

# Boletim



SOCIEDADE PORTUGUESA  
DE ESTATÍSTICA

Publicação semestral

outono de 2016



## O Tema Central da Estatística

### “Estatística”

|   |                             |    |
|---|-----------------------------|----|
| Estatística Educacional: a propósito dos Modelos de Valor Acrescentado            | Emília Athayde .....        | 22 |
| Os modelos GTARCH de potência na dialética empírico-teórica da descrição temporal | Maria Eugénia Ferrão .....  | 23 |
| Testes de Memória Longa Usando Estimadores LAD                                    | Nazaré Mendes Lopes .....   | 26 |
| Data Science – um desafio para os estatísticos?                                   | Paulo M. M. Rodrigues ..... | 35 |
| Uma reflexão enviesada (!) sobre a “nossa” SPE                                    | Paula Brito .....           | 40 |
| Reflexões estatísticas  | Manuela Neves .....         | 43 |
| O Futuro da Estatística   | Carlos A. Braumann .....    | 45 |
| “O Mundo (Per)Feito de Estatística”   | João Branco .....           | 49 |
|   | Emília Athayde .....        | 59 |

|   |    |
|---|----|
| Editorial .....                         | 1  |
| Mensagem da Presidente .....            | 5  |
| Notícias .....                          | 6  |
| Enigmística .....                       | 15 |
| SPE e a Comunidade .....                | 16 |
| Ciência Estatística .....               | 60 |
| • Livros .....                          | 60 |
| • Teses de Doutoramento .....           | 61 |
| Prémios “Estatístico Júnior 2016” ..... | 63 |

### Informação Editorial

**Endereço:** Sociedade Portuguesa de Estatística.  
Campo Grande. Bloco C6. Piso 4.  
1749-016 Lisboa. Portugal.

**Telefone:** +351.217500120

**e-mail:** [spe@fc.ul.pt](mailto:spe@fc.ul.pt)

**URL:** <http://www.spestatistica.pt>

**ISSN:** 1646-5903

**Depósito Legal:** 249102/06

**Tiragem:** 500 exemplares

**Execução Gráfica e Impressão:** Gráfica Sobreireense

**Editor:** Fernando Rosado, [fernando.rosado@fc.ul.pt](mailto:fernando.rosado@fc.ul.pt)

Sociedade Portuguesa de Estatística desde 1980



WORLD OF STATISTICS.ORG

# O MUNDO DA ESTATÍSTICA

ORGANIZAÇÃO PARTICIPANTE

# Editorial

... o Boletim SPE, *decimus annum* em nova série, pesquisa *O Tema Central da Estatística*...

1. Em relação à secção principal deste Boletim SPE, este editorial pode-se considerar uma continuação das reflexões apresentadas na edição anterior.

Só é culto quem souber estruturar o seu próprio saber, diz-se! Aceita-se como uma definição que, a cultura é todo aquele complexo que inclui o conhecimento, as crenças, a arte, a moral, a lei, os costumes e todos os outros hábitos e capacidades adquiridos pelo homem como membro da sociedade. E isto liga-nos à ciência. Da cultura à ciência (ou às ciências da cultura), damos um pequeno passo linguístico mas que gera um gigantesco salto no conhecimento e que é objeto das mais profundas reflexões e teses.

A Estatística, como todas as Ciências, organiza-se em torno de problemas para resolver. Quais os problemas e qual o centro da problemática? O excelente grafismo que abre e fecha as páginas dedicadas ao “assunto principal” desta edição “resume” o (nosso) mundo de problemas.

A Estatística, no seu centro, tem “*statistic*” que nos projeta para o mundo anglo-americano. De igual modo, para o francês ou para o italiano ou para a diversidade linguística. Mas, muito em especial, aquela “raiz” também induz *status*, isto é, o Estado ou, numa perspetiva mais dinâmica “o estar de pé”, em vigilância, para bem de todos nós. Do mundo!

Temos assim um alfa e um ómega – um princípio e um fim – para o *Tema Central* que elegemos para esta edição do Boletim SPE. Um princípio que é o indivíduo (o cientista) e um fim que é a humanidade. Um Mundo! Em síntese, em tudo está a Estatística!

No entanto, o Boletim não se esgota no *Tema Central* por muito aliciante que este possa ser. *SPE e a Comunidade* ou *Episódios na História da Estatística* com as suas especificidades editoriais, bem definidas, fazem ressaltar novas componentes no todo que deve ser cada edição. Igualmente as *Notícias* também centram a atenção do leitor, muito em especial nas “iniciativas SPE” e nos “lembretes” e “registos”. A *Ciência Estatística*, por sua vez, mostra a vivacidade do momento. O Boletim é pois a soma de todas essas partes.

2. O *Tema Central* desta edição, como acima referi, tem a originalidade de incluir duas figuras na respetiva secção e que a iniciam e a terminam.

*O Mundo (Per)Feito de Estatística* é uma feliz inspiração da nossa colega Emília Athayde. Cuidadosamente, com muita paciência e com muita criatividade – que também é instrumento de investigação – ela elencou dezenas de desafios temáticos e centrais. Formou um cardápio onde todos nós estamos incluídos pela diversidade e pela especificidade. Merece os agradecimentos editoriais, desde logo pela originalidade. Criou um Mundo que une a Arte, a Ciência Estatística e a Investigação. Une todos! Esta é uma chave para abrir a porta do sucesso científico. Um verdadeiro *Tema Central*.

O *Mundo* assim criado, aguarda pela contribuição individual que lhe acrescente novo *Tema (Central)*. A Investigação Estatística é a fábrica de todos os contributos.

3. Avancemos mais um passo na procura do *Tema Central*.

Como chegar a ele? Debater sobre o *Tema Central da Estatística* é:

- o ponto de partida para uma grande reflexão
- um olhar para o passado
- planear o futuro
- um desafio para o aprofundamento
- sempre, obter a melhoria de métodos
- aumentar a exigência de novas propostas
- estudar um ponto (científico) de acumulação
- um *leitmotiv* para novas descobertas
- é, acima de tudo, fazer investigação científica
- um desiderato, com desejo de excelência, para o conhecimento!

4. A SPE, como sabemos, foi fundada em 1980. Ao longo da sua história, muitos foram os temas centrais já abordados. Um tema científico é, também, o mote para os Congressos cuja realização, segundo os estatutos, deve ser um objetivo prioritário, isto é, fazer investigação. Sempre, é em torno do

tema escolhido que se deseja aprofundar a troca de opiniões científicas. E, não existe dúvida sobre as grandes vantagens nas suas concretizações. Realizar congressos, pode assim concluir-se, é um verdadeiro tema central.

O *Tema Central* eleito para reflexão nesta edição do Boletim, de algum modo, é também uma passagem de testemunho para a geração seguinte, pois, quanto maior for o sucesso que ela tiver, maior será o valor do passo científico dado naquela longínqua data por “uma dúzia” de pioneiros que fundaram a SPE e que ajudaram a gerar a Sociedade científica que, com orgulho, hoje somos!

Na sequência de todas estas ideias, convidei Estatísticos Seniores para que partilhassem o seu legado.

A resposta, para este projeto de “relance” e de “reflexão” sobre “interesses” da Estatística Nacional, conjugada com a disponibilidade das respetivas agendas profissionais dos diversos convidados está na presente edição. Aos autores seniores que, generosamente, partilham connosco o seu saber e as suas reflexões, reconhecidamente, devemos agradecer a colaboração. Infelizmente as agendas de alguns não permitiram colaboração para esta edição. Obviamente, as páginas do Boletim estão sempre disponíveis para receber as suas contribuições.

Perante a mesma proposta editorial, alguns autores “elegem” um tema específico e desenvolvem a sua contribuição. Em alternativa, a “eleição” pode percorrer uma generalidade temática e insistir sobre “o motor”, isto é, sobre o que melhor faz avançar a ciência estatística no presente. Quais são então os desafios atuais? Uma é, decerto, a conclusão: **A Estatística está no centro e a Investigação é a alma do tema central de toda a Ciência.** Assim a Investigação (também) pode ser escolhida como um tema central.

Nos Boletins primavera de 2009 e primavera de 2012 tivemos uma perspetiva generalista sobre a investigação científica em Portugal. Em cada um deles podemos rever os mais importantes temas quer nas Universidades quer nos Institutos Politécnicos. A *Estatística em Portugal nos últimos 25 anos*, da autoria do Prof Bento Murteira – publicado no *Memorial da SPE* em 2005 e de que fui editor – é de excelência para uma “revisão e atualização” passados dez anos sobre os interesses científicos aí relatados. O Boletim SPE, ao longo do tempo, vai criando um registo, um caminho também formado por temas centrais que oportunamente devem ser revisitados e atualizados. No final desta edição é apresentada a lista de todos os temas centrais ao longo dos 10 anos desta nova série do Boletim SPE, iniciada no outono de 2006. A conjugação de toda esta informação, seguramente, ajuda a eleger o *Tema Central da Estatística*. Mas, para quê? Qual a importância?

