamente distribuidas. Por isso, se $F_k(x)$ for a função de distribuição da variável X_k e se designarmos por y o valor genérico da variável $-Y_k$, esta fica com a função de distribuição $1-F_k(-y+0)$ e a relação 9), aplicada à soma $X_k+(-Y_k)$, dá

$$9')\qquad \mathcal{F}_k(z)=1-\int_R F_k(x-z+0)\,dF_k(x),$$

um resultado que pode ser útil para a determinação dos integrais da fórmula 6).

* * *

Estudo independente das igualdades b) do teorema II. Tem certo interesse considerar as igualdades referidas no título desta secção, quando se substitui $2\cdot G(+\infty)$ por um número positivo qualquer P e quando se ignora se as somas de *a)* de II satisfazem à hipótese do enunciado respectivo. A este propósito, podemos estabelecer a proposição seguinte:

III) «Se as variáveis casuais próprias independentes X_n $(n=1,2,\ldots)$ tiverem as funções de distribuição $F_n(x)$, se s_n^2 for a soma dos quadrados dos saltos (positivos) de $F_n(x)$ e se fizermos

$$\mathcal{F}_n(x)=1-\int_R F_n(y-x+0)\,dF_n(y),$$

então, dado um número positivo P, corresponde um número natural n_P tal que as igualdades

$$a) \qquad \sum_{1\leqq k\leqq n}\int_R \frac{x^2}{\beta_n^2+x^2}\,d\mathcal{F}_k(x)=P, \quad \text{com} \quad n\geqq n_P,$$

determinam (unìvocamente) constantes positivas β_n, *quando e só quando* se verifica a desigualdade

$$b) \qquad \sum_{1\leqq k\leqq n}(1-s_k^2)>P,$$

para algum valor fixo de n (o qual sai $\geqq n_P$).»

Demonstração de III: Comecemos por notar que se tem a relação

$$\mathcal{F}_k(+0)-\mathcal{F}_k(-0)=\int_R[F_k(y+0)-F_k(y)]\,dF_k(y)=s_k^2,^{(*)}$$

a qual mostra que a desigualdade *b)* do enunciado é equivalente a

$$10) \quad \sum_{1\leqq k\leqq n}\{1-[\mathcal{F}_k(+0)-\mathcal{F}_k(-0)]\}>P, \text{ para algum valor de } n.$$

(*) A última passagem só pode deixar de ser óbvia se a função F_k tiver uma infinidade de saltos (positivos). Neste caso ordenem-se os pontos em que se produzem os saltos, faça-se corresponder a cada número natural n a função X_n que se identifica com $F_k(y+0)-F_k(y)$ nos n primeiros pontos de salto e que se anula para os restantes valores de y e aplique-se depois a definição dada em 2) de § 4 de A.

Doutro lado, *dado* n, podemos aplicar III de § 4 de A aos integrais contidos na igualdade 6) para concluir que Θ_n tende para zero ou para o primeiro membro de 10), conforme $\mathcal{B}_n^2 \uparrow +\infty$ ou $\mathcal{B}_n^2 \downarrow 0$. Em seguida, as propriedades da função Θ_n mostram que a soma de integrais do primeiro membro de *a)* é igual a P para um valor (único) $\beta_n > 0$, quando e só quando o primeiro membro de 10) excede P.

Finalmente, a nota posta a seguir à fórmula 7'') esclarece que o primeiro membro de 10) é uma *função estritamente crescente de n*, ficando assim completada a demonstração de III.

Observação: Evidentemente, dado n, é $1-s_n^2>0$. Se tivermos $s_n^2 \leqq S < 1$, para uma infinidade de valores de n, então o primeiro membro de *b)* de III diverge para $+\infty$, quando $n \uparrow \infty$. Tal sucede, em particular, quando houver uma infinidade de variáveis X_n contínuas.—O exemplo $s_n^2=(n-1)/n$ mostra que o primeiro membro de *b)* de III pode divergir para $+\infty$, quando $n \uparrow \infty$, mesmo que $s_n^2 \longrightarrow 1$.

De III tiramos fàcilmente o *corolário* seguinte:

III') «Dadas as variáveis casuais próprias independentes X_n de III, então a relação

$$\sum_{1 \leqq k \leqq n} (1-s_k^2) \uparrow \infty, \quad \text{quando} \quad n \uparrow \infty,$$

é condição necessária e suficiente para que a *todo* o número positivo P se possa fazer corresponder um número natural n_P tal que as igualdades *a)* de III determinem (unìvocamente) constantes positivas β_n.»

Demonstração de III': A tese de III' verifica-se, quando e só quando a relação *b)* de III for verdadeira para *qualquer* número positivo P. Este facto e a circunstância que o primeiro membro da dita relação cresce com n provam o nosso corolário.

Uma proposição complementar de III é a seguinte:

IV) «Quando a um número positivo dado P corresponde um número natural n_P tal que as igualdades *a)* de III determinam (unìvocamente) constantes positivas β_n, estas formam uma sucessão estritamente crescente.»

Demonstração de IV: Supondo $n \geqq n_P$ em *a)* de III, é impossível ter-se a desigualdade $\beta_{n+1} \leqq \beta_n$, porque ela e as propriedades da função Θ_n introduzida através de 6) implicariam

$$P = \sum_{1 \leqq k \leqq n} \int_R \frac{x^2}{\beta_n^2 + x^2} d\mathcal{F}_k(x) < \sum_{1 \leqq k \leqq n+1} \int_R \frac{x^2}{\beta_{n+1}^2 + x^2} d\mathcal{F}_k(x) = P,$$

um resultado manifestamente absurdo.

Segue uma proposição importante para o estudo da questão que pretendemos resolver neste parágrafo. Ei-la:

V) «Dadas as variáveis casuais próprias independentes de III, então a *todo* o número positivo P corresponde um número natural n_P tal que as igualdades *a)* de III determinam (unìvocamente) constantes positivas $\beta_n \uparrow \infty$, com $n \uparrow \infty$, *quando e só quando* se verifica a relação

a)
$$\lim_{n \uparrow \infty} \sum_{1 \leqq k \leqq n} \int_R \frac{x^2}{1+x^2} d\mathcal{F}_k(x) = +\infty$$

ou, equivalentemente, *quando e só quando* se tem, para algum número positivo D,

a')
$$\lim_{n \uparrow \infty} \sum_{1 \leqq k \leqq n} \int_{|x| \leqq D} x^2 \, d\mathcal{F}_k(x) +$$
$$+ \lim_{n \uparrow \infty} \sum_{1 \leqq k \leqq n} \int_{|x| > D} d\mathcal{F}_k(x) = +\infty.$$

Caso a relação *a')* se verifique para um certo número D, ela ocorre para todos os números positivos.»

Demonstração de V: Se tivermos a condição *a)*, resulta

$$\sum_{1 \leqq k \leqq n} \{1 - [\mathcal{F}_k(+0) - \mathcal{F}_k(-0)]\} = \sum_{1 \leqq k \leqq n} (1 - s_k^2) \uparrow \infty,$$

de modo que podemos aplicar III'. Então, escolhido um número $P>0$, corresponde um n_P tal que as igualdades *a)* de III determinam (univocamente) constantes positivas β_n. Em seguida, IV implica $\beta_n \uparrow \beta$, onde β significa um limite (finito ou infinito). A hipótese $\beta<\infty$ dava, tomando $n \geqq n_P$,

11) $$P = \sum_{1 \leqq k \leqq n} \int_R \frac{x^2}{1+x^2} \cdot \frac{1+x^2}{\beta_n^2+x^2} \, d\mathcal{F}_k(x) \geqq$$
$$\geqq \inf\left(1, \frac{1}{\beta^2}\right) \cdot \sum_{1 \leqq k \leqq n} \int_R \frac{x^2}{1+x^2} \, d\mathcal{F}_k(x),$$

contradizendo assim a condição *a)*. Logo esta é suficiente.

Suponhamos agora que a todo o número positivo P corresponde um n_P tal que as igualdades *a)* de III determinam (univocamente) constantes positivas $\beta_n \uparrow \infty$. Então, fixado *qualquer* P, tem-se, para n suficientemente grande,

$$P = \sum_{1 \leqq k \leqq n} \int_R \frac{x^2}{\beta_n^2+x^2} \, d\mathcal{F}_k(x) < \sum_{1 \leqq k \leqq n} \int_R \frac{x^2}{1+x^2} \, d\mathcal{F}_k(x),$$

o que prova que a condição *a)* é necessária.

Dado o número $D>0$, ponha-se $h_D(x) = x^2$ ou D^2, conforme $|x| \leqq D$ ou $|x| \geqq D$. Sai

$$D^2 x^2/(1+x^2) \leqq h_D(x) \leqq 2\, x^2/(1+x^2) \quad \text{ou}$$
$$x^2/(1+x^2) \leqq h_D(x) \leqq (D^2+1)\, x^2/(1+x^2),$$

conforme $D \leqq 1$ ou $D \geqq 1$. Logo não só *a)* é equivalente a *a')*, como também *a')* para certo D implica *a')* para qualquer outro D. Fica assim completada a demonstração de V.

Observação: Seja c^2 uma constante positiva qualquer. Então, a desigualdade

$$\inf(1,1/c^2) \cdot x^2/(1+x^2) \leqq x^2/(c^2+x^2) \leqq \sup(1,1/c^2) \cdot x^2/(1+x^2)$$

mostra que a condição *a)* de V é equivalente a

$$\lim_{n \uparrow \infty} \sum_{1 \leqq k \leqq n} \int_R \frac{x^2}{c^2+x^2} \, d\mathcal{F}_k(x) = +\infty.$$

As constantes β_n sujeitas à condição necessária e suficiente de V podem limitar-se inferiormente e superiormente dum modo que é esclarecido na proposição seguinte:

VI) «Dados um número positivo P e as variáveis casuais próprias independentes X_n de III e verificada a condição *a)* de V, dum lado tem-se a desigualdade

$$a) \qquad \beta_n^2 > \frac{1}{P} \cdot \sum_{1 \leqq k \leqq n} \int_R \frac{x^2}{1+x^2} \, d\mathcal{F}_k(x),$$

válida para n suficientemente grande, e doutro lado, caso as simetrizadas das variáveis casuais X_n tenham todas o momento da ordem γ, positiva e menor que 2, sai

$$b) \quad \beta_n^2 \leqq \frac{\gamma(2-\gamma)^{2/\gamma-1}}{(2P)^{2/\gamma}} \cdot \left[\sum_{1 \leqq k \leqq n} \int_R |x|^\gamma \cdot d\mathcal{F}_k(x)\right]^{2/\gamma}, \text{ para } n \geqq n_P.$$

Em particular, se cada variável casual X_n tiver esperança matemática, verifica-se a relação

$$b_1) \quad \beta_n^2 \leqq \frac{1}{4P^2} \cdot \left[\sum_{1 \leqq k \leqq n} \int_R |x| \, d\mathcal{F}_k(x)\right]^2, \quad \text{para} \quad n \geqq n_P.$$

Finalmente, se cada variável casual X_n tiver variância, resulta a desigualdade

$$b_2) \qquad \beta_n^2 \leqq \frac{1}{P} \cdot \sum_{1 \leqq k \leqq n} \int_R x^2 \, d\mathcal{F}_k(x), \quad \text{para} \quad n \geqq n_P.»$$

Demonstração de VI: Suponhamos verificada a condição *a)* de V e façamos

$$12) \qquad S_n = \sum_{1 \leqq k \leqq n} \int_R \frac{x^2}{1+x^2} \, d\mathcal{F}_k(x).$$

Então, fixado $P>0$, se $n \geqq n_P$ for suficientemente grande para que se tenha $\beta_n > 1$, tiramos de 11) que $P > S_n / \beta_n^2$, um resultado equivalente à desigualdade *a)* do enunciado.

Quando as variáveis Z_n, simetrizadas das variáveis X_n, possuem todas o momento da ordem γ, com $0<\gamma<2$, basta atender ao facto que a função $x^{2-\gamma}/(\beta_n^2+x^2)$, com $0<x<+\infty$, tem derivada igual a $x^{1-\gamma}\cdot[(2-\gamma)\beta_n^2-\gamma x^2]/(\beta_n^2+x^2)^2$, negativa ou positiva conforme $x^2 \gtrless (2-\gamma)\beta_n^2/\gamma$, para concluir que, tomando $n \geq n_P$, se verifica a relação

$$P = \sum_{1\leq k\leq n} \int_R \frac{|x|^{2-\gamma}\cdot|x|^\gamma}{\beta_n^2+x^2}\, d\mathcal{F}_k(x) \leq$$

$$\leq \frac{(2-\gamma)^{1-\gamma/2}\cdot\gamma^{\gamma/2}}{2\cdot\beta_n^\gamma}\cdot \sum_{1\leq k\leq n}\int_R |x|^\gamma\, d\mathcal{F}_k(x),$$

da qual inferimos imediatamente *b)* do enunciado.

No caso particular de existirem as esperanças matemáticas das variáveis X_n, as das variáveis Z_n existem também (e são nulas), pelo que saem finitos os integrais que figuram na relação b_1*)*, a qual resulta de *b)*, pondo $\gamma=1$.

Finalmente, se as variáveis X_n tiverem variâncias, cada variável Z_k não só tem variância (dupla da variância de X_k), dada por uma parcela do somatório do segundo membro de b_2*)*, como também tem momentos de qualquer ordem positiva $\gamma<2$ [A, III′ de § 7 e VI de § 4]. Pois bem, passando em *b)* ao limite, quando $\gamma \uparrow 2$, e tendo em mente que $\gamma>0$ implica $|x|^\gamma \leq 1$ ou x^2 conforme $|x|\leq 1$ ou $|x|>1$, facto este que permite usar III₁ de § 4 de A, obtemos sem dificuldade b_2*)*.(*) Fica assim completada a demonstração de VI.

As constantes β_n sujeitas à condição necessária e suficiente de V podem enquadrar-se dum modo diferente do exposto em VI. A este propósito vamos estabelecer a proposição seguinte:

VII) «Dados um número positivo P e as variáveis casuais próprias independentes X_n de III e verificada a condição *a)* de V, a relação

---

(*) A desigualdade b_2*)* também pode ser estabelecida directamente a partir de *a)* de III.

a) $$\lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{n \uparrow \infty} \max \sum_{1 \leqq k \leqq n} \int_{|x| \leqq \delta \beta_n} \frac{x^2}{\beta_n^2 + x^2} \, d\, \mathcal{F}_k(x) = 0$$

é suficiente para que se tenha

b) $$\frac{1}{\beta_n^2} \cdot \sum_{1 \leqq k \leqq n} \int_R \frac{x^2}{1+x^2} \, d\, \mathcal{F}_k(x) \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad n \uparrow \infty,$$

e a relação

a') $$\lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{n \uparrow \infty} \min \sum_{1 \leqq k \leqq n} \int_{|x| \leqq \delta \beta_n} \frac{x^2}{\beta_n^2 + x^2} \, d\, \mathcal{F}_k(x) = 0$$

veda que se possa ter

b') $$\frac{1}{\beta_n^2} \cdot \sum_{1 \leqq k \leqq n} \int_R \frac{x^2}{1+x^2} \, d\, \mathcal{F}_k(x) \geqq \eta > 0, \quad \text{seja qual for } n.»$$

Demonstração de VII: Fixado $P > 0$, a condição *a)* de V permite usar *a)* de III. Fazendo

13) $$T_n = \sum_{1 \leqq k \leqq n} \int_R \frac{x^2}{(1+x^2)(\beta_n^2 + x^2)} \, d\, \mathcal{F}_k(x), \quad \text{para } n \geqq n_P,$$

tem-se então $0 < T_n < P$. Ora, dado $\delta > 0$, sai

$$T_n \leqq \sum_k \int_{|x| \leqq \delta \beta_n} \frac{x^2}{\beta_n^2 + x^2} \, d\, \mathcal{F}_k(x) +$$

$$+ \frac{1}{1 + \delta^2 \beta_n^2} \cdot \sum_k \int_{|x| > \delta \beta_n} \frac{x^2}{\beta_n^2 + x^2} \, d\, \mathcal{F}_k(x) =$$

$$= \frac{1}{1 + \delta^2 \beta_n^2} \cdot P + \frac{\delta^2 \beta_n^2}{1 + \delta^2 \beta_n^2} \cdot \sum_k \int_{|x| \leqq \delta \beta_n} \frac{x^2}{\beta_n^2 + x^2} \, d\, \mathcal{F}_k(x),$$

donde inferimos a relação

14) $$0 \leqq \lim_{n \uparrow \infty} \max T_n \leqq \lim_{\delta \downarrow 0} \lim_{n \uparrow \infty} \max \sum_{1 \leqq k \leqq n} \int_{|x| \leqq \delta \beta_n} \frac{x^2}{\beta_n^2 + x^2} \, d\, \mathcal{F}_k(x)$$

e outra relação análoga, seja 14'), com lim min no lugar de lim max.

Doutro lado, como 12) e 13) dão $S_n - P = (\beta_n^2 - 1) \cdot T_n$ e dão também $\beta_n^2 \cdot T_n < S_n$, podemos escrever a desigualdade

15) $$S_n - P < \beta_n^2 \cdot T_n < S_n, \quad \text{para } n \geqq n_P,$$

a qual mostra o seguinte: Se uma subsucessão (infinita) dos números n levar T_n para um limite, ela confere o mesmo limite a S_n/β_n^2. Esta conclusão, juntamente com 14) e *a)*, impõe *b)* e, juntamente com 14') e *a')*, torna impossível *b')*.

* * *

Primeiro teorema de convergência e corolários. Estamos agora em condições boas para estabelecer uma proposição, a qual pode resolver o problema que nos propusemos tratar neste parágrafo e é devida principalmente a Groshev e Gnedenko. Ei-la:

VIII) «Dadas as variáveis casuais próprias independentes $X_n (n = 1, 2, \ldots)$, com as funções de distribuição $F_n(x)$, podem encontrar-se constantes $B_n > 0$ e S_n que tornem as parcelas das somas

a) $$X_1 / B_n + X_2 / B_n + \cdots + X_n / B_n - S_n$$

infinitesimais(*) e que tornem as leis dessas somas (fracamente) convergentes para uma lei (de Lévy) *própria, quando e só quando* ocorrem simultâneamente as condições seguintes:

1.ª Fazendo

$$\mathcal{F}_n(x) = 1 - \int_R F_n(y - x + 0)\, dF_n(y)$$

e tomando um par qualquer de números positivos c^2 e P, tem-se

b) $$\sum_{1 \leqq k \leqq n} \int_R \frac{x^2}{c^2 + x^2}\, d\mathcal{F}_k(x) \uparrow \infty, \quad \text{quando} \quad n \uparrow \infty,$$

(*) O caso das parcelas assintòticamente constantes, sem serem necessàriamente infinitesimais, será tratado a propósito da proposição X e das fórmulas 18) a 19').

e as constantes positivas β_n (univocamente) determinadas pelas igualdades

$$c) \qquad \sum_{1\leq k\leq n} \int_R \frac{x^2}{\beta_n^2+x^2}\, d\,\mathcal{F}_k(x)=P, \quad \text{com} \quad n\geq n_P,$$

são tais que

$$d) \qquad \beta_{n+1}/\beta_n \longrightarrow 1, \quad \text{quando } n\uparrow\infty, \quad \text{e}$$

$$e) \qquad \lim_{n\uparrow\infty}\ \sup_{1\leq k\leq n} \int_R \frac{x^2}{\beta_n^2+x^2}\, d\,F_k(x)=0.$$

2.ª Existe uma família de leis de LÉVY do mesmo tipo tal que aquela das funções $G(u)$ das suas representações de LÉVY e KHINTCHINE que dá

$$f) \qquad G(+\infty)=P/2$$

verifica a relação

$$g) \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq n} \int_{-\infty}^{\beta_n u} \frac{x^2}{\beta_n^2+x^2}\, dF_k(x+A_k)=G(u),$$

esta com qualquer $u\neq 0$, finito ou infinito, e com alguma sucessão de grandezas A_n que se sujeitam, para todo o n suficientemente grande e uniformemente em $1\leq k\leq n$, à desigualdade

$$h) \qquad \inf({}_{C\beta_n}E_k\,,\ {}_{D\beta_n}E_k)-\gamma_k\leq A_k\leq \sup({}_{C\beta_n}E_k\,,\ {}_{D\beta_n}E_k)+\delta_k\,,$$

onde C e D significam dois números positivos arbitrários, ${}_{C\beta_n}E_k$ e ${}_{D\beta_n}E_k$ significam as esperanças matemáticas de X_k truncadas em $\pm C\beta_n$ e em $\pm D\beta_n$, respectivamente, e γ_k e δ_k significam quaisquer números não-negativos que tornam

$$i) \qquad \lim_{n\uparrow\infty}\Big(\sum_{1\leq k\leq n} \gamma_k^2/\beta_n^2\Big)=0=\lim_{n\uparrow\infty}\Big(\sum_{1\leq k\leq n} \delta_k^2/\beta_n^2\Big).$$

Satisfeitas as condições 1.ª e 2.ª, as constantes β_n podem fazer as vezes das constantes B_n e as constantes S_n admissíveis correspondentes — que vamos designar por σ_n — são as dadas pela fórmula

$$j) \qquad \sigma_n = \sum_{1 \leq k \leq n} \left[\frac{A_k}{\beta_n} + \beta_n \cdot \int_R \frac{x}{\beta_n^2 + x^2}\, d F_k(x + A_k) \right] - a_n \,,$$

onde a_n representa o termo geral duma sucessão (real) convergente arbitrária.

O limite da sucessão a_n, seja a, e a função $G(u)$ que figura em *f)* e *g)* caracterizam a lei limite na representação de Lévy e Khintchine.

Supondo asseguradas as relações *b)* a *f)*, se *g)* tem lugar para uma certa sucessão de constantes A_n sujeitas a *h)* e a *i)*, então *g)* ocorre para todas as sucessões análogas, sempre com a mesma função limite $G(u)$.»

Demonstração de VIII: Suponhamos primeiro que as condições do enunciado se encontram satisfeitas. Então, V e a observação anexa mostram que a relação *b)* implica que as igualdades *c)* definem unìvocamente constantes positivas $\beta_n \uparrow \infty$, isso seja qual for $P > 0$. Este facto e II', bem como IV de § 6 e *d)* tornam possível a existência de constantes $B_n > 0$ e S_n tais que as somas de *a)* tenham o comportamento referido no enunciado e que $B_n / \beta_n \longrightarrow p \neq 0, \infty$, com p determinado unìvocamente por P. Logo, por causa de I, podem existir constantes σ_n tais que as somas

$$16) \qquad Y_n = X_1 / \beta_n + X_2 / \beta_n + \cdots + X_n / \beta_n - \sigma_n$$

fiquem com parcelas assintòticamente constantes e com leis convergentes para uma lei limite própria. Em seguida, VI de § 4 de B mostra que *e)* impõe a infinitesimalidade das variáveis X_k / β_n, com $1 \leq k \leq n$, e VIII e I de § 4 de B mostram que as grandezas A_k / β_n, definidas através de *h)* e *i)*, saem constantes assintóticas dessas variáveis. Aplicando agora I de § 3 — com $X_{nk} = X_k / \beta_n$ e $A_{nk} = A_k / \beta_n$ e com as letras C, D, γ e δ em lugar de P, Q, ξ e ζ, respectivamente — vemos que as relações *f)* a *i)* do texto asseguram a existência de constantes σ_n tais que as leis das somas Y_n convergem para certa lei própria, isso porque os somatórios de *g)* convergem completamente para a função $G(u)$ correspondente a essa lei, a qual função é contínua para $u \neq 0$ (VII' de § 6) (*). Finalmente, é impossível ter-se $2 \cdot G(+\infty) \neq P$, visto que, se tal acontecesse, a proposição II' permitiria escrever a relação *c)* do texto sob a forma

$$\sum_k \int_R \frac{x^2}{\beta_n^2 + x^2}\, d\mathcal{F}_k(x) = 2p^2 \cdot \int_R \frac{1+u^2}{1+p^2u^2}\, dG(u), \text{ com } p \neq 1,$$

sendo as grandezas B_n as próprias grandezas β_n, e assim chegávamos à conclusão absurda $\beta_n / \beta_n \longrightarrow p$, quando $n \uparrow \infty$.