Refletir sobre o Tema Central da Estatística é uma tarefa particular que, necessariamente, segue um caminho muito próximo daqueloutro mais geral que pretende descobrir: Qual o contributo da cultura para o autoconhecimento?

Podemos inquirir no geral: Porque é que a sociedade moderna, o Estado, a Ciência ou a Administração Pública surgiram e se desenvolveram mais aqui do que ali? Com maior valor cultural pode formular-se a questão: Porque é que figuras como Dom Quixote, Hamlet, Fausto ou Mr. Hyde são tão familiares? Porque a Cultura da Europa ocidental se impôs? O que disse ou escreveu determinado "autor científico ou cultural" e que não soubéssemos? Onde estava o inconsciente antes de Freud? O que nos leva a estudar valores extremos ou outliers? O que significa "avanço na Ciência"? Muitas vezes, mas especialmente na escola, sentimos que "a matéria em estudo" nos parece desinteressante e sem qualquer relação com a vida real (como se costuma dizer) – Português e Matemática, estão nessa linha. Mas, os que passam por essa vivência, mais tarde, podem descobrir o valor da cultura. É o estudo da História que permite compreender a Sociedade. É a Literatura que pode surgir como uma forma mágica que nos permite "viver experiências" – criar heróis. É a Estatística que muito ajuda nessas vivências.

Assim, surge uma "diversidade cultural" que, decerto, também pela subjetividade, nos permite concluir pela não existência de um Tema Central. Um "estatístico bayesiano" tem uma centralidade diversa de um "frequentista". Com alguma ingenuidade, podemos perguntar: Fisher é "mais central" do que Bayes? O Boletim SPE outono de 2013 e o excelente texto do Prof Bento Murteira (p. 10-18) pode aqui ser incluído como um aprofundado estudo e discussão sobre o *Tema Central da Estatística* à volta dos paradigmas clássico e bayesiano. A procura de (mais) uma resposta, em muitas outras direções pode ser também um ponto de partida para uma análise sobre o seu valor – sempre em jeito de olhar para o futuro – e qual o interesse desta reflexão. Entra então a subjetividade na escolha. O fundamental é que cada estatístico "eleja" o seu *Tema Central* e o faça desenvolver na medida do seu talento.

A temática está então centrada na Ciência e na Cultura e, podemos afirmar que, a Investigação Científica é como um motor de ambas.

A Cultura desenvolve-se também pelo valor e a disseminação do Boletim SPE. O Boletim outono 2016 “mostra” reflexão Sénior. É oportuno e urgente continuar a temática com os “novos seniores” outros “novos olhares” e reflexões – apresentar a perspetiva dos mais jovens, no caminho de seniores.

Produziremos então uma nova visão sobre *O Tema Central da Estatística – um novo olhar*.

5. A jeito de legado, como aconselha o estatuto do aposentado que me rege e apenas como uma breve reflexão sobre a criação de um tema central de Investigação em Estatística, permitam-me um “olhar” sobre a Teoria dos Outliers e os seus inovadores desafios.

**Outliers: um caminho na investigação!**

A experiência, muito em particular a sénior, pode tornar a investigação numa paixão. A investigação científica de base, a fundamental, tanto como a aplicada, constitui uma expressão significativa do domínio do homem sobre a natureza. Por sua vez, a Investigação Científica, em cujo meio nos movemos, é *leitmotiv* na “procura da Verdade”. É um *Tema*. Mas, a partir daqui “a fasquia” está muito alta! É uma pesquisa utópica que apenas nos deixará atingir a “pequena verdade”!? Essa “meditação”, por seu lado, estimularia a grande reflexão (de sempre!) que deseja (ou não) e procura (ou não) o concílio entre a razão (a ciência) e a fé que, muitas vezes, se questiona. A fé e a razão são as duas asas com as quais o espírito humano se eleva para a contemplação da Verdade. Se a Investigação Científica proceder segundo métodos de rigor absoluto e se o investigador se mantiver fiel ao seu objeto próprio não há oportunidade para qualquer dissensão. Além disso, se a pesquisa é feita nos pequenos pilares – os de segunda linha – ainda mais fácil é a compreensão mútua dos “contendedores”; que nunca chegarão a metas (supostamente) contraditórias. Mas, desçamos para o nível temático a que nos propomos neste Boletim.

Todas as grandes teorias começam com um pequeno passo e, muitas vezes, com base em dados (estatísticos). Pelo seu envolvimento em diversas matérias, a Estatística é transversal na Ciência e, por isso, a Investigação (em) Estatística é um grande pilar.

Na Investigação (em) Estatística, tal como noutra ciência, busca-se a verdade estatística. A verdade? A procura é um caminho contínuo que se constrói com pequenos passos – indecisos e frágeis no princípio – mas, firmes quando a experiência e a solidez de conhecimento o permite. No entanto, “não há caminhos há que caminhar” (diz o poeta) pois “dos caminhos apenas ficam os rastros” e, assim também na Estatística.

Caminhemos! À medida que se caminha – mais aqui e menos ali – surgem perguntas laterais sobre “objetivos”, “interesse” ou “valor” da “ciência produzida”. De novo, no final está sempre a “procura da verdade” e qual o seu valor...

Decerto, as pequenas contribuições são sólidas porque facilmente “se controlam”, “assimilam” e “arrumam”. Assim, ocupam o devido lugar! As grandes, por sua vez, poderão ser mais frágeis pela vulnerabilidade nos pequenos suportes em que se apoiam. E são estes que, formando um todo, criam uma teoria.

Como na Estatística, nas diversas áreas do conhecimento também existem *outliers* – desde a física até à metafísica. Em todas elas, grandes interrogações se podem formular sobre o tema Investigação. Pesquisando *outliers*, onde quer que se encontrem, criamos Ciência – em particular, Estatística. Por consequência, abrimos (mais) um caminho na pesquisa da Verdade.

Geramos força. É a Força dos Menores!

Apesar da sua longa história, “*o problema outlier*” continua a despertar o maior interesse tanto do ponto de vista teórico como prático. Nos mais diversos campos e aplicações, sendo uma eventual explicação para a proliferação na terminologia da teoria dos *outliers*, as revistas científicas internacionais contêm cada vez mais contribuições nessa área de estudo. Os mais importantes podem ser vistos nas revistas de referência, por exemplo, em *Applied Statistics*, *Technometrics*, *Biometrika*, *Journal of the Royal Statistical Society* ou *Journal of the American Statistical Association*. A investigação mais recente desenvolve ainda alguns métodos informais para pesquisa de observações discordantes em modelos estruturados e apresenta questões do maior relevo para amostras multivariadas. Nestas últimas novos e grandes desafios são colocados pela problemática da ordenação.

Da etimologia da palavra estatística, como vimos, resulta que o seu uso (mais ou menos) sempre se associa à colheita e ao tratamento de dados de modo a apoiar a administração de um estado. O sistema de justiça é, na realidade, um dos pilares fundamentais de um moderno estado e é basilar na política da

maior parte dos países. Metodologias probabilísticas já são usadas desde o século XIV para modelar e apoiar a decisão na aplicação da justiça. Os mais recentes avanços da teoria dos “outliers” têm surgido baseados na inferência estatística para interpretar dados de um ponto de vista legal. Os tribunais estão a introduzir novos desafios para os estatísticos que assim são solicitados a pronunciar-se em domínios de trabalho não tradicionais – por exemplo a correta aplicação da legislação envolvendo os direitos de autor ou, com muito maior impacto, as evidências bioestatísticas ou genéticas em determinada prova. Toda a prova admissível e não apenas a prova científica pode desempenhar um papel fundamental em tribunal. Assim, é fulcral o termo “admissível”. O “julgamento” feito por um estatístico poderá ser o apoio (também científico) na decisão do tribunal. São novos temas para a estatística e, por consequência, para a Teoria dos “Outliers”. Este é decerto o mais recente desafio para os “estatísticos dos outliers” e que se vem juntar a alguns outros objetivos científicos ainda por atingir tais como os que envolvem as metodologias multivariadas e todos os que mais diretamente se relacionam com questões de modelação estatística e inferência robusta. Esse desafio envolve a própria designação e terminologia pois se poderá seguir para a “nomo-estatística” ou “dicometria”, criando assim a possibilidade de, em breve, se começar a estudar “nomo-outliers” ou “dico-outliers”. E esse futuro dos “outliers em tribunal” já começou. É bastante a referência histórica dos exemplos enunciados inicialmente em Barnett and Lewis na segunda edição de *Outliers in Statistical Data* em 1994 ou casos recentes como o de Sally Clark em 2007 e que envolveu grandes discussões científicas protagonizadas, também e principalmente pela nossa congénere inglesa, a *Royal Statistical Society*.