Acabamos de estabelecer que as relações *b)* a *i)* são suficientes para forçar as somas de *a)* a terem as propriedades formuladas na tese.

Suponhamos agora que existem constantes $B_n > 0$ e S_n que tornam infinitesimais as parcelas de *a)* e que tornam as leis das somas de *a)* convergentes para uma lei limite própria. Então, primeiro II' prova que, seja qual for $P > 0$, as igualdades *c)* definem unìvocamente constantes positivas β_n tais que $B_n / \beta_n \longrightarrow p \neq 0, \infty$, com p determinado por P, e depois IV de § 6 prova que $\beta_{n+1} / \beta_n \longrightarrow 1$, a relação *d)*, e que $\beta_n \uparrow \infty$, o que arrasta a relação *b)*, por causa de V e da observação anexa. Em seguida inferimos de I que as variáveis X_k / β_n são infinitesimais, de modo que se impõe a relação *e)*, e concluimos ainda de I que existem constantes σ_n que tornam as somas Y_n convergentes para uma variável própria, o que implica as relações *g)* a *j)*, não podendo ser $2 \cdot G(+\infty) \neq P$ pelo mesmo motivo acima exposto.

Acabamos de mostrar que as relações *b)* a *i)* são também necessárias à tese de VIII.

A demonstração aqui apresentada contém implìcitamente que, uma vez satisfeitas as condições 1.ª e 2.ª do enunciado, as constantes β_n são constantes B_n admissíveis, *regularizadas* pela propriedade de formarem uma sucessão estritamente crescente (ver IV).

A parte do enunciado de VIII que falta considerar é uma

(*) Se a função G for contínua para $u = 0$, a convergência completa dos somatórios de *g)* decorre da nota à demonstração de III de § 5 de A.

transcrição, devidamente adaptada, da parte correspondente do enunciado de I de § 3.

Chamamos a atenção do leitor para o facto que as relações *b)* e *d)* podem ser omitidas sem prejuízo da condição necessária e suficiente, mas que tal omissão pode conduzir a tentativas vãs para satisfazer às relações restantes.

Observação: Podemos substituir a relação *j)* por

$$j') \qquad \sigma_n = \frac{1}{\beta_n} \cdot \sum_{1 \leqq k \leqq n} \int_{|x| \leqq U\beta_n} x\, d F_k(x) - [a_n - c(U)],$$

onde $U > 0$ é arbitrário (ver a observação a I de § 3).

Vejamos agora um *corolário* de VIII.

VIII') «Caso as constantes B_n (positivas) e S_n tornem as parcelas das somas de *a)* de VIII infinitesimais e as leis dessas somas (fracamente) convergentes para uma lei (de Lévy) ***própria de componente gausseana nula,*** quaisquer constantes β_n^2 determinadas por *c)* de VIII (e também as grandezas B_n^2) formam um infinitamente grande de ordem superior à do primeiro membro de *b)* de VIII.»

Demonstração de VIII': Comecemos por notar que, sendo $G(u)$ a função que representa uma certa lei limite das somas de 16)(*) na forma de Lévy e Khintchine, a fórmula 4) dá, com $\delta > 0$,

$$\mathcal{G}(+\delta) - \mathcal{G}(-\delta) = 2 \cdot [G(+\delta) - G(-\delta)]$$

e, por passagem ao limite,

$$17) \qquad \mathcal{G}(+0) - \mathcal{G}(-0) = 2 \cdot [G(+0) - G(-0)] = 0,$$

onde o derradeiro zero se justifica pelo facto que o anulamento da componente gausseana duma lei limite das somas de *a)* de VIII implica o anulamento da componente gausseana

(*) VIII prova que tal lei limite existe.

de qualquer outra lei limite dessas somas, conforme pode reconhecer-se através de I, I' e 8).

Doutro lado, se substituirmos as somas de *a)* de II pelas de 16), então sai

$$\lim_{n\uparrow\infty} \sum_k \int_{-\infty}^{\beta_n u} \frac{x^2}{\beta_n^2+x^2}\, d\,\mathcal{F}_k(x) = \mathcal{G}(u), \quad \text{para qualquer } u \neq 0,$$

um resultado paralelo a 3), com β_n no lugar de B_n. Logo

$$\lim_{n\uparrow\infty} \sum_k \int_{|x|\leqq\delta\beta_n} \frac{x^2}{\beta_n^2+x^2}\, d\,\mathcal{F}_k(x) = \mathcal{G}(+\delta) - \mathcal{G}(-\delta),$$
$$\text{para qualquer } \delta > 0,$$

de modo que 17) dá *a)* de VII. Em seguida, *b)* de VII (e a proposição I') prova a tese de VIII', isso se $c^2=1$. Finalmente, a observação anexa a V permite abranger o caso $c^2 \neq 1$ e terminar assim a nossa demonstração.

Observação: Admitamos que as constantes B_n (positivas) e S_n tornam as parcelas das somas de *a)* de VIII infinitesimais e as leis dessas somas convergentes para um limite próprio. Então, VIII' prova que a componente gausseana da lei limite é necessàriamente significativa quando a sucessão natural comporta uma subsucessão ao longo da qual saem infinitamente grandes da mesma ordem as somas do primeiro membro de *b)* de VIII e as constantes β_n^2 determinadas por *c)* de VIII (ou as grandezas B_n^2).

Outro *corolário* de VIII é o seguinte:

VIII'') «Se as variáveis casuais próprias X_n de VIII tiverem variâncias limitadas superiormente, se os integrais de $x^2/(1+x^2)$ com respeito às funções $\mathcal{F}_n(x)$ forem limitados inferiormente por um número positivo e se existirem constantes $B_n>0$ e S_n tais que as parcelas das somas de *a)* de VIII resultem infinitesimais e as leis dessas somas tendam (fracamente) para uma lei (de Lévy) própria, então a lei limite tem necessàriamente componente gausseana significativa.»

Demonstração de VIII'': Posto que, sendo $S<+\infty$ um limite excedente das variâncias das variáveis X_n, sai

$$\sum_{1\leq k\leq n} \int_R x^2\, d\,\mathcal{F}_k(x) \leq 2\,n\,S$$

e posto que, sendo $I>0$ um limite deficiente dos integrais de $x^2/(1+x^2)$ com respeito às funções $\mathcal{F}_n(x)$, sai

$$\sum_{1\leq k\leq n} \int_R \frac{x^2}{1+x^2}\, d\,\mathcal{F}_k(x) \geq n\,I,$$

as desigualdades *a)* e *b₂)* de VI, válidas por causa de II' e de V, implicam, supondo n suficientemente grande, que tem lugar a relação

$$\frac{I}{2\,S} \leq \sum_{1\leq k\leq n} \int_R \frac{x^2}{1+x^2}\, d\,\mathcal{F}_k(x)\,/\,(P\,\beta_n^2) \leq 1,$$

onde o somatório é o primeiro membro de *b)* de VIII, com $c^2=1$. Sendo assim, a observação posterior a VIII' demonstra a nossa tese no caso $c^2=1$. Finalmente, a observação anexa a V permite passar ao caso geral.

Observação: As duas primeiras condições de VIII'' encontram-se satisfeitas, em particular, quando as variáveis próprias X_n tiverem variâncias e forem *idênticamente distribuidas.*

* * *

Outros teoremas de convergência. Se as variáveis X_k/β_n forem infinitesimais e se escolhermos constantes assintóticas A_k/β_n de acordo com *h)* e *i)* de VIII, é óbvio que a relação *g)* de VIII, uma adaptação de *d)* de I de § 3 às variáveis presentemente em estudo, é equivalente ao conjunto das relações *d₁)* a *d₃)* de II de § 3, também devidamente adaptadas. Então, tendo em vista 12) de § 11 de A, VII de § 6 e a parte de II de § 3 que é posterior a *d₃)*, podemos estabelecer a proposição que passamos a referir:

IX) «Se conservarmos o enunciado do teorema VIII até ao fim da condição 1.ª, então a condição 2.ª correspondente pode tomar a forma seguinte:

Existe uma família de leis de Lévy do mesmo tipo tal que aquelas das grandezas b^2, $M(u)$ e $N(u)$ das suas representações de Lévy que dão

$$f)\qquad \int_{-\infty}^{0-} \frac{u^2}{1+u^2}\, d\,M(u) + b^2 + \int_{0+}^{+\infty} \frac{u^2}{1+u^2}\, d\,N(u) = \frac{P}{2}$$

verificam as igualdades

$$g_1)\qquad \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq n} F_k(\beta_n u + A_k) = M(u), \quad \text{para } -\infty < u < 0,$$

$$g_2)\qquad \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq n} [1 - F_k(\beta_n u + A_k)] = N(u), \quad \text{para } 0 < u < +\infty,$$

e ainda as igualdades

$$g_3)\qquad \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \lim_{n\uparrow\infty} \max \left[\frac{1}{\beta_n^2} \cdot \sum_{1\leq k\leq n} \int_{|x|<\varepsilon\beta_n} x^2\, d\,F_k(x+A_k)\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \lim_{n\uparrow\infty} \min \left[\frac{1}{\beta_n^2} \cdot \sum_{1\leq k\leq n} \int_{|x|<\varepsilon\beta_n} x^2\, d\,F_k(x+A_k)\right] = b^2,$$

as últimas para alguma sucessão de grandezas A_n que se sujeitam a relações *h)* e *i)* iguais às relações homólogas de VIII.

Satisfeitas as condições 1.ª e 2.ª, as constantes β_n podem fazer as vezes das constantes B_n e as constantes S_n admissíveis correspondentes — que vamos designar por σ_n — são as dadas pela fórmula

$$j)\qquad \sigma_n = \frac{1}{\beta_n} \cdot \sum_{1\leq k\leq n} \left[A_k + \int_{|x|<U\beta_n} x\, d\,F_k(x+A_k)\right] - a_n(U),$$

onde U pode ser qualquer número positivo e onde $a_n(U)$ representa o termo geral duma sucessão (real) convergente arbitrária.

O limite da sucessão $a_n(U)$, seja $a(U)$, e as grandezas b^2, $M(u)$ e $N(u)$ que figuram em *f)* a *g_3)* caracterizam a lei limite sob a forma de LÉVY modificada.

Supondo asseguradas as relações *b)* a *f)*, se *g_1)* a *g_3)* têm lugar para uma certa sucessão de constantes A_n sujeitas a *h)* e a *i)*, então *g_1)* a *g_3)* ocorrem para todas as sucessões análogas, *g_1)* sempre com a mesma função $M(u)$ do texto, *g_2)* sempre com a mesma função $N(u)$ e *g_3)* sempre com a mesma constante b^2.»

Observação: A fórmula *j)* admite a versão simplificada

j') $$\sigma_n = \frac{1}{\beta_n} \cdot \sum_{1 \leq k \leq n} \int_{|x| \leq U \beta_n} x \, dF_k(x) - a_n(U),$$

conforme se viu na observação a II de § 3.

Usando o facto que as funções $\mathcal{F}_n(x)$, apresentadas a propósito de II, são insensíveis a translações das variáveis X_n, torna-se fácil adaptar a correspondência entre *d_1)* a *d_3)* de II de § 3 e *b_1)* a *b_3)* de III de § 3 de modo a transformar IX numa nova proposição de convergência, a qual tem a vantagem sobre as precedentes de abarcar *quaisquer constantes assintóticas A_k / β_n das variáveis X_k / β_n, quer estas sejam infinitesimais quer não sejam.* Eis a proposição anunciada:

X) «Dadas as variáveis casuais próprias independentes X_n $(n=1, 2, \ldots)$, com as funções de distribuição $F_n(x)$, podem encontrar-se constantes $B_n>0$ e S_n que tornem as parcelas das somas

a) $$X_1 / B_n + X_2 / B_n + \cdots + X_n / B_n - S_n$$

assintòticamente constantes e que tornem as leis dessas somas (fracamente) convergentes para uma lei (de LÉVY) *própria, quando e só quando* ocorrem simultâneamente as condições seguintes:

1.ª. Fazendo

$$\mathcal{F}_n(x) = 1 - \int_R F_n(y - x + 0) \, dF_n(y)$$

e tomando um par qualquer de números positivos c^2 e P, tem-se

$$b) \qquad \sum_{1 \leq k \leq n} \int_R \frac{x^2}{c^2+x^2}\, d\,\mathcal{F}_k(x) \uparrow \infty, \quad \text{quando } n \uparrow \infty,$$

e as constantes positivas β_n (unìvocamente) determinadas pelas igualdades

$$c) \qquad \sum_{1 \leq k \leq n} \int_R \frac{x^2}{\beta_n^2+x^2}\, d\,\mathcal{F}_k(x) = P, \quad \text{com } n \geq n_P,$$

são tais que

$$d) \qquad \beta_{n+1}/\beta_n \longrightarrow 1, \quad \text{quando } n \uparrow \infty,$$

e que existem constantes A_n que impõem a igualdade

$$e) \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \sup_{1 \leq k \leq n} \int_R \frac{x^2}{\beta_n^2+x^2}\, dF_k(x+A_k) = 0.$$

2.ª. Existe uma família de leis de Lévy do mesmo tipo tal que aquelas das grandezas b^2, $M(u)$ e $N(u)$ das suas representações de Lévy que dão

$$f) \qquad \int_{-\infty}^{0^-} \frac{u^2}{1+u^2}\, dM(u) + b^2 + \int_{0^+}^{+\infty} \frac{u^2}{1+u^2}\, dN(u) = \frac{P}{2}$$

verificam as relações (*)

$$g_1) \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1 \leq k \leq n} F_k(\beta_n u + A_k) = M(u), \quad \text{para } -\infty < u < 0,$$

$$g_2) \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1 \leq k \leq n} [1 - F_k(\beta_n u + A_k)] = N(u), \quad \text{para } 0 < u < +\infty,$$

e ainda

(*) Atendendo a I, 4) e 2) de § 4, podemos afirmar que a relação $g_1)$ é equivalente a

$$g_1') \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \prod_{1 \leq k \leq n} [1 - F_k(\beta_n u + A_k)] = e^{-M(u)}, \quad \text{para } -\infty < u < 0,$$

e que a relação $g_2)$ é equivalente a

$$g_2') \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \prod_{1 \leq k \leq n} F_k(\beta_n u + A_k) = e^{-N(u)}, \quad \text{para } 0 < u < +\infty.$$

$$g_3)\quad \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\ \lim_{n\uparrow\infty}\max\left(\frac{1}{\beta_n^2}\cdot\sum_{1\leq k\leq n}\left\{\int_{|x|<\varepsilon\beta_n} x^2\, dF_k(x+A_k)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left[\int_{|x|<\varepsilon\beta_n} x\, dF_k(x+A_k)\right]^2\right\}\right)=$$
$$=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\ \lim_{n\uparrow\infty}\min\left(\frac{1}{\beta_n^2}\cdot\sum_{1\leq k\leq n}\left\{\int_{|x|<\varepsilon\beta_n} x^2\, dF_k(x+A_k)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left[\int_{|x|<\varepsilon\beta_n} x\, dF_k(x+A_k)\right]^2\right\}\right)=b^2.$$

Satisfeitas as condições 1.ª e 2.ª, as constantes β_n podem fazer as vezes das constantes B_n e as constantes S_n admissíveis correspondentes — que vamos designar por σ_n — são as dadas pela fórmula

$$h)\quad \sigma_n=\frac{1}{\beta_n}\cdot\sum_{1\leq k\leq n}\left[A_k+\int_{|x|\leq U\beta_n} x\, dF_k(x+A_k)\right]-a_n(U),$$

onde $U>0$ é arbitrário e onde $a_n(U)$ representa o termo geral duma sucessão (real) convergente arbitrária.

O limite da sucessão $a_n(U)$, seja $a(U)$, e as grandezas b^2, $M(u)$ e $N(u)$ que figuram em *f)* a $g_3)$ caracterizam a lei limite sob a forma de Lévy modificada.

Supondo asseguradas as relações *b)* a $g_3)$, as grandezas A_k/β_n saem constantes assintóticas (das variáveis casuais X_k/β_n) e as relações $g_1)$ a $g_3)$ não ficam prejudicadas se nelas substituirmos aquelas grandezas por quaisquer outras constantes assintóticas com a mesma forma.»

Observação: Os enunciados de VIII, IX e X podem ampliar-se no estilo de I, II e III de § 3, respectivamente, acrescentando a condição para que seja admissível fazer $\sigma_n\equiv 0$.

* * *

Complementos aos últimos teoremas de convergência. Acabamos de adaptar os teoremas de § 3 e I de § 4 ao tipo de convergência de variáveis casuais que estamos a estudar presentemente.

Se quizermos adaptar I de § 5, a condição necessária e suficiente competente toma o aspecto

$$18) \qquad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{n \uparrow \infty} \max \left\{ \frac{1}{\beta_n^2} \cdot \sum_{1 \leq k \leq n} \left[\int_{|x| < \beta_n \varepsilon} x \, dF_k(x + A_k) \right]^2 \right\} = 0.$$

Se quizermos adaptar I' de § 5, pediremos na condição 2.ª de X uma lei limite de componente gausseana nula(*) e pediremos mais que, representando por $\chi_n^{(\gamma)}$ um quantil da ordem γ de X_n, exista um par fixo de números γ' e γ'', com $0 < \gamma' \leq \gamma'' < 1$, tais que se verifica, para todo o n suficientemente grande e uniformemente em $1 \leq k \leq n$, a desigualdade

$$19) \qquad \chi_k^{(\gamma')} - \eta'_k \leq A_k \leq \chi_k^{(\gamma'')} + \eta''_k,$$

onde η'_k e η''_k são números não-negativos que satisfazem à relação

$$19') \qquad \lim_{n \uparrow \infty} \left[\left(\sum_{1 \leq k \leq n} \eta_k'^2 \right) / \beta_n^2 \right] = 0 = \lim_{n \uparrow \infty} \left[\left(\sum_{1 \leq k \leq n} \eta_k''^2 \right) / \beta_n^2 \right].$$

Abstemo-nos de adaptar II de § 5, porque tal só é possível no caso duma lei limite de Gauss (observação anexa a VIII'' de § 6) e este caso será estudado separadamente no capítulo seguinte.

Oferece porém interesse ajustar o teorema de convergência de Gnedenko e Bawly. Fazendo-o, obtemos um teorema de Gnedenko e Groshev, o qual dispensa a resolução das igualdades *c)* de X e pode enunciar-se como segue:

XI) «Dadas as variáveis casuais próprias independentes X_n $(n = 1, 2, \ldots)$, possuindo as funções de distribuição $F_n(x)$, as variâncias V_n e as esperanças matemáticas E_n, então é possível encontrar constantes $B_n > 0$ e S_n tais que as variá-

---

(*) O argumento invocado a seguir a 17) mostra o seguinte: Se houver somas de *a)* de X com parcelas assintòticamente constantes e com leis limite próprias, estas leis ou têm *todas* componente gausseana nula ou têm *todas* componente gausseana significativa.

veis X_k / B_n $(k=1,2,\ldots,n)$ admitam as constantes assintóticas E_k / B_n, as leis das somas

$$a) \qquad Y_n = X_1 / B_n + X_2 / B_n + \cdots + X_n / B_n - S_n$$

sejam (fracamente) convergentes para uma lei (de Lévy) *própria* com variância e, além disso, as variâncias e as esperanças matemáticas das variáveis Y_n tendam, respectivamente, para a variância e a esperança matemática da lei limite, *quando e só quando*, tomando um número positivo qualquer Q e pondo

$$b) \qquad \gamma_n = +[(V_1 + V_2 + \cdots + V_n) / Q]^{1/2},$$

ocorrem simultâneamente as condições seguintes:

1.ª. Têm lugar as relações

$$c) \qquad \gamma_n \uparrow \infty \quad \text{e} \quad \gamma_{n+1} / \gamma_n \longrightarrow 1, \quad \text{quando } n \uparrow \infty,$$

e mais a relação

$$d) \qquad \lim_{n \uparrow \infty} \sup_{1 \leq k \leq n} \int_R \frac{x^2}{\gamma_n^2 + x^2} \, dF_k(x + E_k) = 0.$$

2.ª. Existe uma família de leis de Lévy, do mesmo tipo e com variâncias, tal que aquela das funções $C(u)$ das suas representações de Kolmogorov que dá

$$e) \qquad C(+\infty) = Q$$

verifica a igualdade

$$f) \qquad \lim_{n \uparrow \infty} \left[\frac{1}{\gamma_n^2} \cdot \sum_{1 \leq k \leq n} \int_{-\infty}^{\gamma_n u} x^2 \, dF_k(x + E_k) \right] = C(u),$$

para qualquer $u \neq 0$, finito ou infinito.

Satisfeitas as condições 1.ª e 2.ª, as constantes γ_n podem fazer as vezes das constantes B_n e as constantes S_n admissíveis correspondentes — que vamos designar por σ_n — são as dadas pela fórmula *g)* $$\sigma_n = (E_1 + E_2 + \cdots + E_n) / \gamma_n - \alpha_n,$$

onde α_n representa o termo geral duma sucessão (real) convergente arbitrária.

O limite da sucessão α_n, seja α, e a função $C(u)$ que figura em *e)* e *f)* caracterizam a lei limite sob a forma de KOLMOGOROV.

Quando se pretende não só que as variáveis X_n tenham as propriedades expostas, mas também que seja possível tomar $\sigma_n \equiv 0$, junta-se às relações *c)* a *f)* a exigência que as fracções $(E_1 + E_2 + \cdots + E_n)/\gamma_n$ devem ter limite finito, quando $n \uparrow \infty$.»

Demonstração de XI: Suponhamos que as relações *c)* a *f)* se encontram satisfeitas. Então, *d)* impõe que as variáveis X_k/γ_n fiquem com as constantes assintóticas E_k/γ_n [VI de § 4 de B] e *c) torna possível* a existência de constantes σ_n tais que as leis das somas

$$Z_n = X_1/\gamma_n + X_2/\gamma_n + \cdots + X_n/\gamma_n - \sigma_n$$

tendam para uma lei própria (IV de § 6). Se usarmos agora IV de § 5 — com $X_{nk} = X_k/\gamma_n$ — reconhecemos que as relações *e)* e *f) asseguram* a existência de constantes σ_n tais que as leis das somas Z_n convergem para uma lei própria e as variâncias e as esperanças matemáticas dessas somas tendem, respectivamente, para a variância e a esperança matemática da lei limite, sobrevindo as particularidades de que a convergência completa do argumento do limite de *f)* é uma consequência da continuidade da função $C(u)$ em qualquer ponto $u \neq 0$ (VII'' de § 6)(*), e de que a variância $C(+\infty)$ da lei limite, em princípio um número positivo qualquer (ver I e I'), aqui não pode ser diferente de Q, por ser o limite das variâncias das variáveis Z_n, todas iguais a Q [III' de § 7 de A].

(*) Se a função C for contínua para $u = 0$, a convergência completa do argumento do limite de *f)* decorre da nota à demonstração de III de § 5 de A.

Acabamos de estabelecer que as relações *c)* a *f)* são suficientes para forçar as somas de *a)* a terem as propriedades formuladas na tese.

Suponhamos agora que se verificam as propriedades referidas. Então, representando por $\mathcal{V}$ a variância da lei limite e, dado n, por $\mathcal{V}_n$ a variância da variável Y_n, tem-se

$$\mathcal{V}_n = (V_1 + V_2 + \cdots + V_n) / B_n^2 \longrightarrow \mathcal{V} \neq 0, \infty, \text{ quando } n \uparrow \infty,$$

de modo que *b)* impõe a relação

$$\text{20)} \qquad \gamma_n^2 / B_n^2 \longrightarrow \mathcal{V} / Q, \quad \text{com } \mathcal{V} \neq 0, \infty, \quad \text{quando } n \uparrow \infty.$$

De 20) tiramos primeiro *c)*, por causa de IV de § 6, e depois(*) *d)* e *f)*, por causa de VI de § 4 de B e de IV de § 5 desta parte, respectivamente, não podendo ser $C(+\infty) \neq Q$, pelo mesmo motivo acima exposto.

A demonstração aqui feita contém implìcitamente que as constantes γ_n são constantes B_n admissíveis.

A parte do enunciado de XI que falta considerar é uma transcrição, devidamente adaptada, da parte correspondente do enunciado de IV de § 5.

Uma proposição um pouco mais geral do que XI é a seguinte:

XII) «Se substituirmos depois de *a)* de XI a expressão «as variâncias das variáveis casuais Y_n tendam para a variância da lei limite» por «*as variâncias das variáveis Y_n sejam limitadas*» e se conservarmos a parte restante do texto de XI anterior à condição 1.ª, esta fica intacta e a condição 2.ª passa a tomar o aspecto seguinte:

(*) A proposição I permite concluir que as variáveis X_k / γ_n, de esperanças matemáticas E_k / γ_n e de variâncias V_k / γ_n^2, ficam com as constantes assintóticas E_k / γ_n e que as leis dalguma sucessão de somas Z_n tendem para uma lei limite cuja esperança matemática e variância são, respectivamente, a esperança matemática da lei limite das somas Y_n correspondentes, multiplicada por $+(Q/\mathcal{V})^{1/2}$, e a variância dessa lei limite, multiplicada por $Q/\mathcal{V}$.

Quaisquer duas subsucessões fracamente convergentes extraidas do argumento do limite de *f)* de XI tendem para funções limite tais que nenhuma delas se reduz a mera constante e que a diferença das duas sai igual a uma constante (a qual não é necessàriamente a mesma para todos os pares de subsucessões fracamente convergentes).

Satisfeitas as novas condições 1.ª e 2.ª, o enunciado pode continuar como em XI, com a diferença que a função $C(u)$ é a função que se anula para $u = -\infty$ e que dá uma constante, quando subtraida de qualquer dos limites tirados de *f)* de XI. Em complemento, tem-se $C(+\infty) \leqq Q$.»

Demonstração de XII: A suficiência das condições 1.ª e 2.ª mostra-se pelo processo usado a propósito de XI, desde que se tome em conta que as variâncias das variáveis Z_n, todas iguais a Q, são limitadas e desde que se invoque V de § 5 em lugar de IV de § 5.

Para provar a parte restante de XII, procedemos como segue: Caso se verifique a tese, as grandezas $\mathcal{V}_n$ definidas no decurso da demonstração de XI são limitadas, por hipótese, e têm ínfimo positivo, por causa de II', IV, V e *b₂)* de VI (*). Se a sucessão de termos $\mathcal{V}_n$ admitisse sublimites diferentes do seu limite máximo $\lambda (0 < \lambda < \infty)$, a sucessão dos números naturais n comportava uma subsucessão de termo genérico m tal que $\mathcal{V}_m \longrightarrow \lambda$ e $\mathcal{V}_{m+1} \longrightarrow \lambda' < \lambda$ (pois de contrário $\mathcal{V}_n \longrightarrow \lambda$). Então, $\mathcal{V}_{m+1} / \mathcal{V}_m \longrightarrow \lambda' / \lambda < 1$ e a propriedade $B_m / B_{m+1} \longrightarrow 1$ (ver IV de § 6) implicava $(V_1 + \cdots + V_m + V_{m+1}) / (V_1 + \cdots + V_m) \longrightarrow \lambda'/\lambda$, um resultado manifestamente absurdo. Logo a sucessão de termos $\mathcal{V}_n$ tem um limite $\mathcal{V} \neq 0, \infty$ e a relação *b)* de XI conduz novamente à fórmula 20) de modo que podemos retomar o raciocínio feito a seguir a essa fórmula, sob a reserva de substituirmos a propriedade relativa à convergência das variâncias das somas Z_n pela propriedade (mais frouxa) que essas variâncias saem limitadas e também sob a reserva de invocarmos V de § 5 em lugar de IV de § 5. Finalmente, a

---

(*) Ou, mais simplesmente, por causa de II' e da nota à página 100.

desigualdade $C(+\infty) \leqq Q$ é uma consequência imediata de V_1' de § 5, ficando assim completada a demonstração de XII.

Fechamos o parágrafo, retomando as variáveis X_n de VIII e notando o seguinte: Caso se verifique *b)* de VIII e caso as constantes β_n determinadas por *c)* de VIII tornem as variáveis X_k/β_n infinitesimais, é possível encontrar constantes σ_n que permitam extrair da sucessão das leis das somas de 16) uma subsucessão convergente para uma lei limite própria, quando e só quando existem constantes A_n que se sujeitam a *h)* e *i)* de VIII e que são tais que, pondo

$$G_n(u) = \sum_{1 \leqq k \leqq n} \int_{-\infty}^{\beta_n u} \frac{x^2}{\beta_n^2 + x^2} \, dF_k(x + A_k),$$

se cumprem as condições referidas na proposição V de § 2, com $\lim_{i \uparrow +\infty} G_i(+\infty) > 0$ (a desigualdade >0 deve-se ao facto que a demonstração de V de § 2 implica que as condições mencionadas tornam as funções G_i completamente convergentes para a função G comum a todas as leis limite).

CAPÍTULO III

CASOS DE CONVERGÊNCIA PARA LEIS PARTICULARES IMPORTANTES

§ 8) Convergência para uma lei imprópria

Todo o teorema de convergência de somas de variáveis casuais considerado neste trabalho transforma-se em teorema de convergência para uma lei imprópria, quando se põe $G(u) \equiv 0$ ou $M(u) \equiv 0 \equiv N(u)$ e $b^2 = 0$ ou $C(u) \equiv 0$, conforme se representa a lei limite sob a forma de Lévy e Khincthine ou sob a forma de Lévy ou sob a forma de Kolmogorov [ver exemplo 1.º de § 11 de A].

Além disso, como é sempre possível escolher $a_n \longrightarrow 0$ ou $a_n(U) \longrightarrow 0$ ou $\alpha_n \longrightarrow 0$ nos teoremas referidos, não se perde em generalidade, limitando o estudo da convergência para uma lei imprópria ao caso da lei dos grandes números [I de § 7 de B]. Procedendo assim, podem obter-se conclusões que constituem um exercício de aplicação da doutrina apresentada nos parágrafos precedentes, mas que estão também contidas nos resultados alcançados no último capítulo da parte B.

Não entramos aqui em pormenores do assunto que figura em epígrafe, justificando esta atitude pelas razões que acabamos de expor e ainda pela circunstância de que analisaremos, nos parágrafos seguintes, as condições de convergência para certas leis, como a de GAUSS e outras, as quais compreendem as leis impróprias como casos particulares.

§ 9) Convergência para uma lei de GAUSS

Caso geral. Teorema de RAIKOV e GNEDENKO. Vimos anteriormente, no exemplo 2.º de § 11 de A, que as representações de LÉVY e KHINTCHINE, de LÉVY modificada e de KOLMOGOROV duma lei de GAUSS com esperança matemática E e com variância V são caracterizadas como segue: A primeira por $a=E$, $G(u)=0$ para $u \leqq 0$ e $G(u)=V$ para $u>0$; a segunda por $a(U)=E$, $b^2=V$, $M(u)\equiv 0$ e $N(u)\equiv 0$; a última por $\alpha=E$, $C(u)=0$ para $u \leqq 0$ e $C(u)=V$ para $u>0$. Por aí se vê que existe uma correspondência biunívoca entre as leis de GAUSS possíveis e os pares de grandezas reais E e $V \geqq 0$.

Posto isso, consideremos, como usualmente, sucessões duplas de variáveis casuais X_{nk}, com $1 \leqq k \leqq k_n$ e $k_n \longrightarrow \infty$, quando $n \uparrow \infty$. Então, o que precede, III de § 4 e II de § 5, juntamente com I e II de § 5 de B, permitem estabelecer a proposição seguinte, a que podemos chamar *teorema principal relativo à convergência para uma lei de GAUSS:*

I) «Para que as variáveis casuais X_{nk}, independentes por linhas e tendo as funções de distribuição $F_{nk}(x)$, sejam (fortemente) assintòticamente constantes e, simultâneamente, possam determinar-se constantes S_n que tornem as leis das somas

$$a) \qquad X_n = X_{n1} + X_{n2} + \cdots + X_{nk_n} - S_n$$

(fracamente) convergentes para uma lei de GAUSS, quando $n \uparrow \infty$, *é condição necessária e suficiente* que existam uma constante não-negativa b^2 e uma sucessão (dupla) de constantes A_{nk} tais que se verifica a relação (*)

$$b_1) \quad \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq k_n} \int_{|x|>u} dF_{nk}(x+A_{nk}) = 0, \quad \text{para qualquer } u>0,$$

juntamente com a relação (**)

$$b_2) \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq k_n} \left\{ \int_{|x|<\varepsilon} x^2\, dF_{nk}(x+A_{nk}) - \right.$$

$$\left. - \left[\int_{|x|<\varepsilon} x\, dF_{nk}(x+A_{nk}) \right]^2 \right\} = b^2, \quad \text{para } algum\ \varepsilon>0.$$

Caso as relações $b_1)$ e $b_2)$ se encontrem satisfeitas, o conjunto das constantes S_n admissíveis é dado pela fórmula

$$c) \qquad S_n = \sum_{1\leq k\leq k_n} \left[A_{nk} + \int_{|x|\leq U} x\, dF_{nk}(x+A_{nk}) \right] - a_n(U),$$

onde $U>0$ é arbitrário e onde $a_n(U)$ é o termo geral duma sucessão (real) convergente arbitrária.

O limite da sucessão $a_n(U)$ escolhida e a constante b^2 são, respectivamente, a esperança matemática e a variância da lei limite.

(*) Atendendo a I, 4) e 2) de § 4, podemos afirmar que $b_1)$ é equivalente ao conjunto das duas relações

$$b_1') \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \prod_{1\leq k\leq k_n} [1-F_{nk}(u+A_{nk})] = 1, \quad \text{para } -\infty<u<0, \text{ e}$$

$$b_1'') \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \prod_{1\leq k\leq k_n} F_{nk}(u+A_{nk}) = 1, \quad \text{para } 0<u<+\infty.$$

(**) A relação $b_1)$ permite concluir fàcilmente que o limite b^2 de $b_2)$ é o mesmo, quando se integra quer no intervalo $|x|<\varepsilon$ quer em $|x|\leqslant\varepsilon$.

Quando se pretende não só que as variáveis X_{nk} tenham as propriedades expostas, mas também que seja possível tomar $S_n \equiv 0$, a condição necessária e suficiente supracitada vem acrescida da imposição que, uma vez escolhida a grandeza U, os somatórios do segundo membro de *c)* tenham limite finito, quando $n \uparrow \infty$.

Finalmente, se as relações *b_1)* e *b_2)* ocorrem para um certo $\varepsilon > 0$ e para uma certa sucessão de constantes assintóticas (fortes) A_{nk}, as mesmas relações têm lugar para todo o $\varepsilon > 0$ e para toda a sucessão de tais constantes.»

Observação: A proposição I pode aplicar-se a qualquer subsucessão (infinita) das variáveis X_{nk} que resulte de suprimir valores possíveis do índice n e de conservar o campo de variação de k para os valores de n não suprimidos.

Tendo em mente a observação que acabamos de fazer, tiramos de I o *corolário* seguinte:

I') «Para que a sucessão das somas de *a)* de I se reparta por subsucessões de parcelas (fortemente) assintòticamente constantes e de leis (fracamente) convergentes para leis de Gauss, *é condição necessária e suficiente* que exista uma sucessão (dupla) de constantes A_{nk} tais que se verifica a relação *b_1)* de I e que algum $\varepsilon > 0$ permite repartir a sucessão dos somatórios de *b_2)* de I por subsucessões convergentes.»

Vamos agora estabelecer *outro teorema de convergência para uma lei de Gauss.*

II) «Quando e só quando as constantes A_{nk} de I forem tais que se verifica a igualdade

$$a) \quad \lim_{n \uparrow \infty} \sum_{1 \leq k \leq k_n} \left[\int_{|x| < \varepsilon} x \, dF_{nk}(x + A_{nk}) \right]^2 = 0, \quad \text{para } algum \ \varepsilon > 0,$$

então a condição necessária e suficiente do teorema principal I não só fica com a parte *b_1)* inalterada e com a parte *b_2)*

privada da parcela subtractiva do somatório, como também sai equivalente ao conjunto das duas relações

$$b'_1)\qquad \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq k_n} \int_{|x|>u} \frac{x^2}{1+x^2}\, dF_{nk}(x+A_{nk})=0,$$

para qualquer $u>0$, e

$$b'_2)\qquad \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq k_n} \int_{|x|<\varepsilon} \frac{x^2}{1+x^2}\, dF_{nk}(x+A_{nk})=b^2,$$

para *algum* $\varepsilon>0$ (e, portanto, para *qualquer* $\varepsilon>0$).

Desde que as relações *a)*, $b'_1)$ e $b'_2)$ se encontrem satisfeitas, a constante b^2 resulta igual à variância (comum) das diversas leis limite e as constantes S_n admissíveis podem definir-se por qualquer fórmula competente.»

Demonstração de II: Quando se verifica a igualdade *a)* e só neste caso, então, fixada a constante b^2, há equivalência entre o conjunto das relações $b_1)$ e $b_2)$ de I e o conjunto formado pela mesma relação $b_1)$ e pela relação $b_2)$ simplificada referida no enunciado do nosso teorema.(*)

Ora, o conjunto das relações $b_1)$ inalterada e $b_2)$ simplificada forma uma condição necessária e suficiente para que se apresente a situação seguinte(**): As variáveis $X_{nk}-A_{nk}$ são (fortemente) infinitesimais e as suas constantes assintóticas nulas verificam as condições $d_1)$ a $d_3)$ de II de § 3, com as funções $M(u)$ e $N(u)$ ambas idênticamente nulas e com a constante b^2 acima mencionada. Pois bem, vimos, na página 42 (§ 5), que tal situação é equivalente a supor que as variáveis $X_{nk}-A_{nk}$ são (fortemente) infinitesimais e que as suas constantes assintóticas nulas verificam a condição *d)* de I de § 3, com $G(u)=0$ ou b^2, conforme $u\leq 0$ ou $u>0$, coisa

---

(*) Tenha-se em conta que $b_1)$ implica que a relação $b_2)$ simplificada ou vale para qualquer ε ou não vale para ε nenhum.

(**) Atenda-se à nota anterior e também à nota à demonstração de II de § 5.

esta que é por sua vez equivalente a admitir o conjunto das relações $b'_1)$ e $b'_2)$ [ver 3) de § 5 de B], a primeira das quais torna a outra extensiva a qualquer $\varepsilon>0$.

O que precede prova a parte principal de II. Quanto à parte restante, consideramo-la imediata.

Observação: Dada uma sucessão de constantes assintóticas A^*_{nk} das variáveis X_{nk}, eventualmente não sujeita à igualdade *a)* de II, pode sempre obter-se outra sucessão de constantes assintóticas A_{nk} que permita usar a condição necessária e suficiente de II, procedendo de acordo com *b)* e *c)* de I ou II de § 3, isto é, escolhendo um par de números positivos P e $Q \geqq P$ e impondo, para n suficientemente grande e uniformemente em k, a relação

$$\inf\left[\int_{|x|\leqq P} x\,dF_{nk}(x+A^*_{nk}),\ \int_{|x|\leqq Q} x\,dF_{nk}(x+A^*_{nk})\right] -$$

$$-\,\xi_{nk} \leqq A_{nk} - A^*_{nk} \leqq$$

$$\leqq \sup\left[\int_{|x|\leqq P} x\,dF_{nk}(x+A^*_{nk}),\ \int_{|x|\leqq Q} x\,dF_{nk}(x+A^*_{nk})\right] + \zeta_{nk},$$

onde ξ_{nk} e ζ_{nk} significam números não-negativos tais que

$$\lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leqq k\leqq k_n} \xi^2_{nk} = 0 = \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leqq k\leqq k_n} \zeta^2_{nk}\,.\text{(*)}$$

Posto isso, vejamos uma proposição interessante que refere sensìvelmente a generalização que Gnedenko deu a um teorema de Raikov.

III) «Dadas as variáveis casuais X_{nk}, independentes por linhas e assintòticamente constantes, e escolhidas constantes assintóticas A_{nk} dessas variáveis de acordo com *a)* de II,

---

(*) VIII e I de § 4 de B mostram que as grandezas $A_{nk} - A^*_{nk}$ aqui consideradas não podem deixar de ser constantes assintóticas das variáveis infinitesimais $X_{nk} - A^*_{nk}$.

podem determinar-se constantes S_n que tornem as leis das somas

a) $$X_n = X_{n1} + X_{n2} + \cdots + X_{nk_n} - S_n$$

(fracamente) convergentes para uma lei de Gauss de variância b^2, *quando e só quando* as leis das somas

b) $$W_n^2 = (X_{n1} - A_{n1})^2 + (X_{n2} - A_{n2})^2 + \cdots + (X_{nk_n} - A_{nk_n})^2$$

tendem para a lei (imprópria) da variável casual cujo único valor possível é b^2.»

Demonstração de III: Façamos $X_{nk}^* = X_{nk} - A_{nk}$ e $F_{nk}^*(x) = F_{nk}(x + A_{nk})$ e designemos por $H_{nk}^*(x)$ a função de distribuição da variável casual *não-negativa* X_{nk}^{*2}. Sai, com $u>0$,

$$\int_{x>u^2} dH_{nk}^*(x) = \int_{|x|>u} dF_{nk}^*(x)$$

e, com $\varepsilon>0$,

$$\int_{0\leqq x<\varepsilon^2} x\,dH_{nk}^*(x) = \int_{0\leqq x<\varepsilon^2} x\,d[F_{nk}^*(x^{1/2}) - F_{nk}^*(-x^{1/2}+0)] =$$

$$= \int_{0\leqq x<\varepsilon} x^2\,d[F_{nk}^*(x) - F_{nk}^*(-x+0)] = \int_{0\leqq x<\varepsilon} x^2\,dF_{nk}^*(x) +$$

$$+ \int_{0\leqq x<\varepsilon} x^2\,d[1 - F_{nk}^*(-x+0)] = \int_{|x|<\varepsilon} x^2\,dF_{nk}^*(x),\ (*)$$

donde concluímos que a infinitesimalidade das variáveis X_{nk}^* implica a das variáveis X_{nk}^{*2} [ver 1) de § 4 de B] e que a primeira versão da condição necessária e suficiente de II é equivalente ao conjunto das duas relações seguintes:

1) $$\lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leqq k\leqq k_n} \int_{u>x^2} dH_{nk}^*(x) = 0,$$

válida para qualquer $u^2>0$, e mais

(*) Para compreensão melhor da última igualdade recorde-se que $1-F_{nk}^*(-x+0)$ é a função de distribuição da variável $-X_{nk}^*$.

$$2) \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq k_n} \int_{0\leq x<\varepsilon^2} x\, dH^*_{nk}(x) = b^2,$$

válida para *algum* $\varepsilon^2>0$.(*)

Ora, sendo δ um número tal que $0<\delta<\varepsilon^2$, tem-se

$$\sum_k \int_{0\leq x<\varepsilon^2} x^2\, dH^*_{nk}(x) \leq \delta \cdot \sum_k \int_{0\leq x\leq \delta} x\, dH^*_{nk}(x) + \\ + \varepsilon^2 \cdot \sum_k \int_{x>\delta} dH^*_{nk}(x).$$

Logo, na hipótese de valerem 1) e 2), podemos afirmar o seguinte: Escolhidos $\eta>0$ e $\delta<\eta/(4\,b^2)$ e sendo n suficientemente grande, sai o penúltimo somatório limitado por $2\,b^2$(**) e sai o último somatório limitado por $\eta/(2\,\varepsilon^2)$. Portanto, 1) e 2) impõem

$$3) \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq k_n} \left\{ \int_{0\leq x<\varepsilon^2} x^2\, dH^*_{nk}(x) - \\ - \left[\int_{0\leq x<\varepsilon^2} x\, dH^*_{nk}(x) \right]^2 \right\} = 0, \qquad \text{para } algum\ \varepsilon^2>0.$$

O par de relações 1) e 3) é o par $b_1)$ e $b_2)$ de I, aplicado às variáveis X^{*2}_{nk} e às suas constantes assintóticas nulas, isso no caso particular $b^2=0$. Então, se escolhermos $U=\varepsilon^2$ em *c)* de I, a relação 2) e a nota respectiva permitem tomar $S_n\equiv 0$, donde $a_n(\varepsilon^2)\rightarrow b^2$. Concluímos que as leis das somas W^2_n convergem para a lei (imprópria) da variável cujo único valor possível é b^2.

Inversamente, se as somas W^2_n, de parcelas infinitesimais, tiverem o comportamento referido no enunciado, tiramos de I que a sua convergência implica a relação 1) e que

---

(*) A relação 1) prova que o limite b^2 de 2) é o mesmo, quando se integra quer no intervalo $0\leqslant x<\varepsilon^2$ quer em $0\leqslant x\leqslant\varepsilon^2$.

(**) Se $b^2=0$, faça-se $\delta<\eta/2$ e limite-se o penúltimo somatório por 1.

as hipóteses $S_n \equiv 0$ e $a_n(U) \to b^2$ implicam 2), ficando assim completada a demonstração de III.