O estudo de outliers, na prática, é feito nos mais variados domínios da Ciência – desde as ciências exatas até às ciências sociais. Na concretização da análise forense, por exemplo, os outliers percorrem a Física, a Química, a Balística e, obviamente, o Direito. Porque já incorporam uma “teoria transversal”; no futuro, decerto, os “outliers” continuarão a ocupar um lugar do centro na ciência estatística e nos métodos estatísticos pois sempre uma observação discordante será um desafio para o analista e da qual poderá depender o seu relatório final para a mais importante tomada de decisão. Qual o Estatístico que ainda não teve de “enfrentar” esse desafio? E como o venceu?

Mas, quando tudo está dito e feito o principal problema no estudo de observações eventualmente suspeitas, continua a ser aquele que desafiou os primeiros investigadores – O que é um “outlier” e como se deve trabalhar com essa observação? A investigação conducente às respostas permite construir um excelente tema central, por exemplo, no âmbito da *Estatística Forense*.

6. O Tema Central da Estatística, seguramente, situa-se no núcleo da Investigação Científica – e assim também em toda a ciência.

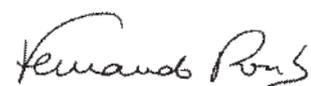
Todas e cada uma das suas áreas são igualmente importantes e responsáveis pelo maior ou menor sucesso, no seu todo, para a construção do edifício científico que suporta desde o mais pequeno detalhe até à teoria mais complexa. Esse edifício que todos temos o dever de ajudar a construir – e, muito especialmente, de bem construir e manter atualizado – é o garante de que todos os negócios do Estado são geridos em excelência. Para bem da Ciência e do Mundo. Como Ciência – transversal a todas as outras – é este um dos grandes valores da força da Estatística pelo qual devemos trabalhar... para a Verdade.

Tema Central? Porquê Central? Porque é motor! É o núcleo de base que dinamiza e faz desenvolver o conhecimento. Aqui, deve-se ter na devida conta o vasto conceito de desenvolvimento. Este, na Ciência em geral e na Ciência Estatística em particular recebe um significado peculiar.

Assim, a Ciência Estatística é uma nobre atividade, necessária ao corpo e ao espírito, indispensável ao conhecimento, ao bem-estar e à felicidade. Mas, a ciência é cara. Só os ricos a podem praticar. E, os pobres, se a praticam ficam mais pobres. Embora exigindo grande esforço e dedicação a solução deve estar em (apesar de tudo) fazer ciência para caminhar na saída desse dilema.

É o que se exige aos estatísticos portugueses congregados em torno de um projeto líder – a SPE!

O Tema Central do próximo Boletim SPE será *Incerteza em Engenharia*.



PS. A terminar, uma notícia que, como “boa nota”, devemos salientar. Como é registado na contracapa, o Boletim SPE voltou a ter o apoio da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia.

# Mensagem da Presidente

Caros Sócios da SPE

Aproveito este espaço para fazer um resumo dos acontecimentos de maior relevo nos últimos 6 meses.

Começo por dar destaque à realização do II Encontro Galaico-Português de Biometria com aplicações às Ciências da Saúde, à Ecologia e às Ciências do Meio Ambiente, nos dias 30 de junho, 1 e 2 de julho 2016, na Faculdade de Matemática da Universidade de Santiago de Compostela. O Encontro teve uma organização excelente assim como um elevado nível científico pelo que são devidos agradecimentos às Comissões Organizadoras e Comissões Científicas.

A Secção de Biometria da SPE, SB\_SPE, continua muito activa: para além do papel fundamental na organização do II Encontro Galaico-Português de Biometria, organizou ainda o I Encontro da Rede de Bioestatísticos Portugueses (RBP) e da SB\_SPE que contou com 32 participantes e tem diversos planos a anunciar brevemente.

A compilação das Actas do XXII Congresso da SPE está em bom andamento e ficará completa até ao fim do ano.

A SPE esteve representada em duas sessões Plenárias do Encontro Nacional da Sociedade Portuguesa de Matemática 2016. A colega Andreia Hall representou a nossa Sociedade na sessão Ensino: School Mathematics Education in the U.S. and the Common Core Standards que contou com a presença de Hung-Hsi Wu, University of California, Berkeley. O colega Pedro Campos representou a Sociedade na sessão Divulgação: A Bicicleta que Calcula Áreas e as Minhas Reflexões Sobre Divulgação, organizada por Rogério Martins, FCT - Universidade Nova de Lisboa.

A SPE passa a estar representada na Comissão ICMLPT (International Commission on Mathematical Instruction) pela colega Andreia Hall que representará também a SPE no Conselho Científico do 2º CiEMeLP (Conferência Internacional do Espaço Matemático em Língua Portuguesa) a ter lugar em 2018 na Universidade de Campinas.

A colaboração internacional entre sociedades estatísticas europeias, FENStatS está em franco desenvolvimento e há diversas propostas para organização de escolas ECAS, European Courses in Advanced Statistics, das quais serão dadas notícias por mail, <http://www.fenstats.eu/> e <http://ecas.fenstats.eu/>.

Decorreu mais um concurso Prémios Estatístico Júnior 2016, com o patrocínio habitual da Porto Editora. Detalhes sobre os premiados e a Sessão de Atribuição dos Prémios podem ser consultados neste Boletim. As candidaturas aos Prémio SPE 2016 e Prémio Iniciação à Investigação 2016 estão a ser analisadas pelos respectivos Júris. Estes prémios serão entregues numa sessão comemorativa, cujo programa provisório está anunciado neste Boletim e para a qual peço deste já a atenção de todos os sócios.

A Sociedade é dos sócios e para os sócios e é, essencialmente, o que os sócios fizerem dela. Assim, a Direcção está aberta a apoiar todas as iniciativas em prol da Estatística em Portugal.

Porto, 12 de Setembro de 2016

Cordiais saudações

Maria Eduarda Silva

# Notícias

## • Recordando o Prof. António St. Aubyn: uma breve homenagem

*O tributo singelo da minha enorme gratidão por tudo o que com ele aprendi, que muito ultrapassou a vertente científica*

No dia 18 de Abril de 2016, bem cedo, fomos surpreendidos pela triste notícia do falecimento súbito do Prof. António St. Aubyn, Professor Catedrático Emérito do Instituto Superior de Agronomia (ISA) da ULisboa.

Foi um matemático e estatístico que deixou uma marca profunda na Universidade portuguesa pela sua intensa actividade académica e científica, colaborando com várias instituições e apoiando não só alunos de licenciatura, mestrado e doutoramento como ainda inúmeros trabalhos de investigação.

Partiu o Homem que marcou gerações de estudantes, que hoje o recordam com grande saudade e profundo agradecimento pelo que lhes legou não só como professor e cientista, mas também como amigo.



Nascido a 10 de Março de 1937 na Ribeira Brava, São Nicolau, Cabo Verde, ali fez os estudos secundários no Liceu Gil Eanes que concluiu em 1955.

Veio frequentar a Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra (FCUC) onde terminou, em Outubro de 1959, a licenciatura em Matemática. Iniciou então funções como segundo assistente da secção de Matemática da FCUC. Em Outubro de 1961 foi-lhe concedida uma bolsa da Fundação Calouste Gulbenkian para preparar, equiparado a bolseiro do Instituto de Alta Cultura, a sua tese de doutoramento em Paris.

Em Janeiro de 1970 defendeu em Coimbra a tese intitulada “Perturbações de Equações Diferenciais não lineares”. Em Fevereiro de 1970 tomou posse do lugar de 1º assistente da FCUC, em Março passou a Professor Auxiliar, lugar que ocupou até Dezembro do mesmo ano. Neste período escreveu dois trabalhos didácticos de referência intitulados Lições de Análise Infinitesimal e Lições de Álgebra Linear.

Aqui “*revolucionou o ensino da Matemática, introduzindo uma nova dinâmica, não só do ponto de vista científico, mas também no aspecto relacional, pedagógico e humano. Foi, para todos nós, uma marca fundamental, nas nossas vidas pessoais e profissionais! Outras pessoas que com ele conviveram transmitem o mesmo testemunho de excelência, acerca da sua pessoa*” (agradeço à Dr<sup>a</sup> Maria Piedade Cordeiro Dias – sua ex-aluna de Coimbra – ter-me enviado uma mensagem que lhe dedico e permitido usar este excerto).

Em Janeiro de 1971 tomou posse do lugar de Professor Auxiliar na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (FCUL) onde foi responsável por variadíssimas disciplinas. Convidado a integrar o corpo docente do então 3º Grupo de Disciplinas do ISA tomou posse do lugar de Professor Extraordinário equiparado do ISA em Junho de 1975.