*

* *

Caso particular das variáveis casuais $X_{nk} = X_k / B_n$. Um teorema de ZAREMBA. O estudo que acabamos de fazer adapta-se fàcilmente a variáveis casuais $X_{nk} = X_k / B_n$, com $1 \leqq k \leqq n$ e $B_n > 0$, usando, para o efeito, as correspondências apresentadas em B, § 8, texto antes de I e observação depois de III. Procedendo do modo indicado, o teorema principal relativo à convergência para uma lei de GAUSS toma o aspecto seguinte:

IV) «É dado o par constituído pela sucessão de números positivos B_n e pela sucessão de variáveis casuais independentes X_n de funções de distribuição $F_n(x)$. Para que as variáveis X_k / B_n, com $1 \leqq k \leqq n$, sejam (fortemente) assintòticamente constantes e, simultâneamente, possam determinar-se constantes S_n que tornem as leis das somas

$$a) \qquad X_1 / B_n + X_2 / B_n + \cdots + X_n / B_n - S_n$$

(fracamente) convergentes para uma lei de GAUSS, quando $n \uparrow \infty$, *é condição necessária e suficiente* que existam uma constante não-negativa b^2 e uma sucessão (dupla) de constantes A_k / B_n tais que se verifica a relação (*)

$$b_1) \quad \lim_{n \uparrow \infty} \sum_{1 \leqq k \leqq n} \int_{|x| > u B_n} dF_k(x + A_k) = 0, \quad \text{para qualquer } u > 0,$$

(*) Atendendo a I, 4) e 2) de § 4, podemos afirmar que $b_1)$ é equivalente ao conjunto das duas relações

$$b_1') \quad \lim_{n \uparrow \infty} \prod_{1 \leqq k \leqq n} [1 - F_k(B_n u + A_k)] = 1, \quad \text{para } -\infty < u < 0, \quad \text{e}$$

$$b_1'') \quad \lim_{n \uparrow \infty} \prod_{1 \leqq k \leqq n} F_k(B_n u + A_k) = 1, \quad \text{para } 0 < u < +\infty.$$

juntamente com a relação (*)

$$b_2)\qquad \lim_{n\uparrow\infty}\left(\frac{1}{B_n^2}\cdot\sum_{1\leqq k\leqq n}\left\{\int_{|x|<\varepsilon B_n} x^2\,dF_k(x+A_k)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left[\int_{|x|<\varepsilon B_n} x\,dF_k(x+A_k)\right]^2\right\}\right)=b^2,\quad \text{para } algum\ \varepsilon>0.$$

Caso as relações $b_1)$ e $b_2)$ se encontrem satisfeitas, o conjunto das constantes S_n admissíveis é dado pela fórmula

$$c)\quad S_n=\frac{1}{B_n}\cdot\sum_{1\leqq k\leqq n}\left[A_k+\int_{|x|\leqq UB_n} x\,dF_k(x+A_k)\right]-a_n(U),$$

onde $U>0$ é arbitrário e onde $a_n(U)$ é o termo geral duma sucessão (real) convergente arbitrária.

O limite da sucessão $a_n(U)$ escolhida e a constante b^2 são, respectivamente, a esperança matemática e a variância da lei limite.

Quando se pretende não só que as variáveis X_k/B_n tenham as propriedades expostas, mas também que seja possível tomar $S_n\equiv 0$, a condição necessária e suficiente supracitada vem acrescida da imposição que, uma vez escolhida a grandeza U, os somatórios do segundo membro de $c)$ tenham limite finito, quando $n\uparrow\infty$.

Finalmente, se as relações $b_1)$ e $b_2)$ ocorrem para um certo $\varepsilon>0$ e para uma certa sucessão de constantes assintóticas (fortes) A_k/B_n, as mesmas relações têm lugar para todo o $\varepsilon>0$ e para toda a sucessão de tais constantes.»

Observação: Sendo p um número não-negativo, a relação

$$4)\qquad \lim_{n\uparrow\infty}\left[\frac{1}{B_n^p}\cdot\sum_{1\leqq k\leqq n}\int_{|x|>uB_n}|x|^p\,dF_k(x+A_k)\right]=0,$$

para qualquer $u>0$,

(*) Aqui pode aplicar-se a segunda nota à página 120, desde que se mude ε em εB_n.

implica $b_1)$ de IV, pois $|x|>uB_n$ dá $(|x|/B_n)^p>u^p$. Concluímos que 4) e $b_2)$ de IV constituem uma condição suficiente para que as variáveis X_k/B_n admitam as constantes assintóticas (fortes) A_k/B_n e, simultâneamente, possam determinar-se constantes S_n que tornem as leis das somas de *a)* de IV convergentes para uma lei de Gauss de variância b^2.

Seguindo a mesma ordem de ideias que nos conduziu de I a IV, podemos passar de II para a proposição

V) «Quando e só quando as constantes A_k/B_n de IV forem tais que se verifica a igualdade

$$a) \qquad \lim_{n\uparrow\infty}\left\{\frac{1}{B_n^2}\cdot\sum_{1\leqq k\leqq n}\left[\int_{|x|<\varepsilon B_n} x\,dF_k(x+A_k)\right]^2\right\}=0,$$

para *algum* $\varepsilon>0$,

então a condição necessária e suficiente de IV não só fica com a parte $b_1)$ inalterada e com a parte $b_2)$ privada da parcela subtractiva do somatório, como também sai equivalente ao conjunto das duas relações

$$b'_1) \qquad \lim_{n\uparrow\infty}\sum_{1\leqq k\leqq n}\int_{|x|>uB_n}\frac{x^2}{B_n^2+x^2}\,dF_k(x+A_k)=0,$$

para qualquer $u>0$, e

$$b'_2) \qquad \lim_{n\uparrow\infty}\sum_{1\leqq k\leqq n}\int_{|x|<\varepsilon B_n}\frac{x^2}{B_n^2+x^2}\,dF_k(x+A_k)=b^2,$$

para *algum* $\varepsilon>0$ (e, portanto, para *qualquer* $\varepsilon>0$).

Depois o enunciado fecha com as mesmas palavras da parte final da proposição II.»

Observação: Dada uma sucessão de constantes assintóticas A_k^*/B_n das variáveis X_k/B_n, eventualmente não sujeita à igualdade *a)* de V, pode sempre obter-se outra sucessão de constantes assintóticas A_k/B_n que permita aplicar a condição necessária e suficiente de V, adaptando o processo usado na observação anexa a II, isto é, escolhendo um par de números positivos P e $Q \geq P$ e impondo, para n suficientemente grande e uniformemente em $k \leq n$, a relação

$$\inf\left[\int_{|x| \leq PB_n} x\,dF_k(x+A_k^*),\ \int_{|x| \leq QB_n} x\,dF_k(x+A_k^*)\right] -$$

$$- \xi_k \leq A_k - A_k^* \leq$$

$$\leq \sup\left[\int_{|x| \leq PB_n} x\,dF_k(x+A_k^*),\ \int_{|x| \leq QB_n} x\,dF_k(x+A_k^*)\right] + \zeta_k,$$

onde ξ_k e ζ_k significam números não-negativos tais que

$$\lim_{n \uparrow \infty} [(\sum_{1 \leq k \leq n} \xi_k^2) / B_n^2] = 0 = \lim_{n \uparrow \infty} [(\sum_{1 \leq k \leq n} \zeta_k^2) / B_n^2].$$

A adaptação de I' e a de III às variáveis X_k/B_n envolvem modificações tão ligeiras que não vale a pena referi-las.

Posto isso, vejamos uma aplicação da doutrina exposta. No texto da proposição IV suprima-se a alusão à constância assintótica (forte), iguale-se b^2 à unidade, ponha-se $A_n \equiv 0$, substitua-se a relação $b_1)$ pela relação 4) da observação anexa, tome-se p inteiro, peça-se a relação $b_2)$ para qualquer $\varepsilon > 0$ e substitua-se nela $|x| < \varepsilon B_n$ por $|x| \leq \varepsilon B_n$ (ver a nota a $b_2)$ de IV), faça-se $U=1$ e, por fim, escolha-se $a_n(U) \equiv 0$. Introduzindo todas estas particularizações em IV, obtemos a parte principal do *primeiro teorema de* Zaremba, publicado em Mathematische Zeitschrift, 69. Band, 3. Heft, Maio 1958, páginas 295-297, parte essa que pode enunciar-se como segue:

VI) «É dado o par constituido pela sucessão de números positivos B_n e pela sucessão de variáveis casuais independentes X_n de funções de distribuição $F_n(x)$. Afim de que as leis das somas

$$\frac{1}{B_n} \cdot \sum_{1 \leq k \leq n} \left[X_k - \int_{|x| \leq B_n} x\,dF_k(x)\right]$$

tendam (fracamente) para a lei de Gauss de esperança matemática nula e de variância igual a 1, quando $n \uparrow \infty$, é condição suficiente que exista um número inteiro e não-negativo p tal que se verificam simultâneamente as relações seguintes, válidas com qualquer $u > 0$:

$$\lim_{n\uparrow\infty} \left[\frac{1}{B_n^p} \cdot \sum_{1 \leqq k \leqq n} \int_{|x| > u B_n} |x|^p \, dF_k(x) \right] = 0;$$

$$\frac{1}{B_n^2} \cdot \sum_{1 \leqq k \leqq n} \left\{ \int_{|x| \leqq u B_n} x^2 \, dF_k(x) - \left[\int_{|x| \leqq u B_n} x \, dF_k(x) \right]^2 \right\} \longrightarrow 1,$$

quando $n \uparrow \infty$.»

*

* *

Transformação de sucessões simples em sucessões duplas convergentes para uma lei de Gauss. Passamos a considerar o problema tratado em § 7 no caso particular de se procurarem leis limite de Gauss próprias.

Antes de mais nada, basta invocar I e I' de § 7, recordar que toda a lei limite de somas de variáveis casuais independentes é definida a menos duma constante de translação arbitrária $a(U)$, a qual é a esperança matemática no caso da lei de Gauss, e ter em conta que, multiplicando uma variável casual com variância por uma constante, a variável resultante fica com variância igual ao produto da variância da primeira pelo quadrado da constante, basta isso para concluirmos pela proposição seguinte:

VII) «Suponhamos que são dadas as variáveis casuais independentes $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ e que existem constantes $B_n > 0$ e S_n tais que as somas

a) $$Y_n = X_1 / B_n + X_2 / B_n + \cdots + X_n / B_n - S_n$$

ficam com parcelas assintòticamente constantes e com leis (fracamente) convergentes para uma lei de Gauss própria.

Então, as leis limite próprias que podem obter-se, fazendo variar as constantes $B_n > 0$ e S_n de *a)*, *são todas as leis de Gauss* *próprias e só essas* e a cada uma delas correspondem somas Y_n que saem de parcelas assintòticamente constantes. Além disso, duas leis limite das referidas têm variâncias de razão p^2, quando e só quando a razão das constantes B_n correspondentes tende para $1/|p|$, quando $n \uparrow \infty$.»

Posto isso, vamos adaptar X de § 7 ao nosso caso. Sai a proposição seguinte:

VIII) «Dadas as variáveis casuais próprias independentes $X_n (n=1, 2, \ldots)$ de funções de distribuição $F_n(x)$, podem encontrar-se constantes $B_n > 0$ e S_n que tornem as parcelas das somas

a) $$X_1 / B_n + X_2 / B_n + \cdots + X_n / B_n - S_n$$

(fortemente) assintòticamente constantes e que tornem as leis dessas somas (fracamente) convergentes para uma lei de Gauss *própria, quando e só quando* ocorrem simultâneamente as condições seguintes:

1.ª. Fazendo

$$\mathcal{F}_n(x) = 1 - \int_R F_n(y - x + 0)\, dF_n(y)$$

e tomando um par qualquer de números positivos c^2 e b^2, tem-se

b) $$\sum_{1 \leq k \leq n} \int_R \frac{x^2}{c^2 + x^2}\, d\mathcal{F}_k(x) \uparrow \infty, \quad \text{quando} \quad n \uparrow \infty,$$

e as constantes positivas β_n (unìvocamente) determinadas pelas igualdades

c) $$\sum_{1 \leq k \leq n} \int_R \frac{x^2}{\beta_n^2 + x^2}\, d\mathcal{F}_k(x) = 2\, b^2, \quad \text{para} \quad n \geqq n_{2b^2},$$

são tais que

d) $$\beta_{n+1} / \beta_n \longrightarrow 1, \quad \text{quando} \quad n \uparrow \infty,$$

e que existem constantes A_n que impõem a relação(*)

$$e) \quad \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq n} \int_{|x|>u\beta_n} dF_k(x+A_k) = 0, \quad \text{para todo o } u>0.$$

2.ª Existe um número $\varepsilon>0$ tal que a constante b^2 de *c)* e as grandezas A_n de *e)* verificam a relação(**)

$$f) \quad \lim_{n\uparrow\infty}\left(\frac{1}{\beta_n^2}\cdot\sum_{1\leq k\leq n}\left\{\int_{|x|<\varepsilon\beta_n} x^2\,dF_k(x+A_k)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\left[\int_{|x|<\varepsilon\beta_n} x\,dF_k(x+A_k)\right]^2\right\}\right)=b^2.$$

Satisfeitas as condições 1.ª e 2.ª, as constantes β_n podem fazer as vezes das constantes B_n e as constantes S_n admissíveis correspondentes — que vamos representar por σ_n — são dadas pela fórmula

$$g) \quad \sigma_n = \frac{1}{\beta_n}\cdot\sum_{1\leq k\leq n}\left[A_k+\int_{|x|\leq U\beta_n} x\,dF_k(x+A_k)\right]-a_n(U),$$

onde $U>0$ é arbitrário e onde $a_n(U)$ é o termo geral duma sucessão (real) convergente arbitrária.

Depois o enunciado pode concluir-se como em IV, desde que se leia β_n, *e)*, *f)* e *g)* em lugar de B_n, $b_1)$, $b_2)$ e *c)*, respectivamente.»

Demonstração de VIII: Para provar a suficiência das condições do enunciado podemos reproduzir a parte correspondente da demonstração de VIII de § 7 até à fórmula 16) incluida e invocar em seguida a proposição IV(***). Para provar a necessidade das condições do enunciado podemos também acompanhar a parte correspondente da demonstração de VIII de § 7 até inferirmos a relação *b)* e invocar depois as propo-

---

(*) Podemos pôr uma variante a *e)* decalcada da nota a $b_1)$ de IV.
(**) Aqui pode aplicar-se a nota a $b_2)$ de IV, com β_n em lugar de B_n.
(***) A escolha do segundo membro das igualdades *c)* força a variância $G(+\infty)$ da lei limite a ser igual a b^2.

sições VII e IV. Feito isso tudo, as constantes β_n de *c)* podem substituir as constantes B_n de IV, pelo que não há dificuldade em concluir a demonstração de VIII.

A proposição VIII pode substituir, talvez com vantagem, o teorema de BERNSTEIN e FELLER, o qual nos abstemos de apresentar aqui. Um resultado complementar de VIII será dado em XIV.

Observação: Quando as constantes assintóticas A_k / β_n das variáveis X_k / β_n de VIII forem tais que se verifica a igualdade *a)* de V, com β_n em lugar de B_n, e só neste caso, as relações *e)* e *f)* de VIII podem simplificar-se no sentido descrito em V. Caso as constantes assintóticas A_k / β_n não estejam na situação que acabamos de referir, esta pode alcançar-se pelo processo exposto na observação anexa a V.

Fechamos este sector de § 9, retomando as variáveis X_n de VIII e notando que a observação a I implica o seguinte: Caso se verifique *b)* de VIII, então existe uma subsucessão (infinita) β_m, extraída da sucessão das constantes β_n determinadas por *c)* de VIII, que satisfaz a *e)* e a *f)* de VIII, quando e só quando é possível determinar constantes σ_m tais que as somas

$$X_1 / \beta_m + X_2 / \beta_m + \cdots + X_m / \beta_m - \sigma_m$$

ficam com parcelas (fortemente) assintòticamente constantes e com leis convergentes para uma lei de GAUSS de variância $b^2 > 0$.

*

* *

Caso particular das variáveis casuais X_{nk} com variâncias. Outro teorema de RAIKOV e corolário. Retomemos as variáveis X_{nk} de I e suponhamos que elas são integráveis e que admitem as suas esperanças matemáticas E_{nk} como constantes assintóticas. Então, podemos fazer $A_{nk} = E_{nk}$ e aplicar o teorema principal de convergência para uma lei de GAUSS ou, caso as esperanças matemáticas o consintam, o teorema de convergência II.

Indo agora mais longe nas hipóteses, passamos a supor que as variáveis X_{nk} têm variâncias. Nesta conformidade vale a proposição seguinte:

IX) «Para que as variáveis casuais X_{nk}, independentes por linhas, tendo as funções de distribuição $F_{nk}(x)$ e dotadas de variâncias V_{nk}, admitam as suas esperanças matemáticas E_{nk} como constantes assintóticas (fortes) e para que seja possível determinar constantes S_n tais que as leis das somas

$$a) \qquad X_n = X_{n1} + X_{n2} + \cdots + X_{nk_n} - S_n$$

tendam (fracamente) para uma lei de Gauss, quando $n \uparrow \infty$, e, além disso, as variâncias e as esperanças matemáticas das variáveis X_n tendam, respectivamente, para a variância e a esperança matemática da lei limite, *é condição necessária e suficiente* que se verifiquem simultâneamente as duas relações seguintes:

$$b_1) \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq k_n} \int_{|x|>u} x^2\, dF_{nk}(x+E_{nk}) = 0,$$

para qualquer $u>0$, e mais, sendo b^2 uma constante não-negativa,

$$b_2) \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq k_n} \int_{|x|<\varepsilon} x^2\, dF_{nk}(x+E_{nk}) = b^2,$$

para *algum* $\varepsilon>0$ (e, portanto, para *qualquer* $\varepsilon>0$).

Caso as relações $b_1)$ e $b_2)$ se encontrem satisfeitas, o conjunto das constantes S_n admissíveis é dado pela fórmula

$$c) \qquad S_n = E_{n1} + E_{n2} + \cdots + E_{nk_n} - \alpha_n,$$

onde α_n representa o termo geral duma sucessão (real) convergente arbitrária.

O limite da sucessão α_n escolhida e a constante b^2 são, respectivamente, a esperança matemática e a variância da lei limite.

Quando se pretende não só que as variáveis X_{nk} tenham as propriedades expostas, mas também que seja possível tomar $S_n \equiv 0$, a condição necessária e suficiente supracitada vem acrescida da imposição que as somas $E_{n1} + E_{n2} + \cdots + E_{nk_n}$ devem ter limite finito, quando $n \uparrow \infty$.»

Demonstração de IX: Como $b_1)$ implica a relação

$$\lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1 \leq k \leq k_n} \int_{|x|>u} dF_{nk}(x+E_{nk}) = 0, \quad \text{para qualquer} \quad u > 0,$$

ou seja a infinitesimalidade (forte) dos desvios $X_{nk} - E_{nk}$, a proposição IX reduz-se ao caso particular do teorema de GNEDENKO e BAWLY (IV de § 5) em que a função $C(u)$ vale 0 ou b^2, conforme $u \leq 0$ ou $u > 0$.

Uma proposição um pouco mais geral do que IX é a seguinte:

X) «Para que as variáveis casuais X_{nk}, sujeitas às restrições de IX e à restrição adicional

$$V_{n1} + V_{n2} + \cdots + V_{nk_n} \leq W < +\infty, \quad \text{seja qual for } n,$$

admitam as suas esperanças matemáticas E_{nk} como constantes assintóticas (fortes) e para que seja possível determinar constantes S_n tais que as leis das somas X_n de IX tendam (fracamente) para uma lei de GAUSS, quando $n \uparrow \infty$, e, além disso, as esperanças matemáticas dessas somas tendam para a esperança matemática da lei limite, *é condição necessária e suficiente* que se verifiquem simultâneamente as duas relações seguintes:

$$b_1) \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1 \leq k \leq k_n} \int_{u<|x|<v} x^2 \, dF_{nk}(x+E_{nk}) = 0,$$

para qualquer par de números positivos u e $v > u$, e mais, sendo b^2 uma constante não-negativa,

$$b_2) \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1 \leq k \leq k_n} \int_{|x|<\varepsilon} x^2 \, dF_{nk}(x+E_{nk}) = b^2,$$

para *algum* $\varepsilon > 0$ (e, portanto, para *qualquer* $\varepsilon > 0$).

Depois o enunciado fecha com as mesmas palavras da parte final de IX.»

Demonstração de X: Podemos supor $W>1$. Se tomarmos $u \geqq 1$ e $h>1/2$ de modo que $W^h>u$, resulta a desigualdade

$$\sum_k \int_{|x|>u} dF_{nk}(x+E_{nk}) \leqq \sum_k \int_{u<|x|<W^h} x^2\, dF_{nk}(x+E_{nk}) +$$
$$+ \frac{1}{W^{2h}} \cdot \sum_k \int_{|x| \geqq W^h} x^2\, dF_{nk}(x+E_{nk}),$$

onde o último somatório não pode exceder W, por causa da restrição adicional do enunciado. Então, dado $\eta>0$, basta sujeitar h e W à relação $W^{1-2h}<\eta/2$, para que a fórmula $b_1)$ permita estabelecer a desigualdade

$$5) \qquad \sum_{1 \leqq k \leqq k_n} \int_{|x|>u} dF_{nk}(x+E_{nk}) < \eta,$$

válida para todo o n suficientemente grande. Como a mesma fórmula $b_1)$ permite estender 5) a qualquer $u>0$, isto é, permite estabelecer a infinitesimalidade (forte) dos desvios $X_{nk}-E_{nk}$, a proposição X reduz-se ao caso particular de V de § 5 em que a função $C(u)$, representativa da classe dos limites, vale 0 ou b^2, conforme $u \leqq 0$ ou $u>0$.

Observação: As proposições IX e X podem aplicar-se a qualquer subsucessão (infinita) das variáveis X_{nk} que resulte de suprimir valores possíveis do índice n e de conservar o campo de variação de k para os valores de n não suprimidos.

Tendo em mente a observação que acabamos de fazer e notando que a restrição adicional de X limita superiormente os somatórios da relação $b_2)$ competente, podemos estabelecer o *corolário* seguinte:

X') «As variáveis casuais X_{nk} de X satisfazem à relação $b_1)$ competente, quando e só quando existem constantes S_n tais que a sucessão das somas de *a)* de IX se reparte por subsucessões, cada uma das quais tem o comportamento atribuído em X à sucessão completa.»

Vejamos agora uma aplicação do teorema III, a qual refere sensivelmente um resultado devido a RAIKOV. Ei-la:

XI) «São dadas as variáveis casuais X_{nk}, independentes por linhas, dotadas de variâncias e admitindo as suas esperanças matemáticas E_{nk} como constantes assintóticas. Para que seja possível determinar constantes S_n tais que as leis das somas

a) $$X_n = X_{n1} + X_{n2} + \cdots + X_{nk_n} - S_n$$

tendam (fracamente) para uma lei de GAUSS de variância b^2, quando $n \uparrow \infty$, e, além disso, as variâncias das variáveis X_n tendam para b^2, *é condição necessária e suficiente* que as leis das somas

b) $$W_n^2 = (X_{n1} - E_{n1})^2 + (X_{n2} - E_{n2})^2 + \cdots + (X_{nk_n} - E_{nk_n})^2$$

tendam para a lei (imprópria) da constante b^2 e, além disso, as esperanças matemáticas das variáveis W_n^2 tendam para essa mesma constante.»

Demonstração de XI: Designemos por V_{nk} a variância de X_{nk} e comecemos por notar que $\sum_k V_{nk}$ tanto é a variância de X_n como também é a esperança matemática de W_n^2, pelo que esse somatório sai limitado (em relação a n) no estudo quer da condição necessária quer da suficiente. Pois bem, vimos, a propósito da demonstração de III de § 5, que tal limitação, acompanhada da infinitesimalidade dos desvios, implica que as constantes assintóticas idênticamente nulas das variáveis $X_{nk} - E_{nk}$ respeitam as restrições *b)* e *c)* de III de § 2. Logo a observação a II, com $E_{nk} = A_{nk}^* = A_{nk}$, mostra que podemos aplicar o teorema III às variáveis X_{nk} e às suas constantes assintóticas E_{nk}. Em face do exposto a tese segue agora sem dificuldade.

Observação: A forma original do teorema de RAIKOV supracitado baseia-se na hipótese $\sum_k V_{nk} \equiv 1$, donde $b^2 = 1$.

Uma alteração insignificante da demonstração de XI conduz ao *corolário* seguinte:

XI') «A proposição XI continua a ser verdadeira se acrescentarmos aos dados a condição que as somas $V_{n1}+$ $+V_{n2}+\cdots+V_{nk_n}$ sejam limitadas em relação a n e se retirarmos da parte restante do enunciado as referências à convergência das variâncias das variáveis X_n e das esperanças matemáticas das variáveis W_n^2.»

*

* *

Sobreposição dos casos particulares das variáveis casuais X_{nk} que têm variâncias e das que são da forma X_k/B_n. Vamos agora adaptar o teorema IX a variáveis casuais $X_{nk}=X_k/B_n$, com $1\leqq k\leqq n$ e $B_n>0$. Resulta a proposição seguinte:

XII) «É dado o par constituido pela sucessão de números positivos B_n e pela sucessão de variáveis casuais independentes X_n, tendo as funções de distribuição $F_n(x)$ e dotadas de variâncias V_n. Para que as variáveis casuais X_k/B_n, com $1\leqq k\leqq n$, admitam as suas esperanças matemáticas E_k/B_n como constantes assintóticas (fortes) e para que seja possível determinar constantes S_n tais que as leis das somas

$$a)\qquad X_1/B_n+X_2/B_n+\ldots+X_n/B_n-S_n$$

tendam (fracamente) para uma lei de Gauss, quando $n\uparrow\infty$, e, além disso, as variâncias e as esperanças matemáticas dessas somas tendam, respectivamente, para a variância e a esperança matemática da lei limite, *é condição necessária e suficiente* que se verifiquem simultâneamente as duas relações seguintes:

$$b_1)\qquad \lim_{n\uparrow\infty}\left[\frac{1}{B_n^2}\cdot\sum_{1\leqq k\leqq n}\int_{|x|>uB_n} x^2\,dF_k(x+E_k)\right]=0,$$

para qualquer $u>0$, e mais, sendo b^2 uma constante não-negativa,

$$b_2) \qquad \lim_{n\uparrow\infty}\left[\frac{1}{B_n^2}\cdot\sum_{1\leq k\leq n}\int_{|x|<\varepsilon B_n} x^2\,dF_k(x+E_k)\right]=b^2,$$

para *algum* $\varepsilon>0$ (e, portanto, para qualquer $\varepsilon>0$).

Caso as relações $b_1)$ e $b_2)$ se encontrem satisfeitas, o conjunto das constantes S_n admissíveis é dado pela fórmula

$$c) \qquad S_n=(E_1+E_2+\cdots+E_n)/B_n-\alpha_n\,,$$

onde α_n representa o termo geral duma sucessão (real) convergente arbitrária.

O limite da sucessão α_n escolhida e a constante b^2 são, respectivamente, a esperança matemática e a variância da lei limite.

Quando se pretende não só que as variáveis X_k/B_n tenham as propriedades expostas, mas também que seja possível tomar $S_n\equiv 0$, a condição necessária e suficiente supracitada vem acrescida da imposição que as somas $(E_1+E_2+\cdots+E_n)/B_n$ devem ter limite finito, quando $n\uparrow\infty$.»

Se adaptarmos X à situação presente, obtemos a proposição seguinte:

XIII) «Para que as variáveis casuais X_k/B_n, sujeitas às restrições de XII e à restrição adicional

$$(V_1+V_2+\cdots+V_n)/B_n^2\leqq W<+\infty, \quad \text{seja qual for } n,$$

admitam as suas esperanças matemáticas E_k/B_n como constantes assintóticas (fortes) e para que seja possível determinar constantes S_n tais que as leis das somas de *a)* de XII tendam (fracamente) para uma lei de Gauss, quando $n\uparrow\infty$, e, além disso, as esperanças matemáticas dessas somas tendam para a esperança matemática da lei limite, *é condição necessária e suficiente* que se verifiquem simultâneamente as duas relações seguintes:

$$b_1) \qquad \lim_{n\uparrow\infty}\left[\frac{1}{B_n^2}\cdot\sum_{1\leq k\leq n}\int_{u B_n<|x|<v B_n} x^2\,dF_k(x+E_k)\right]=0,$$

para qualquer par de números positivos u e $v>u$, e mais, sendo b^2 uma constante não-negativa,

$$b_2) \qquad \lim_{n\uparrow\infty}\left[\frac{1}{B_n^2}\cdot\sum_{1\leq k\leq n}\int_{|x|<\varepsilon B_n} x^2\,dF_k(x+E_k)\right]=b^2,$$

para *algum* $\varepsilon>0$ (e, portanto, para qualquer $\varepsilon>0$).

Depois o enunciado fecha com as mesmas palavras da parte final de XII.»

A adaptação de X′, a de XI e a de XI′ às variáveis X_k/B_n são tão fáceis que não vale a pena realizá-las aqui.

Passamos a considerar o problema tratado em § 7 no caso particular de se procurarem leis limite de GAUSS próprias e as variáveis X_n terem variâncias. Deste modo somos conduzidos a um resultado complementar de VIII, o qual pode resumir-se na proposição seguinte:

XIV) «Considerem-se apenas variáveis casuais e leis limite *próprias*, tanto no teorema XII como também em XIII.

Então, as constantes $B_n>0$ só podem satisfazer à condição necessária e suficiente do teorema considerado se forem da ordem de $+(V_1+V_2+\cdots+V_n)^{1/2}$ e se $V_1+V_2+\cdots+V_n\uparrow\infty$ e $(V_1+V_2+\cdots+V_{n+1})/(V_1+V_2+\cdots+V_n)\longrightarrow 1$, tudo isso quando $n\uparrow\infty$. Caso a sucessão das grandezas B_n verifique a condição necessária e suficiente referida, tal acontece também a qualquer outra sucessão da mesma ordem (possìvelmente com um valor diferente da constante $b^2>0$).»

Demonstração de XIV: Se partirmos de XII, a nossa proposição sai uma consequência imediata de VII de § 9 e de XI de § 7. Anàlogamente, se partirmos de XIII, a nossa proposição sai uma consequência imediata de VII de § 9 e de XII de § 7.

*

* *

Resultados clássicos de LINDEBERG, FELLER e LIAPOUNOV. Teoremas complementares. Na parte restante deste parágrafo consideramos as variáveis casuais X_n de XII, supomo-las próprias e substituimo-las pelos seus desvios $X_n - E_n$. Deste modo as relações $b_1)$ e $b_2)$ correspondentes ficam inalteradas e a relação $c)$ correspondente simplifica-se para $S_n = -\alpha_n$ e, portanto, para $S_n \equiv 0$, quando e só quando escolhemos $\alpha_n \equiv 0$. Quanto às constantes $B_n > 0$, vamos igualá-las a $+(V_1 + V_2 + \cdots + V_n)^{1/2}$, o que impõe $(V_1 + V_2 + \cdots + V_n)/ /B_n^2 \equiv 1$, reduz a convergência das variâncias das somas de $a)$ de XII para a variância da lei limite à relação trivial $1 \longrightarrow b^2 = 1$, introduz em XII a equivalência entre a relação $b_1)$ e o conjunto das duas relações $b_1)$ e $b_2)$ e não significa perda de generalidade em face de XIV.

Se adoptarmos as acomodações descritas, a proposição XII transforma-se no célebre *teorema de* LINDEBERG *e* FELLER, o qual representa o *ponto culminante das investigações clássicas* relativas à convergência de somas de variáveis casuais independentes para uma lei de GAUSS *própria.* Ei-lo:

XV) «São dadas as variáveis casuais próprias independentes $X_n (n = 1, 2, \ldots)$, possuindo as funções de distribuição $F_n(x)$ e dotadas de variâncias V_n e (portanto) de esperanças matemáticas E_n. Então, pondo

$$a) \qquad B_n = +(V_1 + V_2 + \cdots + V_n)^{1/2},$$

as somas

$$b) \quad Y_n = (X_1 - E_1)/B_n + (X_2 - E_2)/B_n + \cdots + (X_n - E_n)/B_n$$

saem de parcelas (fortemente) infinitesimais e as leis das variáveis casuais Y_n tendem (fracamente) para a lei de GAUSS de variância unitária e de esperança matemática nula, *quando e só quando* se verifica a relação seguinte, chamada *relação de* LINDEBERG,

$$c) \qquad \lim_{n \uparrow \infty} \left[\frac{1}{B_n^2} \cdot \sum_{1 \leq k \leq n} \int_{|x| > u B_n} x^2 \, dF_k(x + E_k) \right] = 0,$$

na qual u representa um número positivo arbitrário.»

Observação: LINDEBERG provou que a relação $c)$ é suficiente para que as somas de $b)$ tenham o comportamento descrito no enunciado do teorema e mais tarde FELLER provou que a *relação de* LINDEBERG é necessária para o mesmo efeito.

Tendo em conta XIV, tiramos de XV o *corolário* seguinte:

XV') «Quando as variáveis casuais de XV satisfazem à *relação de* LINDEBERG, sai necessàriamente $V_1+V_2+\cdots$ $\cdots+V_n\uparrow\infty$ e $(V_1+V_2+\cdots+V_{n+1})/(V_1+V_2+\cdots+V_n)\longrightarrow 1$, quando $n\uparrow\infty$.»

Exemplo: Consideremos mais uma vez a sucessão de variáveis casuais simples independentes $X_1; X_2, \ldots$ tal que o termo genérico X_n pode tomar apenas os valores 0 e 1, o primeiro com probabilidade q_n e o outro com probabilidade p_n, e vamos supor que as variáveis são todas próprias ou, equivalentemente, que $p_n q_n > 0$, seja qual for n. No exemplo 2.º de § 8 de A vimos as igualdades $E_n = p_n$ e $V_n = p_n q_n$, a última das quais permite escrever *a)* de XV sob a forma $B_n = +(p_1 q_1 + p_2 q_2 + \cdots + p_n q_n)^{1/2}$. Pois bem, para que se verifique a *relação de* LINDEBERG relativa às variáveis consideradas, a condição $B_n\uparrow\infty$ não só é necessária, por causa de XV', como também é suficiente, pois, dado $u>0$, $B_n\uparrow\infty$ implica $uB_n>1$ para todo o n suficientemente grande, donde resulta imediatamente *c)* de XV. Ficam assim confirmados (e melhorados) os resultados de cálculos anteriores relativos à convergência das somas de *b)* de XV, consideradas debaixo da restrição que todas as variáveis X_n seguem *leis de* BERNOULLI-POISSON(*) próprias. — A hipótese $B_n\uparrow\infty$ verifica-se, em particular, quando $p_n\equiv p>0$ e $q_n\equiv q>0$, isto é, quando as variáveis X_n são idênticamente distribuidas segundo uma *lei de* BERNOULLI própria. A este caso particular corresponde o mais antigo dos teoremas de convergência para uma lei de GAUSS própria, o qual costuma ser citado sob o nome de *teorema limite de* DE MOIVRE *e* LAPLACE.

Outro exemplo: Consideremos a sucessão de variáveis casuais próprias, simples e independentes $X_1, X_2, \ldots$ tal que

---

(*) também chamadas *leis de Bernoulli generalizadas.*

o termo genérico X_n pode tomar apenas os valores n^λ e $-n^\lambda$ (λ constante real), qualquer deles com probabilidade $1/2$. Então $E_n=0$, $V_n=n^{2\lambda}$ e B_n de *a)* de XV converge ou diverge, conforme $\lambda<-1/2$ ou $\lambda\geqq-1/2$. Na primeira hipótese o teorema XV não vale, por causa de XV', e na outra ele vale, pois verifica-se a *relação de* LINDEBERG, a qual é imediata para $-1/2\leqq\lambda\leqq 0$ e sai também para $\lambda>0$, porque, dado $u>0$, a desigualdade óbvia $B_n^2>(n/2)\cdot(n/2)^{2\lambda}$ força $u B_n>u\cdot(1/2)^{\lambda+1/2}\cdot n^{\lambda+1/2}>n^\lambda$ para todo o n suficientemente grande.

Posto isso, vejamos algumas aplicações importantes do teorema de LINDEBERG e FELLER.

Se n e $k\leqq n$ forem números naturais, se δ for um número positivo e se admitirmos que a variável X_k tem momento absoluto da ordem $2+\delta$, é obvio que se verifica a desigualdade [ver 7) de § 8 de B para a passagem ao último membro]

$$6)\qquad \int_{|x|>uB_n} x^2\, dF_k(x+E_k)\leqq[1/(uB_n)^\delta]\cdot\int_R |x|^{2+\delta}\, dF_k(x+E_k)\leqq$$
$$\leqq[2^{2+\delta}/(uB_n)^\delta]\cdot\int_R |x|^{2+\delta}\, dF_k(x)\,.$$

De 6), de XV e das propriedades dos momentos das variáveis casuais tiramos o *teorema de* LIAPOUNOV, o qual representa um marco notável na evolução do problema que estamos a estudar e pode enunciar-se como segue:

XVI) «São dadas as variáveis casuais próprias independentes $X_n\,(n=1,2,\ldots)$, tendo as funções de distribuição $F_n(x)$ e dotadas de momentos absolutos da ordem $2+\delta$, com $\delta>0$, (e, portanto, dotadas de variâncias V_n e de esperanças matemáticas E_n). Então, pondo

$$a)\qquad B_n=+\,(V_1+V_2+\cdots+V_n)^{1/2},$$

as somas

$$b)\qquad Y_n=(X_1-E_1)/B_n+(X_2-E_2)/B_n+\cdots+(X_n-E_n)/B_n$$

saem de parcelas (fortemente) infinitesimais e as leis das variáveis casuais Y_n tendem (fracamente) para a lei de GAUSS de variância unitária e de esperança matemática nula, contanto que se verifique a relação

$$c)\qquad \lim_{n\uparrow\infty}\left[\frac{1}{B_n^{2+\delta}}\cdot\sum_{1\leq k\leq n}\int_R |x|^{2+\delta}\,dF_k(x)\right]=0$$

ou contanto que se verifique a relação

$$c')\qquad \lim_{n\uparrow\infty}\left[\frac{1}{B_n^{2+\delta}}\cdot\sum_{1\leq k\leq n}\int_R |x|^{2+\delta}\,dF_k(x+E_k)\right]=0.»$$

Reafirmamos a convenção que $\mathsf{P}(\cdots)$ significa a probabilidade do acontecimento contido dentro do parêntesis e passamos a enunciar um *corolário do teorema de* L*IAPOUNOV*, a saber:

XVI') «Para que as somas de *b)* de XVI saiam de parcelas (fortemente) infinitesimais e para que as leis dessas somas tendam (fracamente) para a lei de GAUSS de variância unitária e de esperança matemática nula, é condição suficiente que exista uma sucessão não-decrescente de constantes positivas L_n tais que $\mathsf{P}(|X_n|>L_n)=0$ para qualquer n e que $L_n/B_n\longrightarrow 0$, quando $n\uparrow\infty$.»

Demonstração de XVI': Seja qual for n, a igualdade $\mathsf{P}(|X_n|>L_n)=0$ implica primeiro $|E_n|=|E(X_n)|\leq L_n$ e depois $\mathsf{P}(|X_n-E_n|>2L_n)=0$. Logo as variáveis X_n-E_n têm momentos absolutos de todas as ordens (não-negativas). Então, dado qualquer $\delta>0$, sai

$$\sum_k [E(|X_k-E_k|^{2+\delta})/B_n^{2+\delta}]\leq\sum_k[(2L_k)^\delta\cdot V_k/B_n^{2+\delta}]\leq$$

$$\leq[(2L_n)/B_n]^\delta\cdot\sum_k(V_k/B_n^2)\longrightarrow 0,$$

por causa de *a)* de XVI e de $L_n/B_n\longrightarrow 0$. Concluimos que se verifica *c')* de XVI. Assim o teorema de LIAPOUNOV permite terminar a nossa demonstração.

Observação: A condição de XVI' é satisfeita, em particular, quando $B_n\uparrow\infty$, $L_n\equiv L<+\infty$ e $\mathsf{P}(|X_n|>L)=0$ para qualquer n, significando a última relação que as variáveis X_n são uniformemente limitadas.

Segue outra aplicação do teorema XV.

Suponhamos que a sucessão das constantes B_n de XV forma um infinitamente grande de ordem não inferior à de $+n^{1/2}$, por outras palavras, que $+n^{1/2}/B_n$ é limitado (em relação a n) e suponhamos mais que, dado $\eta>0$ arbitrário, correspondem grandezas $a_n(\eta)$ e $b_n(\eta)\geqq a_n(\eta)$ tais que

$$7) \qquad \sup\,[\,|a_n(\eta)|\,,|\,b_n(\eta)|\,]\,/\,B_n \longrightarrow 0\,,\ \text{quando } n\uparrow\infty,\ \text{e}$$

$$\sup_n \int_{b_n(\eta)<x<a_n(\eta)} x^2\, dF_n(x+E_n) \leqq \eta\,,$$

para todo o n suficientemente grande, isto é, tais que os quadrados dos desvios $X_n - E_n$ ficam *uniformemente integráveis de ordem menor que a de* B_n.(*) Então, seja qual for $u>0$, sai, sempre para todo o n suficientemente grande,

$$\frac{1}{B_n^2}\cdot\sum_k \int_{|x|>uB_n} x^2\, dF_k(x+E_k) \leqq \frac{1}{B_n^2}\cdot n\,\cdot$$

$$\cdot\ \sup_k \int_{|x|>uB_n} x^2\, dF_k(x+E_k) \leqq \eta\,,$$

de modo que se verifica a *relação de* LINDEBERG.

O que acabamos de expor justifica a proposição seguinte:

XVII) «Para que as somas de b) de XV tenham parcelas (fortemente) infinitesimais e para que as leis dessas somas tendam (fracamente) para a lei de GAUSS de variância unitária e de esperança matemática nula, é condição suficiente que a sucessão das grandezas $V_1+V_2+\cdots+V_n$ forme um infinitamente grande de ordem pelo menos igual à de n e, além disso, que os quadrados dos desvios das variáveis X_n sejam uniformemente integráveis de ordem menor que a de $+(V_1+V_2+\cdots+V_n)^{1/2}$.»

(*) Aqui convém, de certeza, qualquer ordem inferior à de $+n^{1/2}$ e, possivelmente, alguma ordem não inferior à de $+n^{1/2}$.

A condição suficiente de XVII encontra-se satisfeita, quando as grandezas $V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ são de ordem não inferior à de n e, além disso, dado qualquer $\eta > 0$, a relação 7) é satisfeita com $\sup[|a_n(\eta)|, |b_n(\eta)|]$ limitado (em relação a n), significando esta última restrição que os quadrados dos desvios $X_n - E_n$ ficam *uniformemente integráveis* no sentido corrente. A situação que acabamos de descrever apresenta-se, em particular, quando as variáveis (próprias) X_n são idênticamente distribuidas.

Podemos resumir as nossas conclusões sob a forma do *corolário* seguinte:

XVII') «Para que as variáveis casuais próprias independentes X_n de XV satisfaçam à *relação de* LINDEBERG, é condição suficiente que a sucessão das grandezas $V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ forme um infinitamente grande de ordem não inferior à de n e, além disso, que os quadrados dos desvios $X_n - E_n$ sejam uniformemente integráveis. Em particular, é condição suficiente que as variáveis X_n sejam idênticamente distribuidas.»

Exemplo: Consideremos a sucessão das variáveis casuais X_n, próprias, independentes, contínuas e idênticamente distribuidas, cuja função de distribuição (comum) é $F(x) = 0$ ou x ou 1, conforme $x \leqq 0$ ou $0 \leqq x \leqq 1$ ou $x \geqq 1$.(*) Sendo E a esperança matemática e V a variância de qualquer termo da sucessão casual considerada, vimos no exemplo 7.º de § 8 de A que $E = 1/2$ e que $V = 1/12$, pelo que a relação *a)* de XV dá $B_n = +(n/12)^{1/2}$. Concluimos que as somas $2 \cdot (+3^{1/2}) \cdot \sum_{1 \leqq k \leqq n} [(X_k - 1/2)/(+n^{1/2})]$ ficam com parcelas (fortemente) infinitesimais e tendem (fracamente) para a variável casual da lei de GAUSS de variância unitária e de esperança matemática nula. Este resultado tem certa importância nalguns problemas estatísticos (VAN DER WAERDEN).

(*) A lei correspondente à função de distribuição $F(x)$ aqui considerada é um caso particular da chamada *lei rectangular ou uniforme*.

A convergência de leis de somas de variáveis casuais independentes para uma lei de GAUSS é um assunto extremamente batido, isso por vários motivos: *históricos*, porque foi o primeiro tipo de convergência para uma lei não necessàriamente imprópria que se considerou; *teóricos*, visto que a análise envolvida, já por si bastante interessante, se repercute noutros domínios; *práticos*, dada a elevada frequência e a enorme importância da lei limite nas aplicações mais diversas. Aqui tratou-se a questão com toda a generalidade e referiram-se os seus aspectos particulares julgados mais relevantes.

§ 10) Convergência para uma lei de POISSON

Caso geral. Vimos no exemplo 3.º de § 8 de A que, sendo $\lambda>0$, H e h três constantes e fazendo a convenção que $\mathsf{P}(\ldots)$ significa a probabilidade do acontecimento contido dentro do parêntesis, então as igualdades

$$\mathsf{P}(X=H+lh)=\lambda^l e^{-\lambda}/l!\,(l=0,1,2,\ldots)$$

definem uma variável casual X que segue a lei de POISSON de esperança matemática $H+\lambda h$ e de variância λh^2 e que se apresenta própria ou imprópria, conforme $h\neq 0$ ou $h=0$. Depois vimos, no exemplo 3.º de § 11 de A, que as representações de LÉVY e KHINTCHINE, de LÉVY modificada e de KOLMOGOROV da lei mencionada são caracterizadas como segue:

Na primeira tem-se $a=H+\lambda h/(1+h^2)$ e $G(u)=0$ ou $\lambda h^2/(1+h^2)$, conforme $u\leqq h$ ou $u>h$. Na segunda saem $b=0$ e $a(U)=H$ ou $H+\lambda h$, conforme $U<|h|$ ou $U>|h|$; se $h\geqq 0$, é $M(u)\equiv 0$ e $N(u)=\lambda$ ou 0, conforme $u<h$ ou $u\geqq h$; se $h\leqq 0$, é $M(u)=0$ ou λ, conforme $u\leqq h$ ou $u>h$, e $N(u)\equiv 0$. Na terceira é $\alpha=H+\lambda h$ e é $C(u)=0$ ou λh^2, conforme $u\leqq h$ ou $u>h$.