Estudei na Faculdade de Ciências na época em que o Prof. St. Aubyn lá leccionou, mas não tive oportunidade de ser sua aluna. Foi já no ISA, quando em Outubro de 1976 concorri a um lugar para assistente eventual, que o vim a reencontrar. Em Abril de 1977 tomei posse e comecei uma carreira “longa” trabalhando ao lado do Prof. St. Aubyn. Neste breve testemunho da sua carreira, obra e principalmente “da pessoa que foi”, não poderei deixar de recordar e enaltecer a sua enorme preocupação em apoiar os jovens assistentes que iam chegando... Muito gostava ele de, sempre que possível, nos juntar numa sala e nos dar uma aula (!) sobre o que se estava a ensinar e a forma de o transmitir aos nossos estudantes. As suas qualidades pedagógicas, a sua alegria de ensinar, os conhecimentos profundos que possuía daquilo que leccionava não deixavam ninguém indiferente. Ainda pouco tempo antes de se aposentar decidiu recordar as aulas de Teoria da Medida e Integração e ... lá estávamos nós a assistir ao curso que, durante vários dias, decidiu apresentar-nos!

Continuando a recordar a sua carreira académica, em Julho de 1977 realizou concurso para Professor Extraordinário de Matemática do ISA. Alguém imagina hoje uma aula dada num quadro a giz com duas faces? O candidato ia escrevendo, escrevendo... e, quando chegava ao fim, voltava-se o quadro e um “contínuo” apagava-o. Entretanto o candidato recomeçava a escrever do lado do júri! Recordo bem a profunda impressão que essa “Aula” nos deixou.

Em 1979 ocupou o cargo de Professor Catedrático de Matemática do ISA até se aposentar, em 2004. Neste ano recebeu a distinção de Professor Emérito da então Universidade Técnica de Lisboa (UTL).



Sempre muito interessado por se actualizar, com destaque pelas Novas Tecnologias que estavam em explosão, em 1981 integrou a Comissão Informática da UTL. Foi um grande impulsionador da criação do Centro de Cálculo da UTL e em 1984 do Centro de Informática do ISA (CIISA). Foi o primeiro presidente do CIISA. Nesta qualidade incentivou a formação de vários técnicos e, ao longo de mais de uma década, manteve o ISA na vanguarda do que foi surgindo no domínio informático. Todo este seu trabalho e empenho teve um impacte profundo no desenvolvimento das actividades científicas, académicas e de investigação do ISA.

A actividade académica que desenvolveu e os ensinamentos que foi “espalhando” ao longo dos seus intensos anos de docente não se ficaram pelas Escolas mencionadas. O Prof. St. Aubyn também leccionou no Instituto Superior Técnico, na Faculdade de Motricidade Humana (na altura o Instituto Superior de Educação Física), no Instituto Superior de Economia e Gestão e, ainda na Universidade Lusíada, onde manteve actividade docente até 2014, ano em que decidiu retirar-se.

Porém, tal não significou que o Prof. St. Aubyn deixasse de se interessar e de participar nas muitas actividades em que sempre esteve envolvido durante a sua carreira. Continuou a participar em júris de provas de agregação e de doutoramento. Recordo ter estado com ele no ISA, em Fevereiro de 2016, quando integrou o júri de Doutoramento em Matemática e Estatística de um dos nossos doutorandos. Na altura, apesar de preocupado com uma intervenção cirúrgica a que o filho se ia submeter, estava entusiasmado com a perspectiva da nossa participação, no início de Junho, na homenagem que a Universidade da Madeira ia prestar celebrando o aniversário da nossa querida colega Rita Vasconcelos. Já não estava entre nós, mas aí foi recordado com muito carinho e agradecimento por

todos os que o conheceram. Entre estes, destaco o Sr. Reitor da Universidade da Madeira, que foi seu aluno na FCUL.

Mas, como já manifestei, a sua actividade no seio da comunidade foi muito para além da carreira docente, no âmbito da qual publicou vários trabalhos e alguns livros, o último dos quais, em 2011 em co-autoria com Nuno Venes, intitulado *Análise de Dados - Aplicações às Ciências Económicas e Empresariais*. Na vertente científica foram muitos os artigos publicados em revistas especializadas e em actas de congressos. Proferiu inúmeras palestras. Foi Presidente da Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM) de 1990 a 1994. Foi representante da SPM na fundação da Sociedade Europeia de Matemática e representante de Portugal na União Matemática Internacional. Foi Presidente do Conselho Fiscal da Sociedade Portuguesa de Estatística e membro da Comissão de Acompanhamento do Centro de Estatística e Aplicações da ULisboa desde 2010.

Figura muito estimada pela comunidade cabo-verdiana, teve um papel proeminente na luta pela independência do País, tendo colaborado com as autoridades de Cabo Verde na criação de condições para o desenvolvimento do ensino superior e na orientação de cursos de actualização de professores de Matemática do ensino secundário. Foi membro fundador da Academia das Ciências e Humanidades de Cabo Verde. Há algum tempo o Dr. António Afonso Delgado, professor da Universidade de Cabo Verde, que foi seu aluno de doutoramento, juntou um grupo de amigos e admiradores do Prof. St. Aubyn com o objectivo da criação de uma fundação em sua homenagem, a *Fundação Professor António St. Aubyn*, de apoio ao desenvolvimento e ao ensino em Cabo Verde.



Visita do Prof. St. Aubyn a Cabo Verde (fotos gentilmente cedidas pelo Dr. António Afonso Delgado).

Dedico a parte final deste meu singelo testemunho à vivência do Prof. St. Aubyn no ISA e ao que mais me tocou na oportunidade que tive de com ele privar. Saliento o papel activo que teve em incentivar os seus assistentes a prosseguir a respectiva carreira académica pela realização de provas de Capacidade Científica e Aptidão Pedagógica, de Cursos de Mestrado e de Provas de Doutoramento. Recordo o seu empenho para transformar a Secção de Matemática em Departamento de Matemática (DM), o que conseguiu concretizar em 1992 quando, de acordo com os estatutos de então, o número de doutorados e docentes o permitiu. Foi o primeiro Presidente do DM. Quero ainda assinalar o seu papel preponderante na criação do Mestrado em Matemática Aplicada às Ciências Biológicas e do Doutoramento em Matemática e Estatística, que funcionaram com sucesso durante vários anos no ISA.

Vi-o sempre manifestando a maior preocupação pelo rigor do ensino e pela qualidade de uma *formação base sólida* dos nossos licenciados, o que é bem testemunhado por muitos alunos que passaram pelo ISA. Depois de aposentado do ISA, encontrámo-nos várias vezes, porque íamos almoçar, porque eu gostava de o visitar bem como à esposa, ou ainda porque participávamos em júris de provas. Nunca vi a sua boa disposição, a cordialidade, a energia e a curiosidade esmorecerem.

Atrevo-me a dizer que, por conjugação ou não de várias circunstâncias que têm varrido a nossa Universidade e particularmente algumas Escolas, o falecimento do Prof. St. Aubyn parece ter ocorrido numa fase em que se está a encerrar um capítulo da formação que o ISA oferecia.

Não podia ter escrito sobre o Prof. St. Aubyn sem a emoção que 40 anos de convívio acarretam. Quando se escreve sobre alguém com a grandeza de carácter e valor do Prof. St. Aubyn, inevitavelmente há que fazer a escolha dos aspectos que mais nos tocaram. Por isso estou certa que muito terá ficado por dizer.

Faleceu a uma segunda-feira de manhã e tive conhecimento, uns dias depois, que na sexta-feira anterior à tarde estivera no Centro de Informática do ISA e me tinha procurado.... eu tinha saído ... já não vamos voltar a ver-nos.

Manuela Neves

(ISA e CEAUL)

(Texto escrito ao abrigo do antigo acordo ortográfico)

## • 1.º Encontro da Rede de Bioestatísticos Portugueses e da Secção de Biometria



Realizou-se no passado dia 9 de Junho na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (FCUL) o 1º Encontro da Rede de Bioestatísticos Portugueses e da Secção de Biometria da Sociedade Portuguesa de Estatística (SPE), com apoio do Centro de Estatística e Aplicações, Universidade de Lisboa (CEAUL)

Este encontro contou com a presença de 32 participantes de várias instituições de todo o país onde foi discutida a necessidade de criar uma comunidade de bioestatísticos nacionais para promover colaborações científicas, divulgação e discussão de problemáticas da área e aumentar o impacto da Biometria/Bioestatística na sociedade.

O Encontro contou com as intervenções do Prof. Carlos Daniel Paulino (Instituto Superior Técnico e CEAUL), Profª. Lisete Sousa (FCUL e CEAUL) e da Drª. Diana Prata (Instituto de Medicina Molecular, Faculdade de Medicina da Universidade de Lisboa).

O Prof. Carlos Daniel Paulino apresentou uma visão sobre o que é a Biometria e a Bioestatística destacando o que pode distinguir estas duas áreas. A Profª. Lisete Sousa deu a conhecer o Mestrado em Bioestatística da FCUL apresentando estatísticas e o perfil dos alunos formados desde sua criação, referindo que os dados mais recentes revelam um aumento da procura pela formação nesta área. A Drª. Diana Prata, líder do grupo de Neurobiologia Humana e Cognição no Instituto de Medicina Molecular, apresentou o trabalho efetuado pelo grupo destacando a grande necessidade de colaboração com bioestatísticos, que é sentida por parte de vários investigadores nas áreas da Biologia e Medicina.

Foi ainda apresentada a Rede de Bioestatísticos Portugueses (RBP), uma rede criada em Outubro de 2015 cujos principais objetivos são aproximar a comunidade nacional de bioestatísticos, divulgar o trabalho efetuado pelos seus membros e facilitar a ligação entre bioestatísticos e investigadores de outras áreas onde a Estatística se tem tornado uma ferramenta essencial. A RBP funciona atualmente sob a forma de *mailing list* que divulga um boletim (*newsletter*) trimestral e textos/artigos enviados pelos seus membros. Os interessados em pertencer à rede podem enviar um *e-mail* para o seguinte endereço: [redebiostat@gmail.com](mailto:redebiostat@gmail.com). A RBP está aberta para divulgação de artigos/textos por parte de todos os seus membros bem como de eventos e oportunidades de bolsa/emprego.

Devido ao adiantado da hora destinada ao encontro, relatou-se apenas um sumário das atividades realizadas pela Secção de Biometria da SPE (SBioSPE), criada em 12/02/2014 como Secção Temática na Assembleia Geral da SPE por proposta dos Profs Pedro Oliveira (ICBAS, Universidade do Porto) e Giovani Silva (DM-IST e CEAUL) mas que ainda se encontra em processo de organização e diversificação das suas atividades. Até ao momento, as atividades da SBioSPE têm sido centradas na participação da organização dos Encontros Luso-Galaicos de Biometria e afins, promovidos pela SPE e pela Sociedade Galega para a Promoción da Estatística e Investigación de Operacións (SGAPEIO): i) I Encontro Luso-Galaico de Biometria, que teve lugar em Braga (Universidade do Minho) de 14 a 16 de julho de 2013; ii) I Encontro Luso-Galaico de Estatística em Ambiente e Ecologia, que decorreu em Vila Real (Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro) de 6 a 8 de novembro de 2014; iii) II Encontro Galaico-Português de Biometria com aplicações às Ciências da Saúde, Ecologia e Ciências do Meio Ambiente, que se realizou em Santiago de Compostela (Faculdade de Matemática da Universidade de Santiago de Compostela) de 30 de junho a 2 de julho de 2016.

Por fim, após as reações positivas evidenciadas nessa iniciativa da RBP e da SBioSPE, novos encontros serão realizados com o objetivo de reforçar as ligações dentro da comunidade nacional a trabalhar em Bioestatística/Biometria e promover a divulgação e discussão de várias temáticas desta área.

Miguel Pereira e Giovani Silva

## • II Encontro Galaico-Português de Biometria

Nos passados dias 30 de junho, 1 e 2 de julho de 2016, realizou-se o II Encontro Galaico-Português de Biometria com aplicações às Ciências da Saúde, à Ecologia e às Ciências do Meio Ambiente. Tratou-se de um encontro organizado conjuntamente pela Sociedade Portuguesa de Estatística (SPE) e pela Sociedade Galega para a Promoção da Estatística e Investigação Operacional (SGAPEIO) e que teve lugar na Faculdade de Matemática da Universidade de Santiago de Compostela, na belíssima cidade de Santiago de Compostela.

Tratou-se de um importante evento de difusão dos últimos avanços no desenvolvimento e aplicação de métodos estatísticos e matemáticos na biologia, medicina, ecologia, psicologia, farmacologia, agricultura, meio ambiente e outras ciências da vida. Contou com inúmeras contribuições dos participantes, que apresentaram 57 comunicações orais e 40 em formato de póster. De onde se destaca a comunicação oral de Ana López-Cheda *et al.*, intitulada SELECCIÓN DE COVARIABLES SIGNIFICATIVAS EN LA INCIDENCIA DE UN MODELO DE CURACIÓN NO PARAMÉTRICO galardoada com o prémio à melhor comunicação sobre aplicações em Ciências da Saúde. Tal como a comunicação oral de Isabel Fuentes-Santos *et al.*, intitulada UN TEST NO PARAMÉTRICO PARA COMPARAR EL PATRÓN ESPACIAL DE LOS INCENDIOS FORESTALES REGISTRADOS EN GALICIA, galardoada com o prémio à melhor comunicação sobre aplicações em Ecologia e Meio Ambiente. O prémio para melhor poster foi para a publicação de Luís Margalho *et al.*, com o título MODELLING ENVIRONMENTAL MONITORING DATA COMING FROM DIFFERENT SURVEYS.

Antecedeu ao encontro o minicurso de “Análise de sobrevivência” ministrado de forma brilhante por Luis Filipe Meira Machado, da Universidade do Minho e que contou com a participação de cerca de 50 participantes.

O encontro contou, também, com a presença de reconhecidos profissionais da Estatística tais como Geert Molenberghs, da Universidade de Hasselt, Daniela Cocchi, da Universidade de Bologna, Thomas Kneib, da Universidade de Gottingen, e Carlos Alberto Brauman, da Universidade de Évora, que contribuíram com interessantes sessões plenárias.

As 4 sessões convidadas dinamizadas por José Luis Andújar, do Conselho Superior de Investigações Científicas, Pere Puig Casado, da Universidade Autónoma de Barcelona, Michela Cameletti, da Universidade de Bergamo, e David Valentín Conesa Guillén, da Universidade de Valência, de caráter inovador e relevante na medida em que deram a conhecer tanto importantes avanços nos métodos estatísticos e matemáticos como a incessante necessidade de se fazer uma ponte de ligação entre a biometria e as diferentes áreas, tais como agricultura, medicina, entre outras.

Ainda, a mesa-redonda, moderada por José Antonio Fernández, da Universidade de Corunha, contribuiu para uma reflexão sobre o papel da Estatística nas Ciências da Saúde, da Ecologia e do Meio Ambiente, com discussões e pensamentos por parte de David Guillén, José Miguel Pereira, da Universidade de Lisboa, Luiza Gonçalves, da Universidade Nova de Lisboa, e Xurxo Mariño Alfonso, da Universidade da Corunha.

Foi num ambiente descontraído e rico em interessantes interações entre investigadores de várias nacionalidades, não só entre portugueses e espanhóis, que se viveu este II Encontro Galaico-Português de Biometria.

Ana Borges

## • O homem que dança com os números

- seguido de outras histórias sobre as nossas malas de viagens matemáticas



O homem entra no palco descalço e com uma mala de viagem. É o Pedro Carvalho. Diz que vai explicar Matemática. Abre a mala e começa a tirar de lá uns números. Alguns acertam-nos na cara. Como há luzes e fumos e muita magia no ar, isso faz com que não se perceba se os números são reais ou imaginários. Depois, começa a dançar como um bailarino clássico. Agarra num de nós e, com uma fita, envolve-nos nela e com ele. E aperta. Ficamos imóveis. Tudo isto enquanto dança. Com um dos braços mostra, sorrindo, que conseguiu um triângulo equilátero. Ficamos de novo imóveis e, depois, isósceles. De novo, bruscamente, desenrola-nos e damo-nos conta que formamos um quadrado apoiado nas nossas quatro mãos. Sempre calado, consegue agora duas retas paralelas. O público vai aplaudindo. Ele mostra mais números, mais figuras. Afinal, ele próprio é um número. Um número do circo matemático. O Rogério Martins também levava uma mala. Antes, já tinha tirado de lá uma bicicleta com que mediu a área desenhada por um voluntário e tinha desenrolado um coelho que atirou para o público. Foi, aliás, esse coelho que escolheu aleatoriamente os voluntários. Depois voltou para a mala a correr. Desapareceu. E isto é Matemática! (disse ele a rir). A mala do Jorge Nuno Silva também trazia números. E ele fez números com cartas, como habitualmente no seu circo matemático. A mala do Paulo Ribeiro pôs a Matemática on line. Ele tirou de lá o PortalMath, talvez o mais completo para melhorar os conhecimentos de Matemática e não só... Ficamos todos ligados. As páginas voavam por cima das nossas cabeças quando se apagaram as luzes. Realidade virtual? A mala do Jorge Buescu trazia muitos livros e muitos anos de divulgação científica. Percebemos que o ensino das ciências requer cuidados, para podermos ser tão bons como os outros. Mas temos potencial. Na minha mala, eu levava a Explorística. Tirei de lá um submarino e o público pode viajar pelo lago à procura dos répteis: Depois, pesámos e medimos cada animal e calculámos as suas medidas estatísticas mais importantes. Ficamos todos molhados, mas valeu a pena. Pronto, acho que exagerei um pouco nesta crónica. O coelho do Rogério talvez não fosse um coelho a sério. Parecia, ao longe... Mas a bicicleta era real... Foi assim que vasculhámos as nossas malas de viagens matemáticas.