Consideremos agora, como usualmente, sucessões duplas de variáveis casuais X_{nk}, com $1\leqq k\leqq k_n$ e $k_n\longrightarrow\infty$, quando $n\uparrow\infty$. Então, o que precede, III de § 3 e II de § 5 permitem estabelecer a proposição seguinte, a que podemos chamar *teorema principal relativo à convergência para uma lei de* POISSON *(própria)*:

I) «São dadas as variáveis casuais X_{nk}, independentes por linhas, tendo as funções de distribuição $F_{nk}(x)$ e admitindo as constantes assintóticas A_{nk}. Para que seja possível determinar constantes S_n que tornem as leis das somas

$$a) \qquad X_n = X_{n1} + X_{n2} + \cdots + X_{nk_n} - S_n$$

(fracamente) convergentes para uma lei de POISSON *própria, é condição necessária e suficiente* que existam duas constantes, $h \neq 0$ e $\lambda > 0$, tais que se verificam simultâneamente as três relações seguintes:

$$b_1) \qquad \lim_{n \uparrow \infty} \sum_{1 \leqq k \leqq k_n} \int_{|x| \geqq \delta, |x-h| \geqq \delta} dF_{nk}(x + A_{nk}) = 0,$$

para *todo* o δ positivo,

$$b_2) \qquad \lim_{n \uparrow \infty} \sum_{1 \leqq k \leqq k_n} \int_{|x-h| < \varepsilon} dF_{nk}(x + A_{nk}) = \lambda,$$

para *algum* ε positivo e menor que $|h|$, e

$$b_3) \qquad \lim_{n \uparrow \infty} \sum_{1 \leqq k \leqq k_n} \left\{ \int_{|x| < \zeta} x^2 \, dF_{nk}(x + A_{nk}) - \left[\int_{|x| < \zeta} x \, dF_{nk}(x + A_{nk}) \right]^2 \right\} = 0,$$

para *algum* ζ positivo e menor que $|h|$.(*)

Caso as relações b_1) a b_3) se encontrem satisfeitas, o conjunto das constantes S_n admissíveis é dado pela fórmula

$$c) \qquad S_n = \sum_{1 \leqq k \leqq k_n} \left[A_{nk} + \int_{|x| \leqq U} x \, dF_{nk}(x + A_{nk}) \right] - a_n(U),$$

(*) É fácil deduzir da relação b_1) que os limites de b_1) a b_3) são os mesmos, quer ponhamos as desigualdades $\geqslant \delta$, $< \varepsilon$ e $< \zeta$ quer ponhamos $> \delta$, $\leqslant \varepsilon$ e $\leqslant \zeta$.

onde $U>0$ é arbitrário, contanto que $U \neq |h|$, e onde $a_n(U)$ significa o termo geral duma sucessão (real) convergente arbitrária.

O limite da sucessão $a_n(U)$ escolhida é a esperança matemática da lei limite ou esta esperança diminuida de λh, conforme se tenha tomado $U>|h|$ ou $U<|h|$. A variância da lei limite é a constante λh^2.

Quando se pretende não só que as somas X_n tenham as propriedades expostas, mas também que seja possível tomar $S_n \equiv 0$, a condição necessária e suficiente supracitada vem acrescida da imposição que, uma vez escolhidas as grandezas U e A_{nk}, os somatórios do segundo membro de *c)* devem formar uma sucessão convergente.

Finalmente, caso as relações $b_1)$ a $b_3)$ ocorram para um certo ε e um certo ζ, ambos positivos e menores que $|h|$, e para uma certa sucessão de constantes assintóticas A_{nk} das variáveis X_{nk}, as mesmas relações têm lugar para todas as grandezas ε, ζ e A_{nk} análogas.»

Se fizermos $h=1$, $H=0$, $A_{nk} \equiv 0$, $S_n \equiv 0$ e $U<|h|$ em *I*, obtemos um caso particular interessante (e frequente nas aplicações), o qual corresponde ao *teorema de* GNEDENKO *e* MARCINKIEWICZ.

Observação: Atendendo a I, 4) e 2) de § 4, podemos afirmar que a hipótese $h<0$ implica que o conjunto das duas relações $b_1)$ e $b_2)$ de I sai equivalente ao conjunto das duas relações

$$b'_1) \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \prod_{1\leq k\leq k_n} [1-F_{nk}(u+A_{nk})]=1 \quad \text{ou} \quad e^{-\lambda},$$

conforme $u<h$ ou $h<u<0$, e

$$b'_2) \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \prod_{1\leq k\leq k_n} F_{nk}(u+A_{nk})=1,$$

para $0<u$. Analogamente concluimos que a hipótese $h>0$ implica que o conjunto das duas relações $b_1)$ e $b_2)$ de I sai equivalente ao conjunto das duas relações

$$b''_1) \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \prod_{1\leq k\leq k_n} [1-F_{nk}(u+A_{nk})]=1,$$

para $u<0$, e

$$b_2'') \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \prod_{1\leq k\leq k_n} F_{nk}(u+A_{nk})=e^{-\lambda} \quad \text{ou} \quad 1,$$

conforme $0<u<h$ ou $u>h$.

Outra observação: A proposição I pode aplicar-se a qualquer subsucessão (infinita) de somas X_n. Em particular, se conservarmos $b_1)$ e $b_3)$ de I e se pedirmos que a sucessão dos somatórios de $b_2)$ de I se reparta por subsucessões convergentes para limites positivos, fica uma condição necessária e suficiente para que existam constantes S_n que permitem repartir a sucessão das leis das somas X_n por subsucessões convergentes para leis de Poisson próprias de parâmetro h comum.

Seguindo o processo usado na demonstração de II de § 9, podemos estabelecer *outro teorema de convergência para uma lei de Poisson (própria):*

II) «Quando e só quando as constantes assintóticas A_{nk} de I forem tais que se verifica a igualdade

$$a) \quad \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq k_n} \left[\int_{|x|<\zeta} x\,dF_{nk}(x+A_{nk})\right]^2=0, \text{ para } \textit{algum } \zeta>0,$$

então a condição necessária e suficiente do teorema principal I não só fica com as partes $b_1)$ e $b_2)$ inalteradas e com a parte $b_3)$ privada da parcela subtractiva do somatório, como também sai equivalente ao conjunto das duas relações

$$b_1') \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq k_n} \int_{|x-h|\geq\delta} \frac{x^2}{1+x^2}\,dF_{nk}(x+A_{nk})=0,$$

para *todo* o $\delta>0$, e

$$b_2') \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq k_n} \int_{|x-h|<\varepsilon} \frac{x^2}{1+x^2}\,dF_{nk}(x+A_{nk}) = \frac{\lambda h^2}{1+h^2},$$

para *algum* $\varepsilon>0$ (e, portanto, para *qualquer* $\varepsilon>0$).

Desde que as relações *a)*, *b'_1)* e *b'_2)* se encontrem satisfeitas, a constante λh^2 resulta igual à variância (comum) das leis limite possíveis e as constantes S_n admissíveis podem definir-se por qualquer das fórmulas competentes.»

Observação: Podem obter-se constantes assintóticas A_{nk} que permitam usar a condição necessária e suficiente de II, procedendo do modo indicado na observação a II de § 9 ou então recorrendo à relação *a)* de I' de § 5, isto é, escolhendo um par fixo de números γ' e γ'', com $0<\gamma'\leqq\gamma''<1$, e impondo, para todo o n suficientemente grande e uniformemente em k, a desigualdade

$$\chi_{nk}^{(\gamma')}-\eta'_{nk}\leqq A_{nk}\leqq\chi_{nk}^{(\gamma'')}+\eta''_{nk},$$

onde η'_{nk} e η''_{nk} significam números não-negativos que satisfazem à relação

$$\lim_{n\uparrow\infty}\sum_{1\leqq k\leqq k_n}\eta'^2_{nk}=0=\lim_{n\uparrow\infty}\sum_{1\leqq k\leqq k_n}\eta''^2_{nk}.$$

* * *

Caso particular das variáveis casuais com variâncias. Suponhamos que as variáveis casuais X_{nk} são integráveis e que admitem as suas esperanças matemáticas E_{nk} como constantes assintóticas. Então, podemos fazer $A_{nk}=E_{nk}$ e aplicar o teorema principal de convergência para uma lei de Poisson (própria) ou, caso as esperanças matemáticas o consintam, o teorema de convergência II.

Indo agora mais longe nas hipóteses, passamos a supor que as variáveis X_{nk} têm variâncias. Nesta conformidade o teorema de convergência de Gnedenko e Bawly (IV de § 5) permite estabelecer a proposição seguinte:

III) «São dadas as variáveis casuais X_{nk}, independentes por linhas, tendo as funções de distribuição $F_{nk}(x)$, dotadas de variâncias V_{nk} e assintòticamente constantes com respeito às suas esperanças matemáticas E_{nk}. Afim de que possam determinar-se constantes S_n tais que as leis das somas

a) $$X_n=X_{n1}+X_{n2}+\cdots+X_{nk_n}-S_n$$

sejam (fracamente) convergentes para uma lei de Poisson própria e, além disso, as variâncias e as esperanças matemáticas das variáveis X_n tendam, respectivamente, para a variância e a esperança matemática da lei limite, *é condição necessária e suficiente* que existam duas constantes, $h \neq 0$ e $\lambda > 0$, tais que se verificam simultâneamente as duas relações seguintes:

$$b_1) \qquad \lim_{n \uparrow \infty} \sum_{1 \leq k \leq k_n} \int_{|x-h| \geq \delta} x^2 \, dF_{nk}(x+E_{nk}) = 0,$$

com qualquer $\delta > 0$, e mais

$$b_2) \qquad \lim_{n \uparrow \infty} \sum_{1 \leq k \leq k_n} \int_{|x-h| < \varepsilon} x^2 \, dF_{nk}(x+E_{nk}) = \lambda h^2,$$

com *algum* $\varepsilon > 0$ (e, portanto, com *qualquer* $\varepsilon > 0$).

Caso as relações $b_1)$ e $b_2)$ se encontrem satisfeitas, o conjunto das constantes S_n admissíveis é dado pela fórmula

$$c) \qquad S_n = E_{n1} + E_{n2} + \cdots + E_{nk_n} - \alpha_n,$$

onde α_n representa o termo geral duma sucessão (real) convergente arbitrária.

O limite da sucessão α_n escolhida e a constante λh^2 são, respectivamente, a esperança matemática e a variância da lei limite.

Quando se pretende não só que as somas X_n tenham as propriedades expostas, mas também que seja possível tomar $S_n \equiv 0$, a condição necessária e suficiente é a anterior acrescida da imposição que as somas $E_{n1} + E_{n2} + \cdots + E_{nk_n}$ devem formar uma sucessão convergente.»

Se pusermos $h=1$ e $H=0$ na proposição III, ela transforma-se num *teorema de Gnedenko* bem conhecido.

Exemplo: Suponhamos que a todo o número natural n corresponde uma variável casual X_n que satisfaz à igualdade $X_n = X_{n1} + X_{n2} + \cdots + X_{nn}$, onde as parcelas X_{nk} são variáveis casuais independentes e idênticamente distribuidas tais que qualquer delas pode tomar apenas os dois valores 1 e 0, o primeiro com a probabilidade p_n e o outro com a probabilidade $q_n = 1 - p_n$ (compare-se com o exemplo 2.º de § 8 de A). Tendo em conta que $E_{nk} = p_n$, para todo o k de 1 a n, vamos introduzir a *hipótese adicional* que existe um número positivo n_0 tal que se verifica, para todo o $n > n_0$, a igualdade $E_{n1} + E_{n2} + \cdots + E_{nn} = n\,p_n = \lambda > 0$, onde λ é independente de n. Então, como $n > n_0$ dá

$$\sup_{1 \leq k \leq n} V_{nk} = p_n q_n = (\lambda/n)(1 - \lambda/n) \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad \sum_{1 \leq k \leq n} V_{nk} = \lambda \cdot (1 - \lambda/n) \longrightarrow \lambda$$

e como, escolhido $\delta > 0$, sai, para $n > \sup[n_0, (\lambda/\delta)]$, a relação

$$\sum_{1 \leq k \leq n} \int_{|x-1| \geqq \delta} x^2\, dF_{nk}(x + E_{nk}) = (\lambda^2/n)(1 - \lambda/n) \longrightarrow 0,$$

basta recordar a observação a III de § 5 e pôr $\alpha_n \equiv \lambda$ ou $S_n \equiv 0$ em III de § 10 para concluir que as leis das somas X_n convergem para uma lei de Poisson tal que $h = 1$, $H = 0$ e λ é a constante do texto. Este resultado já era familiar aos probabilistas clássicos.

Uma proposição concebida no estilo de X de § 9 é a seguinte:

IV) «Se impusermos às variáveis casuais X_{nk} de III a restrição adicional

$$V_{n1} + V_{n2} + \cdots + V_{nk_n} \leqq W < +\infty, \text{ seja qual for } n,$$

e se retirarmos do enunciado de III o pedido que as variâncias das somas X_n tendam para a variância da lei limite, então fica a condição necessária e suficiente que existam duas constantes, $h \neq 0$ e $\lambda > 0$, tais que se verificam simultâneamente as duas relações seguintes:

$$b_1) \qquad \lim_{n \uparrow \infty} \sum_{1 \leq k \leq k_n} \int_{u < |x-h| < v} x^2\, dF_{nk}(x + E_{nk}) = 0,$$

para qualquer par de números positivos u e $v>u$, e mais

$$b_2) \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq k_n} \int_{|x-h|<\varepsilon} x^2\, dF_{nk}(x+E_{nk}) = \lambda\, h^2,$$

para *algum* $\varepsilon>0$ (e, portanto, para *qualquer* $\varepsilon>0$).

Depois o enunciado fecha com as mesmas palavras da parte final de III.»

A proposição IV é uma consequência imediata de V de § 5.

Observação: As proposições III e IV podem aplicar-se a qualquer subsucessão (infinita) de somas X_n. Em particular, se conservarmos $b_1)$ de IV (ou de III) e se pedirmos que a sucessão dos somatórios de $b_2)$ de IV (ou de III) se reparta por subsucessões convergentes para limites positivos, resulta uma condição necessária e suficiente para que existam constantes S_n que permitem repartir a sucessão das leis das somas X_n por subsucessões tais que cada uma delas tende para uma lei de Poisson própria de parâmetro h e, além disso, tem esperanças matemáticas (ou variâncias e esperanças matemáticas) convergentes para a esperança matemática (ou para a variância e a esperança matemática) da lei limite correspondente.

* * *

A lei de Poisson não é lei de Lévy. Terminamos o parágrafo com uma proposição que é mera transcrição dum resultado referido no texto a seguir à observação a VIII'' de § 6. Ei-la:

V) «Dadas as variáveis casuais independentes X_n $(n=1,2,\ldots)$, é impossível existirem constantes $B_n>0$ e S_n tais que as somas $X_1/B_n+X_2/B_n+\cdots+X_n/B_n-S_n$ tenham simultâneamente parcelas assintòticamente constantes e leis (fracamente) convergentes para uma lei de Poisson própria.»

§ 11) Convergência para uma lei de Cauchy

Caso geral. Vimos no exemplo 6.º de § 8 de A que, sendo h e $H>0$ duas constantes, a função

$$F(x)=(1/\pi)\cdot[\pi/2+\operatorname{arc} tg(x-h)/H] \tag{1}$$

é a função de distribuição da *lei de Cauchy de parâmetros h* e *H*, a qual não tem esperança matemática (nem variância). Depois vimos, no exemplo 4.º de § 11 de A, que a representação de Lévy e Khintchine e a de Lévy modificada correspondentes a 1) são caracterizadas como segue:

Na primeira tem-se $a=h$ e $G(u)=(H/\pi)\cdot(\operatorname{arc} tg\, u+\pi/2)$. Na outra saem $b=0$ e $a(U)=h$, seja qual for $U>0$; além disso, $M(u)=-H/(\pi u)$, para $u<0$, e $N(u)=H/(\pi u)$, para $u>0$.

Posto isso, consideremos, como usualmente, sucessões duplas de variáveis casuais X_{nk}, com $1\leqq k\leqq k_n$ e $k_n\longrightarrow\infty$, quando $n\uparrow\infty$. Então, o que precede e III de § 3 permitem estabelecer a proposição seguinte, a que podemos chamar *teorema principal relativo à convergência para uma lei de Cauchy:*

I) «São dadas as variáveis casuais X_{nk}, independentes por linhas, tendo as funções de distribuição $F_{nk}(x)$ e admitindo as constantes assintóticas A_{nk}. Para que seja possível determinar constantes S_n que tornem as leis das somas

$$X_n=X_{n1}+X_{n2}+\cdots+X_{nk_n}-S_n \tag{a}$$

(fracamente) convergentes para uma *lei de Cauchy, é condição necessária e suficiente* que exista uma constante $H>0$ tal que se verificam simultâneamente as duas relações seguintes:

$$b_1)\quad \lim_{n\uparrow\infty}\sum_{1\leqq k\leqq k_n} F_{nk}(-u+A_{nk})=\frac{H}{\pi u}=\lim_{n\uparrow\infty}\sum_{1\leqq k\leqq k_n}[1-F_{nk}(u+A_{nk})],$$

com qualquer $u>0$, e

$$b_2)\quad \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\lim_{n\uparrow\infty}\max\sum_{1\leqq k\leqq k_n}\left\{\int_{|x|<\varepsilon} x^2\,dF_{nk}(x+A_{nk})-\left[\int_{|x|<\varepsilon} x\,dF_{nk}(x+A_{nk})\right]^2\right\}=0.$$

Caso as relações $b_1)$ e $b_2)$ se encontrem satisfeitas, o conjunto das constantes S_n admissíveis é dado pela fórmula

$$c) \qquad S_n = \sum_{1 \leq k \leq k_n} \left[A_{nk} + \int_{|x| \leq U} x \, dF_{nk}(x + A_{nk}) \right] - a_n(U),$$

onde $U > 0$ é arbitrário e onde $a_n(U)$ significa o termo geral duma sucessão (real) convergente arbitrária.

A constante H e o limite h da sucessão $a_n(U)$ são os parâmetros da lei limite.

Quando se pretende não só que as somas X_n tenham as propriedades expostas, mas também que seja possível fazer $S_n = 0$, a condição necessária e suficiente supracitada vem acrescida da imposição que, uma vez escolhidas as grandezas U e A_{nk}, os somatórios do segundo membro de $c)$ devem formar uma sucessão convergente.

Finalmente, caso as relações $b_1)$ e $b_2)$ ocorram para uma certa sucessão de constantes assintóticas A_{nk} das variáveis X_{nk}, as mesmas relações têm lugar para qualquer outra sucessão de tais constantes.»

A proposição I aplica-se òbviamente a qualquer subsucessão (infinita) de somas X_n.

Observação: Atendendo a I, 4) e 2) de § 4, podemos afirmar que $b_1)$ de I é equivalente à relação

$$b_1') \qquad \begin{aligned} &\lim_{n\uparrow\infty} \prod_{1 \leq k \leq k_n} [1 - F_{nk}(-u + A_{nk})] = e^{-H/(\pi u)} = \\ &= \lim_{n\uparrow\infty} \prod_{1 \leq k \leq k_n} F_{nk}(u + A_{nk}), \end{aligned}$$

válida para qualquer $u > 0$.

Recordando agora I de § 5, podemos estabelecer *outro teorema de convergência para uma lei de* CAUCHY:

II) «Quando e só quando as constantes assintóticas A_{nk} de I forem tais que se verifica a igualdade

$$a) \qquad \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \lim_{n\uparrow\infty} \max \sum_{1 \leq k \leq k_n} \left[\int_{|x| < \varepsilon} x \, dF_{nk}(x + A_{nk}) \right]^2 = 0$$

então a condição necessária e suficiente do teorema principal I não só fica com a parte $b_1)$ inalterada e com a parte $b_2)$ privada da parcela subtractiva do somatório, como também sai equivalente à relação

$$b)\ \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq k_n} \int_{-\infty}^{u} \frac{x^2}{1+x^2}\, dF_{nk}(x+A_{nk}) = \frac{H}{\pi}\cdot\left(\operatorname{arc} tg\, u + \frac{\pi}{2}\right),$$

válida para qualquer u, finito ou infinito.

Desde que as relações *a)* e *b)* se encontrem satisfeitas, a constante $H>0$ constitui-se em parâmetro comum a todas as leis limites possíveis, as constantes S_n admissíveis podem definir-se pelas fórmulas competentes e, se fixarmos a sucessão convergente arbitrária de qualquer dessas fórmulas, ela tenderá para o parâmetro h da lei limite correspondente.»

Observação: Podem obter-se constantes assintóticas A_{nk} que permitam usar a condição necessária e suficiente de II, procedendo de qualquer dos modos indicados na observação a II de § 10.

Exemplo: Consideremos a sucessão dupla das variáveis casuais $X_{nk}(n=2,3,\ldots;\ k=1,2,\ldots,2n)$, independentes por linhas e tendo as funções de distribuição

$$F_{nk}(x)=(1/\pi)\cdot[\pi/2+\operatorname{arc} tg\,(n^2 x/k)].$$

Então, uma versão simplificada dos cálculos apresentados no segundo exemplo relativo ao teorema I de § 3 mostra que as variáveis consideradas são infinitesimais e que existem constantes S_n tais que as leis das somas X_n de *a)* de I tendem para uma lei de Cauchy de parâmetro $H=2$. Talvez valha a pena observar que o nosso exemplo também pode ser resolvido cómodamente com o auxílio das funções características das variáveis X_{nk}, funções essas que foram deduzidas no exemplo 6.º de § 8 de A.

Caso particular das variáveis casuais $X_{nk}=X_k/B_n$ e transformação de sucessões simples em sucessões duplas convergentes para uma lei de CAUCHY. O estudo que acabamos de fazer adapta-se fàcilmente a variáveis casuais $X_{nk}=X_k/B_n$, com $1 \leqq k \leqq n$ e $B_n > 0$, usando, para o efeito, as correspondências apresentadas em B, § 8, texto antes de I e observação depois de III. A adaptação referida leva a variantes dos teoremas de convergência I e II que não merece a pena enunciar.

Passamos agora a considerar o problema tratado em § 7 no caso particular de se procurarem leis limite de CAUCHY.

Antes de mais nada, basta invocar I e I' de § 7, recordar que toda a lei limite de somas de variáveis casuais independentes é definida a menos duma constante de translacção arbitrária $a(U)$, a qual é o parâmetro h no caso da lei de CAUCHY, e ter em conta que, multiplicando uma variável casual que segue uma lei de CAUCHY por uma constante (positiva), o efeito é multiplicar o parâmetro H da lei pela mesma constante (ver 1), por exemplo), basta isso para concluirmos que vale a proposição seguinte:

III) «Suponhamos que são dadas as variáveis casuais independentes $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ e que existem constantes $B_n > 0$ e S_n tais que as somas

$$a) \qquad Y_n = X_1/B_n + X_2/B_n + \cdots + X_n/B_n - S_n$$

ficam com parcelas assintòticamente constantes e com leis (fracamente) convergentes para uma lei de CAUCHY.