Foi na mesa redonda do 2º dia no Encontro Nacional da Sociedade Portuguesa de Matemática, que se realizou no passado dia 12 de Julho no Barreiro. Dinamizada pelo Rogério e pela sua bicicleta.

Mais informação, em <http://enspm16.spm.pt/pt/mesasredondas>.

O Pedro Carvalho é professor de matemática, coreógrafo e bailarino. Criou o espetáculo de dança e matemática "O homem que só pensava em números (Solo)", com apresentações em festivais, teatros e escolas e continua a fazer espetáculos por estes dias. Rogério Martins é Professor Auxiliar na UNL, sendo conhecido pelo programa de televisão 'Isto é Matemática', que aborda tópicos da matemática de forma descontraída e divertida. Jorge Nuno Silva, é professor na FCUL e Presidente da Associação Ludus, uma associação sem fins lucrativos que tem por objectivo promover e divulgar a Matemática, nas suas diversas vertentes, nomeadamente a cultural, histórica e recreativa. Paulo Ribeiro, professor de Matemática do Ensino Básico e Secundário, criador e um dos dinamizadores do site PortalMath ([www.portalmath.pt](http://www.portalmath.pt)). Jorge Buescu é professor de Matemática na FCUL. É um entusiasta da divulgação científica, sendo autor ou co-autor de uma dezena de livros. O Pedro Campos é professor auxiliar, na FEP e colaborador do Instituto Nacional de Estatística. Tem dedicado grande parte da sua vida à divulgação da estatística através do ALEA e da Explorística.

Pedro Campos

## • O Ensino da Matemática em debate no encontro nacional - SPM 2016

Nos dias 11 a 13 de julho de 2016 decorreu na Escola Superior de Tecnologia do Barreiro o Encontro Nacional da Sociedade Portuguesa de Matemática. O encontro contou com a participação do Professor Hung-Hsi Wu, especialista em Educação Matemática, que apresentou uma conferência plenária intitulada “School Mathematics Education in the U.S. and the Common Core Standards”. No seguimento desta conferência houve um debate sobre o ensino da matemática, moderado pelo presidente da Sociedade Portuguesa de Matemática, Fernando Pestana da Costa, que contou com a participação dos professores António Bivar e Henrique Guimarães da Univ. de Lisboa, Isabel Nogueira da ESSE Paula Francinetti do Porto, Hung-Hsi Wu da Univ. de Berkeley e eu própria em representação da SPE. Neste debate focaram-se alguns dos aspetos que mais preocupam a comunidade matemática ao nível do ensino desta disciplina nos níveis básico e secundário. Foram referidos problemas ao nível da formação inicial de professores para o ensino básico (1º e 2º CEB), em particular a necessidade de proporcionar uma formação de qualidade a estes professores, aprofundando os temas da matemática (dita elementar) que são ensinados ao longo do ensino básico, e a falta de competências a matemática dos atuais candidatos a professores. Foram também referidos vários aspetos relacionados com as atuais (e anteriores) metas curriculares para a matemática no ensino básico e secundário. O ensino da matemática nestes níveis escolares é complexo e não existem soluções fáceis e universais para os problemas existentes. Basta pensar que por um lado se pretende que o ensino da matemática seja acessível a toda a população em idade escolar e por outro, possua um nível adequado a uma boa progressão de estudos nas áreas científico-tecnológicas. Muito embora as metas curriculares sejam apenas uma parte deste problema complexo, a maior parte do debate focou-se na discussão de aspetos relacionados com a última revisão das mesmas. No seu todo, o debate focou-se em aspetos gerais e o cumprimento do tempo previsto para o mesmo não permitiu aprofundar outros temas.

Andreia Hall  
Universidade de Aveiro

## • Prémios Estatístico Júnior 2016 - sessão de entrega em Coimbra

A Sociedade Portuguesa de Estatística promove anualmente o Prémio Estatístico Júnior, com o patrocínio da Porto Editora.

Com esta iniciativa pretende-se incentivar o interesse pelas áreas de Probabilidades e Estatística dos estudantes dos Ensinos Básico e Secundário, e dos Cursos de Educação e Formação (CEF) e de Educação e Formação de Adultos (CEFA).

O Prémio Estatístico Júnior distingue anualmente sete trabalhos e é atribuído aos estudantes que realizam cada um dos trabalhos e também a alguns dos professores orientadores, sendo a sua entrega formal realizada numa sessão que lhe é expressamente consagrada.

Este ano, os trabalhos distinguidos com o Prémio Estatístico Júnior 2016, que serão entregues nesta sessão, versam estudos sobre temas atuais e interessantes tais como estilos de vida, situações de emergência, hábitos ou comportamentos sociais.

Nesta edição do Boletim SPE publicamos a lista dos premiados.

A sessão decorrerá no dia 15 de Outubro de 2016, pelas 16 horas, nas instalações da FNAC (Fórum) em Coimbra. Contará com a presença do Professor Rogério Martins (FCT\_UNL) que apresentará uma palestra intitulada “**A minha bicicleta calcula áreas!**”.

O próximo Boletim terá um relato deste importante acontecimento.

PRÉMIO  
ESTATÍSTICO  
JÚNIOR  
2016

Candidaturas até  
26 DE MAIO  
DE 2016

CONTACTOS  
Sociedade Portuguesa de Estatística  
Bloco C4, Piso 4 – Campo Grande  
1749-018 Lisboa  
Telf./Fax 21 750 01 20

www.spestatistica.pt  
spe@fc.ul.pt

Com o apoio  
Porto  
Editora

## • Aniversário da SPE - 28 de novembro - marque a data na sua agenda

A fim de comemorar os 36 anos da nossa Sociedade, a Direcção da SPE está a organizar uma sessão comemorativa da efeméride que terá lugar em Lisboa na tarde do dia 28 de Novembro 2016.

O programa conta com uma palestra proferida pelo Prof. João Branco e com a entrega dos prémios *SPE 2016* e *Iniciação à Investigação 2016*.

A entrega dos prémios será seguida pela apresentação dos trabalhos premiados. Fica ainda a informação de que haverá algumas agradáveis surpresas ...

ES

# Enigmística de mefqa

variância  
variância  
variância  
variância  
variância

$\bar{x}$   
—  
vida

No Boletim SPE primavera de 2016 (p.10):

DADOS

(A, N, Á, L, I, S, E)

Base de Dados

Análise Multivariada

## MAGIA MATEMÁTICA COM PROBABILIDADES

Andreia Hall, *Andreia.hall@ua.pt*

*CIDMA, Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações  
Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro*

À primeira vista Matemática e Magia não parecem ter muito em comum, mas um olhar mais atento rapidamente se dá conta que esta relação existe desde há muito tempo com benefícios valiosos para ambas as partes. Nos últimos anos vários têm sido os professores de Matemática que se dedicam à divulgação desta ciência e à promoção do interesse por ela quer nos seus alunos quer na sociedade em geral. Fernando Blasco, professor da Universidade Politécnica de Madrid, está “*plenamente convencido de que si todo el mundo conociera más detalles sobre lo que rodea a la Matemática, acabaría disfrutando con esta disciplina. (...) El mundo de las Matemáticas nos ofrece tanto seriedad y rigor como ilusión y divertimento. Muchos estarán convencidos de que las Matemáticas son algo frío y aburrido, pero a pesar de las firmes convicciones de algunos, las cosas no son siempre como parecen*” (Blasco, 2015). A Magia é isto mesmo, fazer com que as coisas não pareçam o que são, ou pareçam o que não são, causando surpresa, deslumbramento e divertimento constantes. E o mais fantástico é que tudo isto pode ser feito através da Matemática. A exploração das relações entre a Magia e a Matemática tem um enorme potencial no desenvolvimento de atividades, em contexto escolar ou fora dele, que promovam de forma eficaz o interesse pela Matemática. Na sala de aula, a exploração e o estudo de um efeito mágico pode converter-se num problema matemático e proporcionar uma fonte de raciocínio e de investigação. Fora da sala de aula, a realização de efeitos mágicos baseados em Matemática podem proporcionar uma relação positiva com esta ciência e despertar a curiosidade para a compreensão dos mesmos, ou seja, para a aprendizagem da Matemática. No Reino Unido o Professor Marcus du Sautoy dirige o grupo *Marcus’ Marvellous Mathematicians* que se desloca a escolas ou centros de ciência para comunicar Matemática usando, entre outros recursos, a magia matemática (University of Oxford, 2015). Em Espanha, o Professor Fernando Blasco desenvolve inúmeras atividades de divulgação da Matemática, incluindo sessões de magia matemática. Este professor tem um site e blogue destinados à partilha das suas ideias (Blasco, 2015) e publicou um livro sobre magia matemática (Blasco, 2007). Em Portugal, tal como noutros países, a magia matemática tem sido utilizada para promover uma atitude positiva para com a Matemática e despertar o interesse e a curiosidade por esta ciência. Em março de 2012, através da Associação LUDUS, foi criado o projeto *Circo Matemático*, coordenado pelo Professor Jorge Nuno Silva da Universidade de Lisboa. Trata-se de um projeto onde se fundem competências complementares para obter uma capacidade de intervenção de grande magnitude a nível da promoção da Matemática, conscientes de que é uma tarefa urgente em Portugal. Foram criados dois núcleos (Lisboa e Aveiro) capazes de fazer chegar a todas as zonas do país as atividades propostas. A magia, o esplendor, a surpresa e o deslumbramento associados ao circo são os meios a que o *Circo Matemático* recorre para exhibir alguns efeitos matemáticos. Todas as atividades que estão incluídas ou que venham a fazer parte do reportório do Circo, têm cariz matemático e muitas delas estão associadas a problemas matemáticos que, apesar de motivarem experiências lúdicas, têm a ver com áreas bastante relevantes e complexas.

Uma das áreas da Matemática que se pode encontrar por detrás de alguns truques de magia é a Probabilidade. Por vezes de forma mais direta e outras mais indireta, a verdade é que a Probabilidade aparece com alguma frequência. Alguns truques, por exemplo com baralhos de cartas preparados, levam os espetadores a pensar que o mágico usufruiu de um golpe de sorte ao conseguir um certo resultado aparentemente muito pouco provável. Nestes casos a Probabilidade entra de forma indireta, fazendo uso de expectativas intuitivas que os espetadores têm da noção de probabilidade, mas na realidade a base dos truques é completamente determinista. Outros truques fazem real uso do cálculo de probabilidades e tiram proveito de acontecimentos que aparentemente são aleatórios (sem benefício para nenhuma das partes) e que na realidade oferecem vantagem ao mágico que os realiza. Estes truques têm a desvantagem de não oferecer total garantia de sucesso ao mágico que os apresenta. Por isso mesmo não são frequentemente realizados em sessões de magia. No entanto, em contextos de índole pedagógica este tipo de truques tem uma mais valia: são ótimos pretextos para despoletar o raciocínio matemático e conduzir os alunos a resolver problemas no âmbito do cálculo de probabilidades. Neste contexto, em 2013, a professora do ensino secundário Justina Melo defendeu a sua dissertação do Mestrado em Matemática para Professores, da Universidade de Aveiro, dedicada ao tema *Probabilidades e Magia Matemática* (Melo, 2013). Nesta dissertação encontramos alguns truques de magia baseados em probabilidades bem como alguns paradoxos que são interessantes para explorar com alunos do ensino básico e secundário. Neste trabalho iremos descrever dois truques que se podem encontrar nessa dissertação e um terceiro truque que tivemos a oportunidade de ver executar no Recreational Mathematics Colloquium IV que se realizou em Lisboa em janeiro de 2015.

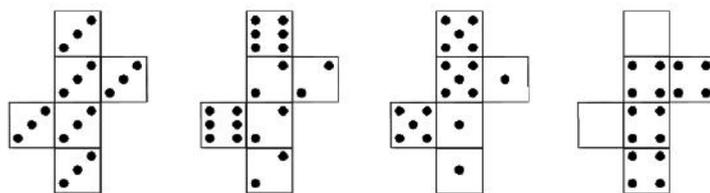
### Dados não transitivos

Dado um conjunto de elementos, podemos estabelecer relações entre estes e estudar as suas propriedades. Uma relação diz-se transitiva se ao escolhermos três quaisquer elementos  $a$ ,  $b$  e  $c$  tais que se  $a$  se relaciona com  $b$  e  $b$  se relaciona com  $c$  então  $a$  também se relaciona com  $c$ . As relações de ordem (maior, menor, maior ou igual e menor ou igual) são relações transitivas a que estamos bem habituados.

É possível conceber conjuntos de dados que surpreendem os seus jogadores pelo facto de não possuírem transitividade e esse facto ser contraintuitivo. Nesses conjuntos qualquer que seja o dado escolhido por um jogador é possível escolher outro dado que lhe ganhe em probabilidade. Estes dados dizem-se não transitivos e já são conhecidos desde o início dos anos 70 (Gardner, 1970). Em seguida iremos apresentar dois desses conjuntos.

### Dados de Brad Efron

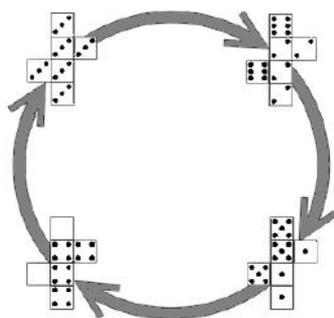
Bradley Efron (nascido em 1938) é professor na Universidade de Stanford bem conhecido no mundo da Estatística pela introdução da técnica de reamostragem do bootstrap. No entanto, Efron também deu a sua contribuição para a área da Matemática Recreativa propondo um conjunto de dados não convencionais que dão origem a um jogo muito curioso. Os dados de Efron têm a seguinte configuração:



O jogo desenrola-se da seguinte forma: dois jogadores (um voluntário e o mágico) escolhem cada um o seu dado. O primeiro a escolher é o voluntário e o segundo é o mágico dando, aparentemente, mais liberdade ao voluntário. Os dois jogadores lançam os seus dados e ganha 1 ponto aquele que obtiver um maior número de pintas (voltadas para cima). Seguidamente, o voluntário pode alterar a sua escolha de dado (e o mágico também) e repetem o lançamento. Vão assim lançando pares de dados até um certo número pré especificado de lançamentos. Ganha o que tiver acumulado um maior número de pontos.

Qualquer pessoa com um pouco de conhecimentos em probabilidade percebe rapidamente que estes dados, sendo todos diferentes, apresentam probabilidades desequilibradas de ganhar pontos, i.e., escolhendo dois dados há um deles que ganha ao outro em probabilidade. O que não é perceptível é que qualquer que seja o dado escolhido inicialmente é sempre possível escolher outro dado que lhe ganhe, em probabilidade. As probabilidades de um dado ganhar ao outro formam uma cadeia circular, por conseguinte não transitiva. Desta forma, o 2º jogador, fazendo as escolhas adequadas, fica em vantagem sobre o 1º e, pela lei dos grandes números, ao fim de alguns lançamentos a probabilidade de acumular mais pontos que o adversário torna-se muito elevada.

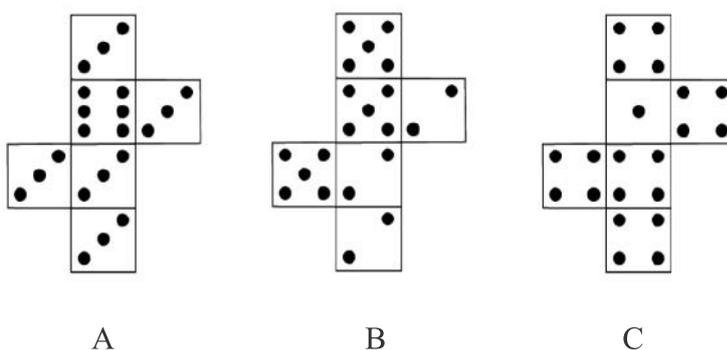
Neste conjunto de dados forma-se a seguinte cadeia em que a probabilidade de um dado ganhar ao seu vizinho, no sentido das setas, é sempre  $2/3 \gg 0,5$ .



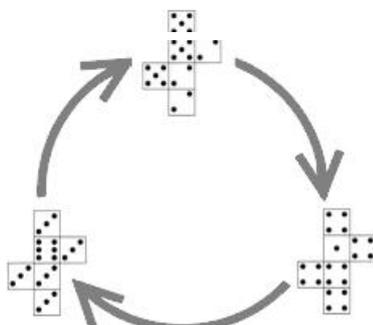
O cálculo destas probabilidades (todas iguais a  $2/3$ ) constitui um exemplo simples de cálculo de probabilidades utilizando a lei de Laplace e por isso mesmo este jogo é um ótimo exemplo para ser utilizado em contexto de sala de aula no 3º ciclo do ensino básico. Uma descrição mais completa destes dados pode ser encontrada em Grime (s.d.).