Então, as leis limite próprias que podem obter-se, fazendo variar as constantes $B_n > 0$ e S_n de *a)*, *são todas as leis de CAUCHY e só essas* e a cada uma delas correspondem somas Y_n que saem de parcelas assintòticamente constantes.»

Posto isso, vamos adaptar X de § 7 ao nosso caso. Resulta a proposição seguinte:

IV) «Dadas as variáveis casuais próprias independentes $X_n (n=1, 2, \ldots)$, com as funções de distribuição $F_n(x)$, podem encontrar-se constantes $B_n > 0$ e S_n que tornem as parcelas das somas

$$a) \qquad X_1/B_n + X_2/B_n + \cdots + X_n/B_n - S_n$$

assintòticamente constantes e que tornem as leis dessas somas (fracamente) convergentes para uma lei de CAUCHY, *quando e só quando* ocorrem simultâneamente as condições seguintes:

1.ª—Fazendo

$$\mathcal{F}_n(x) = 1 - \int_R F_n(y - x + 0)\, dF_n(y)$$

e tomando um par qualquer de números positivos c^2 e H, tem-se

$$b) \qquad \sum_{1 \leqq k \leqq n} \int_R \frac{x^2}{c^2 + x^2}\, d\,\mathcal{F}_k(x) \uparrow \infty, \text{ quando } n \uparrow \infty,$$

e as constantes positivas β_n (unìvocamente) determinadas pelas igualdades

$$c) \qquad \sum_{1 \leqq k \leqq n} \int_R \frac{x^2}{\beta_n^2 + x^2}\, d\,\mathcal{F}_k(x) = 2\,H, \text{ para } n \geqq n_{2H},$$

são tais que

$$d) \qquad \beta_{n+1}/\beta_n \longrightarrow 1, \text{ quando } n \uparrow \infty,$$

e que existem constantes A_n que impõem a igualdade

$$e) \qquad \lim_{n \uparrow \infty} \sup_{1 \leqq k \leqq n} \int_R \frac{x^2}{\beta_n^2 + x^2}\, dF_k(x + A_k) = 0.$$

2.ª—Verificam-se conjuntamente as relações

$$f_1) \quad \lim_{n \uparrow \infty} \sum_{1 \leqq k \leqq n} F_k(-\beta_n u + A_k) = \frac{H}{\pi\, u} = \lim_{n \uparrow \infty} \sum_{1 \leqq k \leqq n} [1 - F_k(\beta_n u + A_k)],$$

para qualquer $u>0$,(*) e

$$f_2)\qquad \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\lim_{n\uparrow\infty}\max\left(\frac{1}{\beta_n^2}\cdot\sum_{1\leqq k\leqq n}\left\{\int_{|x|<\beta_n\varepsilon}x^2\,dF_k(x+A_k)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left[\int_{|x|<\beta_n\varepsilon}x\,dF_k(x+A_k)\right]^2\right\}\right)=0.$$

Desde que as condições 1.ª e 2.ª se encontrem satisfeitas, as constantes β_n podem fazer as vezes das constantes B_n e as constantes S_n admissíveis correspondentes—que vamos representar por σ_n — são as dadas pela fórmula

$$g)\qquad \sigma_n=\frac{1}{\beta_n}\cdot\sum_{1\leqq k\leqq n}\left[A_k+\int_{|x|\leqq U\beta_n}x\,dF_k(x+A_k)\right]-a_n(U),$$

onde $U>0$ é arbitrário e onde $a_n(U)$ é o termo geral duma sucessão (real) convergente arbitrária.

A constante H e o limite h da sucessão $a_n(U)$ são os parâmetros da lei limite.

Supondo asseguradas as relações *b)* a *f_2)*, as grandezas A_k/β_n saem constantes assintóticas (das variáveis casuais X_k/β_n) e as relações *f_1)* a *g)* não ficam prejudicadas se nelas substituirmos aquelas grandezas por quaisquer outras constantes assintóticas com a mesma forma.»

Observação: O enunciado de IV pode ampliar-se, acrescentando a condição para que seja admissível fazer $\sigma_n=0$.

Recordando agora I de § 5, podemos estabelecer a proposição seguinte, homóloga de II:

V) «Quando e só quando as constantes assintóticas A_k/β_n das variáveis casuais X_k/β_n de IV forem tais que se

---

(*) A relação f_1) é equivalente a

$$f_1')\qquad \lim_{n\uparrow\infty}\prod_{1\leqq k\leqq n}[1-F_k(-u\beta_n+A_k)]=e^{-H/(\pi u)}=\lim_{n\uparrow\infty}\prod_{1\leqq k\leqq n}F_k(u\beta_n+A_k),$$

para qualquer $u>0$.

verifica a igualdade

$$a)\quad \lim_{\varepsilon} \lim_{n\uparrow\infty} \max \left\{ \frac{1}{\beta_n^2} \cdot \sum_{1\leq k\leq n} \left[\int_{|x|<\varepsilon\beta_n} x\, dF_k(x+A_k) \right]^2 \right\} = 0,$$

então a condição necessária e suficiente do teorema IV não só fica com as partes *b)* a *f_1)* inalteradas e com a parte *f_2)* privada da parcela subtractiva do somatório, como também sai equivalente ao conjunto das relações *b)* a *e)* acrescido da relação

$$f)\quad \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq n} \int_{-\infty}^{u\beta_n} \frac{x^2}{\beta_n^2+x^2}\, dF_k(x+A_k) = \frac{H}{\pi} \cdot \left(\operatorname{arc} tg\, u + \frac{\pi}{2} \right),$$

válida para qualquer u, finito ou infinito.

Desde que a condição necessária e suficiente aqui referida se encontre satisfeita para certas constantes β_n, estas podem fazer as vezes das constantes B_n e as variáveis X_k/β_n correspondentes sujeitam-se à parte final do enunciado de II».

Observação: Podem obter-se constantes assintóticas A_k/β_n que permitam usar a condição necessária e suficiente de V, procedendo do modo indicado em 19) e 19') de § 7 ou então procedendo do modo indicado na observação a V de § 9.(*)

Fechamos este sector de § 11, notando o seguinte: Caso se verifique *b)* de IV, então existe uma subsucessão (infinita) β_m, extraída da sucessão das constantes β_n determinadas por *c)* de IV, que satisfaz a *e)*, *f_1)* e *f_2)* de IV, quando e só quando é possível determinar constantes σ_m tais que as somas $X_1/\beta_m + X_2/\beta_m + \cdots + X_m/\beta_m - \sigma_m$ ficam com parcelas assintòticamente constantes e com leis convergentes para uma lei de Cauchy cujo parâmetro de escala é H.

* * *

A lei de Cauchy não pode ser lei limite de somas de variâncias limitadas. Terminamos o parágrafo com uma proposição que

(*) Onde deve ler-se β_n em lugar de B_n.

é mera transcrição dum resultado alcançado no texto a seguir à demonstração de III' de § 5. Ei-la:

VI) «Dadas as variáveis casuais X_{nk}, independentes por linhas, dotadas de variâncias V_{nk}, assintòticamente constantes com respeito às suas esperanças matemáticas e sujeitas à restrição

$$V_{n1}+V_{n2}+\cdots+V_{nk_n}\leqq W<+\infty, \text{ seja qual for } n,$$

é impossível existirem constantes S_n tais que as leis das somas

$$X_{n1}+X_{n2}+\cdots+X_{nk_n}-S_n$$

saiam (fracamente) convergentes para uma lei de CAUCHY.»

§ 12) Convergência para uma lei gama

Definição e primeiras propriedades das leis gama. Consideremos um número positivo σ e designemos por $I(\sigma)$ o maior inteiro nele contido. Então, existe e é finito(*)

$$\int_{0<x<+\infty} x^{\sigma-1}e^{-x}\,dx\leqq\int_{0<x<1} x^{\sigma-1}\,dx+[I(\sigma)+1]!\,\cdot$$

$$\cdot\int_{1\leqq x<+\infty} x^{\sigma-I(\sigma)-2}\,dx=1/\sigma+[I(\sigma)+1]!/[I(\sigma)+1-\sigma].$$

O que acabamos de expor mostra que podemos fazer corresponder a todo o número finito $\sigma>0$ outro número $\Gamma(\sigma)$, finito e positivo, definido pela igualdade

$$\Gamma(\sigma)=\int_{0<x<+\infty} x^{\sigma-1}e^{-x}\,dx. \qquad 1)$$

(*) Os integrais de LEBESGUE do texto podem ser interpretados como integrais de RIEMANN, mesmo que se tenha $\sigma<1$ [compare-se com A, I e corolários de § 5].

Se pusermos $\sigma=1$ em 1), sai

1') $$\Gamma(1)=1;$$

doutro lado, a substituição $x=y^2/2$ dá

$$\int_{0<x<+\infty} x^{-1/2}\, e^{-x}\, dx = +2^{1/2} \cdot \int_{0<y<+\infty} e^{-y^2/2}\, dy = +2^{-1/2} \cdot \int_{-\infty<y<+\infty} e^{-y^2/2}\, dy = +\pi^{1/2}$$

[exemplo 4.º de § 8 de A], de modo que resulta de 1) a fórmula

1'') $$\Gamma(1/2) = +\pi^{1/2}.$$

Supondo $\sigma>1$, o método da integração por partes dá a relação

$$\int_{0<x<+\infty} x^{\sigma-1}\, e^{-x}\, dx = (\sigma-1) \cdot \int_{0<x<+\infty} x^{\sigma-2}\, e^{-x}\, dx,$$

a qual é equivalente à fórmula de recorrência

2) $$\Gamma(\sigma) = (\sigma-1) \cdot \Gamma(\sigma-1),$$

cuja aplicação iterada conduz a

3) $$\Gamma(\sigma) = (\sigma-1) \cdot (\sigma-2) \cdots \sigma_0 \cdot \Gamma(\sigma_0),$$

onde σ_0 significa o número positivo e não superior a 1 que torna inteira a diferença $\sigma-\sigma_0$.

Seja n um número natural. Então, as relações 3), 1') e 1'') mostram que

3') $$\Gamma(n) = (n-1)!\,^{(*)}$$

e

3'') $$\Gamma[(2n+1)/2] = [(2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1 \cdot (+\pi^{1/2})]/2^n.$$

Dados os números σ' e σ'', ambos positivos, a desigualdade $\sigma' \leqq \sigma \leqq \sigma''$ implica $x^{\sigma-1}\, e^{-x} \leqq x^{\sigma'-1}$ ou $x^{\sigma''-1}\, e^{-x}$, conforme $0<x<1$ ou $1 \leqq x < +\infty$; logo III_1 de § 4 de A permite concluir que $\Gamma(\sigma)$ *é função contínua da variável positiva* σ.

(*) Vale a convenção usual $0!=1$.

Postos esses preliminares, consideremos duas constantes *positivas* σ e τ e ponhamos

4) $\varphi(x)=0$ ou $(x^{\sigma-1}e^{-x/\tau})/[\Gamma(\sigma)\cdot\tau^{\sigma}]$, conforme $x\leqq 0$ ou $x>0$.

Tomando em conta que

$$\int_{-\infty<x<+\infty}\varphi(x)\,dx=\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\cdot\int_{0<y<+\infty}y^{\sigma-1}e^{-y}\,dy=1,$$

podemos afirmar que a função $F(x)$ definida pela igualdade

5) $$F(x)=\int_{-\infty<z<x}\varphi(z)\,dz$$

é uma função de distribuição e que $\varphi(x)$(*) é a função de frequência ou densidade de probabilidade correspondente [§ 5 de A]. É uso chamar *lei gama de parâmetros σ e τ* à lei (de probabilidade) introduzida através de 4) ou 5). No caso particular $\tau=2$ e $\sigma=N/2$, com N natural, também se dá a essa lei o nome de *lei qui-quadrado com N graus de liberdade.*(**)

Vamos agora deduzir a f. c. $f(t)$ da lei gama de parâmetros σ e τ.

Partimos da igualdade(***)

6) $$f(t)=\frac{1}{\Gamma(\sigma)\cdot\tau^{\sigma}}\cdot\int_{0<x<+\infty}x^{\sigma-1}e^{-x/\tau+itx}\,dx,$$

(*) $\varphi(x)$ é a derivada de $F(x)$ para qualquer x (com excepção possível da origem).

(**) Se $N=1$, sai de 4) e 1'') que $\varphi(x)=0$ ou $(x^{-1/2}e^{-x/2})/[+(2\pi)^{1/2}]$, conforme $x\leqslant 0$ ou $x>0$. Então, dado $x>0$, susbtitua-se em 5) a variável z por $-y^2$ ou $+y^2$, conforme $-\infty<z\leqslant 0$ ou $0<z<x$, e logo se reconhece que $F(x)$ é igual a

$$\frac{1}{+(2\pi)^{1/2}}\cdot\int_{-x^{1/2}}^{+x^{1/2}}e^{-y^2/2}\,dy,$$

isto é, igual à probabilidade de que o valor genérico duma variável casual que segue a lei de Gauss normada ou reduzida esteja compreendido entre $-x^{1/2}$ e $+x^{1/2}$ ou, equivalentemente, igual à probabilidade de que o quadrado do dito valor genérico esteja compreendido entre $-\infty$ e x.

(***) Repete-se a nota (*) à página 162.

a qual resulta de 1) de § 6 de A. Pondo $x/\tau = y$ em 6), sai

6') $$f(t) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \cdot \int_{0<y<+\infty} y^{\sigma-1} \cdot e^{-y+i\tau t y}\, dy,$$

onde o módulo da derivada da função integranda em ordem a t é igual a $\tau y^{\sigma} e^{-y}$, isto é, igual a uma função integrável em $0<y<+\infty$, por causa de 1). Nestas condições, a extensão de III_3 de § 4 de A ao campo complexo dá

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{i\tau}{\Gamma(\sigma)} \cdot \int_{0<y<+\infty} y^{\sigma} e^{-y+i\tau t y}\, dy,$$

donde tiramos, integrando por partes, a relação

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{i\sigma\tau}{\Gamma(\sigma).(1-i\tau t)} \cdot \int_{0<y<+\infty} y^{\sigma-1} e^{-y+i\tau t y}\, dy,$$

a qual prova a igualdade

$$df(t)/f(t) = i\sigma\tau \cdot dt/(1-i\tau t).$$

Resolvendo a equação diferencial obtida e tomando em conta que $f(0)=1$, sai

7) $$f(t) = (1-i\tau t)^{-\sigma}.$$

A experança matemática E e a variância V da lei que estamos a estudar deduzem-se de 7), fazendo o cálculo indicado em 3) e 3') de § 8 de A. Resulta

8) $$E = \sigma\tau; \quad V = \sigma\tau^2.$$

Para terminar, IV de § 7 de A e VI de § 6 de A permitem tirar de 7) a conclusão seguinte:

«A soma dum número finito de variáveis casuais *independentes* que seguem todas leis gama tendo o mesmo parâmetro τ e parâmetros σ iguais a σ_1, σ_2, etc., respectivamente para a primeira, para a segunda, etc., sai uma variável casual que segue a lei gama com o parâmetro τ comum às suas parcelas e com o parâmetro σ igual a $\sigma_1+\sigma_2+\cdots$. Em particular, se as parcelas seguirem leis qui-quadrado com N_1, N_2, etc. graus de liberdade, a soma segue a lei qui-quadrado com $N_1+N_2+\cdots$ graus de liberdade.»

* * *

Representação duma lei gama na sua qualidade de lei de Lévy com variância. A fórmula 7) mostra que, seja qual for o número natural n, a função $f(t)$ é a potência de expoente n da f. c. da lei gama de parâmetros σ/n e τ ou seja da lei cuja função de distribuição $F_n(x)$ se define como segue:

$$9)\qquad F_n(x)=0 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\Gamma(\sigma/n)\cdot\tau^{\sigma/n}}\cdot\int_{0<z<x} z^{\sigma/n-1}\,e^{-z/\tau}\,dz,$$

conforme $x\leqq 0$ ou $x>0$.

Sendo assim, o estudo feito no princípio de § 9 de A permite-nos afirmar que $f(t)$ é uma f. c. i. d. Seja $G(u)$ a função que representa $f(t)$ sob a forma de Lévy e Khintchine. A demonstração de I de § 11 de A refere que existe uma sucessão crescente de números naturais de termo genérico m tal que $m\uparrow\infty$ implica

$$m\cdot\int_{-\infty<x<u}\frac{x^2\,dF_m(x)}{1+x^2}\xrightarrow{c} G(u),$$

pelo que 9) arrasta $G(u)=0$, para $u\leqq 0$. Portanto, $M(u)\equiv 0$ na representação de Lévy e $C(u)=0$, para $u\leqq 0$, na representação de Kolmogorov.(*)

Sendo $u_1>0$ e $u_2>u_1$ dois pontos de continuidade da função $G(u)$, então um dos teoremas de Helly-Bray implica

$$\lim_{m\uparrow\infty}\left[m\cdot\int_{u_1\leqq u<u_2} u^2\,dF_m(u)\right]=\int_{u_1\leqq u<u_2}(1+u^2)\,dG(u)=C(u_2)-C(u_1).$$

(*) A representação de Kolmogorov existe, porque a lei considerada tem variância [IV de § 11 de A].

Doutro lado, as fórmulas 9) e 2), a continuidade da função Γ, a fórmula 1') deste parágrafo e III de § 4 de A permitem escrever

$$m \cdot \int_{u_1 \leqq u < u_2} u^2 \cdot dF_m(u) = \frac{\sigma}{(\sigma/m) \cdot \Gamma(\sigma/m) \cdot \tau^{\sigma/m}} \cdot \int_{u_1 \leqq u < u_2} u^{\sigma/m+1} e^{-u/\tau} du \to$$

$$\to \sigma \cdot \int_{u_1 \leqq u < u_2} u e^{-u/\tau} du = \sigma\tau \cdot [(u_1+\tau) e^{-u_1/\tau} - (u_2+\tau) e^{-u_2/\tau}].$$

Portanto, fazendo $u_2 \uparrow \infty$ ao longo dos pontos de continuidade de $G(u)$ e tomando em conta que 8) dá $C(+\infty) = \sigma\tau^2$ [19) de § 11 de A], resulta a igualdade

$$\sigma\tau^2 - C(u_1) = \sigma\tau(u_1+\tau) e^{-u_1/\tau},$$

a qual se estende a todos os pontos $u > 0$, isso em virtude das propriedades da função $C(u)$.

A fórmula 8) e os cálculos precedentes, juntamente com 19) de § 11 de A, permitem exprimir as grandezas características α e $C(u)$ da representação de Kolmogorov da lei gama de parâmetros (positivos) σ e τ como segue:

$$\text{10)} \qquad \alpha = \sigma\tau; \quad C(u) = 0 \quad \text{ou} \quad \sigma\tau \cdot [\tau - (u+\tau) e^{-u/\tau}],$$
$$\text{conforme} \quad u \leqq 0 \quad \text{ou} \quad u > 0.$$

Vê-se em 10) que $\lim\limits_{u \downarrow 0} C(u) = 0 = C(0)$; logo a função $C(u)$ sai contínua em todo o seu campo e, portanto, o mesmo sucede a $G(u)$, a $M(u)$ e a $N(u)$. Além disso, a função $C(u)$ admite derivada para qualquer u, a qual é nula, se $u \leqq 0$, e é igual a $\sigma u e^{-u/\tau}$, se $u \geqq 0$. Como $\sigma e^{-u/\tau}$ decresce, quando $u > 0$ cresce, podemos aplicar VII'' de § 6. Estamos pois aptos a enunciar a proposição seguinte:

I) «Toda a lei gama é lei (infinitamente divisível) de Lévy com variância e com componente gausseana nula.»

Caso queiramos representar a lei em estudo sob a forma de Lévy e Khintchine, obtemos, por causa de 15) e 17) de § 11 de A,

11) $G(u)=0$ ou $\sigma \cdot \int_{0 \leq v < u} \frac{v \cdot e^{-v/\tau}}{1+v^2} dv$, conforme $u \leq 0$ ou $u > 0$,

e

$$a = \sigma \cdot \int_{0 \leq u < +\infty} \frac{e^{-u/\tau}}{1+u^2} du.$$

Caso queiramos representar a nossa lei sob a forma de Lévy, a proposição I do texto e 12) de § 11 de A dão

12) $$b^2=0; \quad M(u)\equiv 0, \text{ para } u<0;$$

$$N(u) = \sigma \cdot \int_{u < v < +\infty} \frac{e^{-v/\tau}}{v} dv, \text{ para } u > 0.$$

Finalmente, a aplicação de 13) de § 11 de A mostra que a representação de Lévy modificada faz corresponder a qualquer número $U > 0$ a grandeza

13) $$a(U) = \sigma\tau \cdot (1 - e^{-U/\tau}).$$

* * *

Convergência de somas de variâncias limitadas para uma lei gama. Dispomos agora de todos os elementos para podermos estabelecer teoremas de convergência de somas de variáveis casuais independentes para uma lei gama.

Consideremos, como usualmente, sucessões duplas de variáveis casuais X_{nk}, com $1 \leq k \leq k_n$ e $k_n \rightarrow \infty$, quando $n \uparrow \infty$, e comecemos por adaptar o teorema de convergência de Gnedenko e Bawly (IV de § 5) à situação presente. Obtemos a proposição seguinte:

II) «São dadas as variáveis casuais X_{nk}, independentes por linhas, tendo as funções de distribuição $F_{nk}(x)$, dotadas de variâncias e assintòticamente constantes com respeito às suas esperanças matemáticas E_{nk}. A fim de que possam determinar-se constantes S_n tais que as leis das somas

a) $$X_n = X_{n1} + X_{n2} + \cdots + X_{nk_n} - S_n$$

saiam (fracamente) convergentes para a lei gama de parâmetros (positivos) σ e τ e, além disso, as variâncias e as esperanças matemáticas das variáveis casuais X_n tendam, respectivamente, para a variância e a esperança matemática da lei limite, *é condição necessária e suficiente* que se verifiquem simultâneamente as duas relações seguintes:

$$b_1) \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leqq k\leqq k_n} \int_{-\infty<x<u} x^2\, dF_{nk}(x+E_{nk})=0,$$

com qualquer $u \leqq 0$, e

$$b_2) \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leqq k\leqq k_n} \int_{u\leqq x<+\infty} x^2\, dF_{nk}(x+E_{nk})=\sigma\,\tau\,(u+\tau)\,e^{-u/\tau},$$

com qualquer $u \geqq 0$.

Caso as relações $b_1)$ e $b_2)$ se encontrem satisfeitas, o conjunto das constantes S_n admissíveis é dado pela fórmula

$$c) \qquad S_n=E_{n1}+E_{n2}+\cdots+E_{nk_n}-\alpha_n,$$

onde α_n representa o termo geral duma sucessão (real) qualquer que seja convergente para $\sigma\tau$.»

Observação: Se acrescentarmos às hipóteses de II a de que as variâncias V_{nk} das variáveis X_{nk} são tais que as somas

$$V_{n1}+V_{n2}+\cdots+V_{nk_n} \text{ resultam limitadas em relação a } n$$

e se retirarmos dos pedidos de II o de que as variâncias das variáveis X_n devem tender para a variância da lei limite, então V de § 5 mostra que a condição necessária e suficiente de II passa a ser a seguinte:

Fixada qualquer subsucessão fracamente convergente, extraída da sucessão

$$\sum_{1\leqq k\leqq k_n} \int_{-\infty<x<u} x^2\, dF_{nk}(x+E_{nk}),$$

o seu limite sai igual a uma constante, para $u \leq 0$, e igual à mesma constante aumentada de $\sigma\tau[\tau-(u+\tau)e^{-u/\tau}]$, para $u \geq 0$.

* * *

Caso geral da convergência para uma lei gama. Uma consequência imediata de 12) e 13) deste parágrafo e de III de § 3 é a proposição seguinte, à qual podemos chamar *teorema principal relativo à convergência para uma lei gama:*

III) «São dadas as variáveis casuais X_{nk}, independentes por linhas, tendo as funções de distribuição $F_{nk}(x)$ e admitindo as constantes assintóticas A_{nk}. A fim de que seja possível determinar constantes S_n que tornem as leis das somas

$$a) \qquad X_n = X_{n1} + X_{n2} + \cdots + X_{nk_n} - S_n$$

(fracamente) convergentes para a lei gama de parâmetros (positivos) σ e τ, *é condição necessária e suficiente* que se verifiquem simultâneamente as relações seguintes:(*)

$$b_1) \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq k_n} F_{nk}(u+A_{nk}) = 0, \text{ com qualquer } u<0,$$

$$b_2) \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq k_n} [1-F_{nk}(u+A_{nk})] = \sigma \cdot \int_{u<v<+\infty} \frac{e^{-v/\tau}}{v}\, dv,$$

com qualquer $u>0$, e

$$b_3) \qquad \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \lim_{n\uparrow\infty} \max \sum_{1\leq k\leq k_n} \left\{ \int_{|x|<\varepsilon} x^2\, dF_{nk}(x+A_{nk}) - \left[\int_{|x|<\varepsilon} x\, dF_{nk}(x+A_{nk}) \right]^2 \right\} = 0.$$

(*) Atendendo a I, 4) e 2) de § 4, podemos afirmar que o conjunto das relações b_1) e b_2) é equivalente ao conjunto das relações

$$b_1') \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \prod_{1\leq k\leq k_n} [1-F_{nk}(u+A_{nk})] = 1,$$

com qualquer $u<0$, e

$$b_2') \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq k_n} \log F_{nk}(u+A_{nk}) = -\sigma \cdot \int_{u<v<+\infty} \frac{e^{-v/\tau}}{v}\, dv,$$

com qualquer $u>0$.

Caso as relações $b_1)$ a $b_3)$ ocorram para uma certa sucessão de constantes assintóticas das variáveis X_{nk}, as mesmas relações têm lugar para todas as sucessões de tais constantes.

Desde que as relações $b_1)$ a $b_3)$ se encontrem satisfeitas, o conjunto das constantes S_n admissíveis é dado pela fórmula

$$c) \qquad S_n = \sum_{1 \leq k \leq k_n} \left[A_{nk} + \int_{|x| \leq U} x \, dF_{nk}(x + A_{nk}) \right] - a_n(U),$$

onde $U > 0$ é arbitrário e onde $a_n(U)$ representa o termo geral duma sucessão (real) qualquer que seja convergente para $\sigma \tau \cdot (1 - e^{-U/\tau})$.»

Observação: Atendendo a I de § 5, podemos afirmar o seguinte:

Quando e só quando as constantes assintóticas A_{nk} do teorema III verificam a relação

$$a) \qquad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{n \uparrow \infty} \max \sum_{1 \leq k \leq k_n} \left[\int_{|x| < \varepsilon} x \, dF_{nk}(x + A_{nk}) \right]^2 = 0,$$

então a condição necessária e suficiente do teorema não só fica com as partes $b_1)$ e $b_2)$ inalteradas e com a parte $b_3)$ privada da parcela subtractiva do somatório, como também sai equivalente ao conjunto das duas relações

$$b_1^*) \qquad \lim_{n \uparrow \infty} \sum_{1 \leq k \leq k_n} \int_{-\infty < x < u} \frac{x^2}{1 + x^2} \, dF_{nk}(x + A_{nk}) = 0,$$

para qualquer $u \leq 0$, e

$$b_2^*) \quad \lim_{n \uparrow \infty} \sum_{1 \leq k \leq k_n} \int_{0 \leq x < u} \frac{x^2}{1 + x^2} \, dF_{nk}(x + A_{nk}) = \sigma \cdot \int_{0 \leq v < u} \frac{v \, e^{-v/\tau}}{1 + v^2} \, dv,$$

para qualquer $u > 0$, finito ou infinito.

Caso as relações $a)$, $b_1^*)$ e $b_2^*)$ se encontrem satisfeitas e caso se pretenda calcular as constantes S_n a partir de $e)$ de I de § 3, as grandezas a_n devem ter o limite a da fórmula 11) de § 12.

Acrescentamos que podem obter-se constantes assintóticas A_{nk} que permitam usar a condição necessária e suficiente de convergência desta observação, procedendo de qualquer dos modos indicados na observação a II de § 10.

* * *

Caso particular das variáveis casuais $X_{nk}=X_k/B_n$ e transformação de sucessões simples em sucessões duplas convergentes para uma lei gama. Dadas as constantes positivas $B_n(n=1,2,...)$ e as variáveis casuais independentes X_n, é fácil adaptar II e III e as observações anexas às variáveis $X_{nk}=X_k/B_n$, com $1\leqq k\leqq n$.

Passamos agora a considerar o problema tratado em § 7 no caso particular de se procurarem leis limite gama.

Antes de mais nada, basta invocar 7) deste parágrafo e I e I' de § 7 para concluir que vale a proposição seguinte:

IV) «Suponhamos que são dadas as variáveis casuais independentes $X_n(n=1,2,...)$ e que existem constantes $B_n>0$ e S_n tais que as somas

$$a) \qquad Y_n=X_1/B_n+X_2/B_n+\cdots+X_n/B_n-S_n$$

ficam com parcelas assintòticamente constantes e com leis (fracamente) convergentes para a lei gama de parâmetros (positivos) σ e τ.

Então, as leis limite próprias que podem obter-se, fazendo variar as constantes $B_n>0$ e S_n de $a)$, são todas as leis que se transformam numa lei gama de primeiro parâmetro σ por uma simples translação e só essas leis e a cada uma delas correspondem somas Y_n de parcelas assintòticamente constantes. Em particular, se $\sigma=N/2$, com N natural, alcança-se uma lei limite qui-quadrado, necessàriamente com N graus de liberdade, quando e só quando se substituem as constantes B_n e S_n de $a)$ por outras B'_n e S'_n tais que $n\uparrow\infty$ implica $B'_n/B_n\longrightarrow\tau/2$ e tais que $S'_n=B_n\,S_n/B'_n+\delta_n$, com δ_n infinitésimo.»

Posto isso, vamos adaptar X de § 7 ao caso da convergência para uma lei gama. Sai a proposição seguinte:

V) «Dadas as variáveis casuais próprias independentes $X_n (n=1, 2, \ldots)$ com as funções de distribuição $F_n(x)$, podem encontrar-se constantes $B_n>0$ e S_n que tornem as parcelas das somas

a) $$X_1/B_n+X_2/B_n+\cdots+X_n/B_n-S_n$$

assintòticamente constantes e que tornem as leis dessas somas (fracamente) convergentes para uma lei gama de primeiro parâmetro (positivo) σ, *quando e só quando* ocorrem simultâneamente as condições seguintes:

1.ª — Fazendo

$$\mathcal{F}_n(x)=1-\int_R F_n(y-x+0)\,dF_n(y)$$

e tomando um par qualquer de números positivos c^2 e τ, tem-se

b) $$\sum_{1\leqq k\leqq n}\int_R \frac{x^2}{c^2+x^2}\,d\mathcal{F}_k(x)\uparrow\infty, \text{ quando } n\uparrow\infty,$$

e as constantes positivas β_n (unìvocamente) determinadas pelas igualdades

c) $$\sum_{1\leqq k\leqq n}\int_R \frac{x}{\beta_n^2+x^2}\,d\mathcal{F}_k(x)=2\,\sigma\cdot\int_{0\leqq u<+\infty}\frac{ue^{-u/\tau}}{1+u^2}\,du=$$
$$=P, \text{ para } n\geqq n_P,$$

são tais que

d) $$\beta_{n+1}/\beta_n\longrightarrow 1, \text{ quando } n\uparrow\infty,$$

e que existem constantes A_n que impõem a igualdade

e) $$\lim_{n\uparrow\infty}\sup_{1\leqq k\leqq n}\int_R \frac{x^2}{\beta_n^2+x^2}\,dF_k(x+A_k)=0.$$

2.ª — Verificam-se as três relações seguintes:(•)

$$f_1) \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq n} F_k(u\beta_n + A_k) = 0, \text{ com qualquer } u<0,$$

$$f_2) \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq n} [1 - F_k(u\beta_n + A_k)] = \sigma \cdot \int_{u<v<+\infty} \frac{e^{-v/\tau}}{v}\, dv,$$

com qualquer $u>0$, e mais

$$f_3) \qquad \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \lim_{n\uparrow\infty} \max\left(\frac{1}{\beta_n^2} \cdot \sum_{1\leq k\leq n} \left\{\int_{|x|<\varepsilon\beta_n} x^2\, dF_k(x+A_k) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \left[\int_{|x|<\varepsilon\beta_n} x\, dF_k(x+A_k)\right]^2\right\}\right) = 0.$$

Desde que as condições 1.ª e 2.ª se encontrem satisfeitas, as constantes β_n podem fazer as vezes das constantes B_n e as constantes S_n admissíveis correspondentes — que vamos representar por σ_n — são as dadas pela fórmula

$$g) \qquad \sigma_n = \frac{1}{\beta_n} \cdot \sum_{1\leq k\leq n} \left[A_k + \int_{|x|\leq U\beta_n} x\, dF_k(x+A_k)\right] - a_n(U),$$

onde $U>0$ é arbitrário e onde $a_n(U)$ é o termo geral duma sucessão (real) qualquer que seja convergente para $\sigma\tau \cdot (1 - e^{-U/\tau})$.

A constante τ escolhida é o segundo parâmetro da lei limite.

Supondo asseguradas as relações *b)* a $f_3)$, as grandezas A_k/β_n saem constantes assintóticas (das variáveis casuais X_k/β_n) e as relações $f_1)$ a *g)* não ficam prejudicadas se nelas

(•) O conjunto das relações $f_1)$ e $f_2)$ é equivalente ao conjunto das relações

$$f_1') \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \prod_{1\leq k\leq n} [1 - F_k(u\beta_n + A_k)] = 1,$$

com qualquer $u<0$, e

$$f_2') \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{1\leq k\leq n} \log F_k(u\beta_n + A_k) = -\sigma \cdot \int_{u<v<+\infty} \frac{e^{-v/\tau}}{v}\, dv,$$

com qualquer $u>0$.

substituirmos aquelas grandezas por quaisquer outras constantes assintóticas com a mesma forma.»

Observação: Quando e só quando as constantes assintóticas A_k/β_n do teorema V verificam a relação

$$a)\quad \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\lim_{n\uparrow\infty}\max\left\{\frac{1}{\beta_n^2}\cdot\sum_{1\leq k\leq n}\left[\int_{|x|<\varepsilon\beta_n} x\,dF_k(x+A_k)\right]^2\right\}=0,$$

então a condição necessária e suficiente do teorema não só fica com as partes *b)* a f_2*)* inalteradas e com a parte f_3*)* privada da parcela subtractiva do somatório, como também sai equivalente ao conjunto das relações *b)* a *e)* acrescido das duas relações

$$f_1^*)\qquad \lim_{n\uparrow\infty}\sum_{1\leq k\leq n}\int_{-\infty<x<u\beta_n}\frac{x^2}{\beta_n^2+x^2}\,dF_k(x+A_k)=0,$$

para qualquer $u\leq 0$, e

$$f_2^*)\quad \lim_{n\uparrow\infty}\sum_{1\leq k\leq n}\int_{0\leq x<u\,\beta_n}\frac{x^2}{\beta_n^2+x^2}\,dF_k(x+A_k)=\sigma\cdot\int_{0\leq v<u}\frac{v\,e^{-v/\tau}}{1+v^2}\,dv,$$

para qualquer $u>0$, finito ou infinito.

Depois esta observação pode completar-se do mesmo modo que a observação anexa a III.

Vamos agora adaptar XI de § 7 ao caso da convergência para uma lei gama. Obtemos a proposição seguinte:

VI) «Dadas as variáveis casuais próprias independentes $X_n\,(n=1,2,\ldots)$, possuindo as funções de distribuição $F_n(x)$, as variâncias V_n e as esperanças matemáticas E_n, então é possível encontrar constantes $B_n>0$ e S_n tais que as variáveis casuais X_k/B_n, com $1\leq k\leq n$, admitam as constantes assintóticas E_k/B_n, as leis das somas

$$a)\qquad Y_n=X_1/B_n+X_2/B_n+\cdots+X_n/B_n-S_n$$

sejam (fracamente) convergentes para uma lei gama de primeiro parâmetro (positivo) σ e, além disso, as variâncias e as esperanças matemáticas das variáveis casuais Y_n tendam, respectivamente, para a variância e a esperança matemática da lei limite, *quando e só quando*, escolhendo uma constante positiva qualquer τ e pondo

$$b) \qquad \gamma_n = +[(V_1 + V_2 + \cdots + V_n)/(\sigma\,\tau^2)]^{1/2},$$

ocorrem simultâneamente as condições seguintes:

1.ª — Têm lugar as relações

$$c) \qquad \gamma_n \uparrow \infty \text{ e } \gamma_{n+1}/\gamma_n \longrightarrow 1, \text{ quando } n \uparrow \infty,$$

e mais a relação

$$d) \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \sup_{1\leq k\leq n} \int_R \frac{x^2}{\gamma_n^2 + x^2}\, dF_k(x+E_k) = 0.$$

2.ª — Verificam-se as igualdades

$$e_1) \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \left[\frac{1}{\gamma_n^2} \cdot \sum_{1\leq k\leq n} \int_{-\infty<x<u\gamma_n} x^2\, dF_k(x+E_k)\right] = 0,$$

com qualquer $u \leq 0$, e mais

$$e_2) \qquad \lim_{n\uparrow\infty} \left[\frac{1}{\gamma_n^2} \cdot \sum_{1\leq k\leq n} \int_{u\gamma_n\leq x<+\infty} x^2\, dF_k(x+E_k)\right] = \sigma\,\tau\,(u+\tau)\, e^{-u/\tau},$$

com qualquer $u \geq 0$.

Caso as relações *c)* a $e_2)$ se encontrem satisfeitas, as constantes γ_n podem fazer as vezes das constantes B_n e as constantes S_n admissíveis correspondentes — que vamos representar por σ_n — são as dadas pela fórmula

$$f) \qquad \sigma_n = (E_1 + E_2 + \cdots + E_n)/\gamma_n - \alpha_n,$$

onde α_n representa o termo geral duma sucessão (real) qualquer que seja convergente para $\sigma\,\tau$.

A constante τ escolhida é o segundo parâmetro da lei limite.»

Observação: Retomemos VI. Se substituirmos aí a expressão «as variâncias das variáveis casuais Y_n tendam para a variância da lei limite» por «as variâncias das variáveis Y_n sejam limitadas», se pusermos em lugar de *b)* a igualdade

$$\gamma_n = +[(V_1 + V_2 + \cdots + V_n)/Q]^{1/2},$$

onde Q significa uma constante positiva qualquer, e se conservarmos a parte restante do enunciado anterior à condição 1.ª, esta fica intacta e a condição 2.ª passa a ser a seguinte:

Deve existir um número positivo τ tal que, fixada qualquer subsucessão fracamente convergente, extraída da sucessão

$$\frac{1}{\gamma_n^2} \cdot \sum_{1 \leq k \leq n} \int_{-\infty < x < u\gamma_n} x^2 \, dF_k(x + E_k),$$

o seu limite sai igual a uma constante, para $u \leqq 0$, e igual à mesma constante aumentada de $\sigma\tau \cdot [\tau - (u + \tau) e^{-u/\tau}]$, para $u \geqq 0$.

PEDRO BRUNO TEODORO BRAUMANN

(entregue em 24 de Julho de 1961)

Bibliografia

1) Bawly, G. M., — *Ueber einige Verallgemeinerungen der Grenzwertsaetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Rec. Math. [Mat. Sbornik] N. S. 1 (43), 917-930 (1936).

2) Bernstein, S. N., — *Sur l'extension du théorème limite du calcul des probabilités aux sommes de quantités dépendantes.* Math. Ann. 97, 1-59 (1926).

3) Braumann, P. B. T., — *Introdução ao estudo dos limites de somas de variáveis casuais independentes.* Primeiro volume do Curso de Matemáticas Superiores Professor Mira Fernandes, Editorial Império, Lda., Lisboa, 1958. — Também: *Limites de somas de variáveis casuais independentes, parte A,* a sair brevemente.

4) ——— *Limites de somas de variáveis casuais independentes, parte B.* Segundo volume do Curso de Matemáticas Superiores Professor Mira Fernandes, Tipografia Delta, Lda., Lisboa, 1957-58.

5) ——— *Symmetrische unbeschraenkt teilbare Wahrscheinlichkeitsgesetze.* Revista da Faculdade de Ciências de Lisboa, 2.ª série — A — Vol. VII — Fasc. 2.º, 255-262, Lisboa, 1959.

6) Cramér, H., — *Random variables and probability distributions.* Cambridge Tracts in Mathematics, no. 36, Cambridge, 1937.

7) ——— *Mathematical methods of statistics.* Princeton, 1946.

8) Doob, J. L., — *Stochastic processes.* John Wiley and Sons, Inc., New York, 1953.

9) Feller, W., — *Ueber den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Math. Z. 40, 521-559 (1935); 42, 301-312 (1937).

10 ——— *An introduction to probability theory and its applications.* John Wiley and Sons, Inc., New York, 1950.

11) De Finetti, B., — *Sulla funzione a incremento aleatorio.* Atti Acad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) 10, 163-168, 325-329, 548-553 (1929).

12) Gnedenko, B. V., — *Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire.* Ann. Math. 44, 423-453 (1943).

13) ——— *Limit theorems for sums of independent random variables.* Uspekhi Math. Nauk 10, 115-165 (1944). English translation: Translation no. 45, American Mathematical Society, New York.

14) GNEDENKO, B. V., – *Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Akademie – Verlag, Berlin, 1957.

15) GNEDENKO, B. V., e GROSHEV, A. V., – *On the convergence of distribution laws of normalized sums of independent random variables.* Rec. Math. [Mat. Sbornik] N. S. 6 (48), 521-541 (1939).

16) GNEDENKO, B. V., e KOLMOGOROV, A. N., – *Limit distributions for sums of independent random variables* (traduzido do russo para o inglês por CHUNG, K. L., e DOOB, J. L.). Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Cambridge 42, Mass., 1954.
GROSHEV, A. V., – Veja-se GNEDENKO.

17) KHINTCHINE, A. Ya., – *Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Ergebnisse der Mathematik, II. 4, Springer, Berlin, 1933.

18) ——— *Zur Theorie der unbeschraenkt teilbaren Verteilungsgesetze.* Rec. Math. [Mat. Sbornik] N. S. 2 (44), 79-120 (1937).

19) ——— *Limit theorems for sums of independent random variables. Gonti,* Moscovo-Leninegrado, 1938.

20) KHINTCHINE, A. Ya., e LÉVY, P., – *Sur les lois stables.* C. R. Acad. Sci. Paris 202, 374-376 (1936).
KOLMOGOROV, A. N., – Veja-se GNEDENKO.

21) LÉVY, P., – *Théorie de l'addition des variables aléatoires.* Gauthier – – Villars, Paris, 1937.

22) LIAPOUNOV, A. M., – *Sur une proposition de la théorie des probabilités.* Bull. de l'Acad. Imp. des Sci. de St. Petersbourg (5) 13, no. 4, 359- -386 (1900).

23) ——— *Nouvelle forme du théorème sur la limite de probabilités.* Mem. Acad. Sci. St. Petersbourg (8) 12, no. 5, 1-24 (1901).

24) LINDEBERG, Y. W., – *Eine neue Herleitung des Exponentialgesetzes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Math. Z. 15, 211-225 (1922).

25) LOÈVE, M., – *Probability theory.* D. Van Nostrand Company, Inc., New York, 1955.

26) MARCINKIEWICZ, J., – *Sur les fonctions indépendantes.* II. Fund. Math. 30, 349-364 (1938).

27) MOOD, A. M. F., – *Introduction to the theory of statistics.* Mc Graw – – Hill Book Company, Inc., New York – Toronto – London, 1950.

28) PARZEN, E., – *Modern probability theory and its applications.* John Wiley and Sons, Inc., New York – London, 1960.

29) RAIKOV, D. A., – *On a connection between the central limit theorem in the theory of probability and the law of large numbers.* Izvestiya Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., 323–338 (1938).

30) RICHTER, H., – *Wahrscheinlichkeitstheorie.* Springer–Verlag, Berlin – – Goettingen – Heidelberg, 1956.

31) VAN DER WAERDEN, B. L., – *Mathematische Statistik.* Springer–Verlag, Berlin – Goettingen – Heidelberg, 1957.

32) VITALI, G., e SANSONE, G., – *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale, parte* II. Nicola Zanichelli Editore, Bologna, 1946.

33) ZAREMBA, S. K., – *Note on the central limit theorem.* Mathematische Zeitschrift, 69. Band, 3. Heft, 295-297 (1958).

NOTA: Seguindo a prática corrente, indicaram-se em inglês os títulos dos trabalhos publicados em russo.

ERRATA

	onde se lê	deve ler-se
pág. 3, linha 25	de existirem constantes S_n que tornam as	das constantes S_n tornarem as
pág. 8, linha 4	onde o último somatório é limitado	onde os quatro últimos somatórios são limitados
pág. 14, linha 22	$\sup\limits_n (1\ B_n)$	$\sup\limits_n (1/B_n)$
pág. 15, linha 2	$\frac{p_k q_k}{B_n^2}$	$\frac{p_k q_k^2}{B_n^2}$
pág. 16, linha 12	KINTCHINE	KHINTCHINE
pág. 26, linha 2	$G^{(*)}(u)$	$G^*(u)$
pág. 61, linha 11	que prova	o que prova
pág. 173, linha 16	$\frac{x}{\beta_n^2+x^2}$	$\frac{x^2}{\beta_n^2+x^2}$

ESCLARECIMENTO

Quando o autor desta dissertação estava assistindo em Agosto de 1962 a uma reunião científica em Breukelen na Holanda, a Senhora I. VAN AARDENNE-EHRENFEST teve a grata deferência de traduzir para ele certas passagens do original russo do trabalho número 15 da bibliografia anexa, original esse que parece ser impossível encontrar em Portugal e de que há uma versão inglesa, a qual é omissa sem declaração de omissão. Consequentemente, ficámos sabendo que as proposições VIII de § 6, II' e X de § 7 e VIII de § 9, reputadas como nossas na introdução a este trabalho, na realidade reproduzem ou generalizam insignificantemente resultados alcançados por GNEDENKO e GROSHEV. Fazemos aqui a devida rectificação e chamamos a atenção para a repercussão do facto sobre a nota à página 2.

PEDRO BRUNO TEODORO BRAUMANN

ÍNDICE REMISSIVO

Letra V

Letra Z