### Dados de James Grime

James Grime é atualmente um grande divulgador de Matemática que se tornou conhecido, entre outras coisas, pelos seus vídeos nos canais de vídeo do youtube singingbanana (<https://www.youtube.com/user/singingbanana/videos>) e Numberphile (<https://www.youtube.com/user/numberphile>). Grime propôs vários conjuntos de dados não transitivos que apresentam características adicionais, relativamente aos dados de Efron. Um dos conjuntos propostos por Grime (s.d.) consiste apenas em 3 dados com a seguinte configuração:



Tal como nos dados de Efron, forma-se uma cadeia circular:



As probabilidades associadas às setas não são sempre as mesmas, ao contrário do que acontecia nos dados de Efron. Neste caso  $P(A>B)=P(B>C)=0,583$  e  $P(C>A)=0,694$ . Considerando uma escolha aleatória dos dados por parte do 1º jogador, a vantagem do jogador 2 sobre o jogador 1, em média, já não é tão alta como era nos dados de Efron. A média destes 3 valores é cerca de 62%, um pouco abaixo dos 67% dos dados de Efron.

Qual é então a razão para utilizar estes dados? É que eles permitem criar uma variante do jogo completamente contraintuitiva. Suponhamos que a certa altura o voluntário se apercebe das escolhas sistemáticas do mágico e pede para ser ele a escolher em 2º lugar. O mágico aceita mas propõe uma ligeira alteração ao jogo. Agora, em vez de lançarem o dado apenas 1 vez, cada um lança o dado 2 vezes e soma as respetivas pintas. Aparentemente o jogador 1 não tem nada a perder e utiliza as escolhas do mágico. Mas engana-se redondamente. Fazendo 2 lançamentos de cada dado a cadeia mantém-se circular mas a sua ordem inverte-se! O mágico volta a estar em vantagem. Agora as probabilidades são  $P(A<B)=P(B<C)=0,590$  e  $P(C<A)=0,518$ . Para obter estes valores basta utilizar lei de Laplace e a lei da probabilidade total.

A título de exemplo vamos calcular  $P(A<B)$ , no caso dos lançamentos duplos. A tabela 1 contém as probabilidades da soma dos dois lançamentos ser cada um dos valores possíveis.

Os leitores interessados neste jogo poderão encontrar mais desenvolvimentos em Grime (s.d.).

|    | Dado A        | Dado B      | Dado C        |
|----|---------------|-------------|---------------|
| 2  |               |             | $1/36=0,0278$ |
| 4  |               | $9/36=0,25$ |               |
| 5  |               |             | $10/36=0,278$ |
| 6  | $25/36=0,694$ |             |               |
| 7  |               | $18/36=0,5$ |               |
| 8  |               |             | $25/36=0,694$ |
| 9  | $10/36=0,278$ |             |               |
| 10 |               | $9/36=0,25$ |               |
| 12 | $1/36=0,0278$ |             |               |

Tabela 1: probabilidades associadas ao duplo lançamento dos dados de Grime

$$P(A<B) = P(B=7 \cap A=6) + P(B=10 \cap A=6) + P(B=10 \cap A=9) = \\ = 1/2 \times 25/36 + 1/4 \times 25/36 + 1/4 \times 10/36 = 0,590.$$

### Jogo de Humble-Nishiyama

Este jogo é uma versão para cartas de um outro jogo para moedas proposto por Walter Penney (1969). No jogo de Penney uma moeda é lançada ao ar sucessivas vezes. Dois jogadores escolhem previamente uma sequência de caras/coroas de tamanho 3 (por exemplo: o jogador 1 escolhe CaCaCa e o jogador 2 escolhe CoCaCa). O jogador que obtiver a sua sequência em primeiro lugar, na sucessão de lançamentos, ganha o jogo. O jogo pode ter variantes numa das quais os lançamentos são continuados (reiniciados) e os jogadores vão acumulando pontos. Ganha quem atingir um certo número pré especificado de pontos, ou então o que atingir um maior número de pontos num número fixo de lançamentos.

A título de exemplo consideremos uma sequência de 25 lançamentos e as escolhas dadas no parágrafo anterior: Ca Ca Ca Co Co Ca Co Co Co Ca Co Ca Ca Co Co Ca Ca Ca Ca Co Co Ca Ca Ca Co. No jogo original de Penney ganha o jogador 1 logo ao fim dos primeiros 3 lançamentos (os restantes lançamentos já nem ocorreriam). Na variante em que se fixa 25 lançamentos ganha o jogador 2 com 3 pontos contra 1 ponto do jogador 1.

Steve Humble e Yutaka Nishiyama (2010) propuseram uma versão alternativa do jogo de Penney usando cartas. Na versão para moedas é preciso memorizar os últimos lançamentos para identificar as sequências de cada um dos jogadores o que dificulta a execução do jogo. Na versão com cartas o jogo torna-se mais prático. Nesta versão o que interessa são as cores das cartas, preto ou vermelho (P ou V),

e as cartas são retiradas de um baralho de forma sucessiva (aleatória) e colocadas umas ao lado das outras. Assim gera-se uma sequência aleatória de V's e P's, como por exemplo: VPVVPVV... que termina quando esgotado o baralho. À medida que se vão mostrando as cartas, sempre que sai uma das sequências escolhidas pelos jogadores todas as cartas são retiradas pelo jogador ganhador e contam como 1 ponto. Recomeça-se a extração das cartas e repete-se o procedimento até esgotado o baralho. Ganha o jogador com mais pontos.

Neste jogo (seja com moedas seja com cartas), a primeira intuição é a de que a escolha das sequências não afeta a probabilidade de cada jogador ganhar. Só que isto não é verdade e, tal como nos dados não transitivos, é sempre possível escolher uma sequência que ganhe a outra. Desta forma, o jogador que escolhe em 2º lugar (o mágico) pode sempre ganhar, em probabilidade.

Na versão com cartas o cálculo exato das probabilidades é bastante mais complicado do que na versão de Penney já que a probabilidade de sair cada cor vai variando ao longo do jogo. Iremos apenas considerar um cálculo aproximado da probabilidade de ganhar um ponto, assumindo as condições que ocorrem no lançamento da moeda, i.e.,  $P(V)=P(P)=1/2$  e cada extração é independente das anteriores. Apresentamos a melhor escolha (jogador 2 ganha ao jogador 1 com probabilidade máxima) na tabela 2. As probabilidades indicadas dizem respeito a um único “run” (ponto) e na 3ª coluna é dada a probabilidade do jogador 2 ganhar.

| Jogador 1 (J1) | Jogador 2 (J2) | P(J2 ganhar a J1) |
|----------------|----------------|-------------------|
| VVV            | PVV            | 7/8               |
| VVP            | PVV            | 3/4               |
| VPV            | VVP            | 2/3               |
| PVV            | PPV            | 2/3               |
| VPP            | VVP            | 2/3               |
| PVP            | PPV            | 2/3               |
| PPV            | VPP            | 3/4               |
| PPP            | VPP            | 7/8               |

Tabela 2: probabilidades do jogador 2 ganhar ao jogador 1.

Uma maneira (mnemónica) de obter a escolha do jogador 2 a partir da escolha do jogador 1 consiste em:

- Manter as duas primeiras cores do jogador 1 mas passando-as para 2º e 3º lugar.
- Colocar em primeiro lugar a cor contrária à que está no centro da escolha do jogador 1.

Em seguida iremos apresentar os cálculos de algumas das situações descritas na tabela, nomeadamente as três primeiras. Os cálculos apresentados envolvem apenas a noção de probabilidade condicionada e o teorema da probabilidade total (TPT). Na realidade este jogo forma uma cadeia de Markov mas não é necessário dominar cadeias de Markov para efetuar os cálculos. Trata-se de um bom exemplo para explorar com professores do ensino secundário e porque não com alunos do 12º ano de Matemática.

Vamos designar por  $G$  a probabilidade do jogador 2 ganhar um ponto a partir do momento em que se inicia (ou reinicia) o jogo:  $G = P(\text{jogador 2 ganhar um ponto})$

Vamos designar por  $G_V$  a probabilidade do jogador 2 ganhar um ponto sabendo que a sequência começou com um V:  $G_V = P(\text{jogador 2 ganhar um ponto} \mid \text{a sequência começa por V})$

Analogamente, vamos designar por  $G_P$  a probabilidade do jogador 2 ganhar um ponto sabendo que a sequência começou com um P:  $G_P = P(\text{jogador 2 ganhar um ponto} \mid \text{a sequência começa por P})$ .

Desta forma,  $G_{VP}$  representa a probabilidade de o jogador 2 ganhar um ponto se a sequência começar por VP:  $G_{VP} = P(\text{jogador 2 ganhar um ponto} \mid \text{a sequência começa por VP})$ .

E assim sucessivamente podemos definir a probabilidade de o jogador 2 ganhar um ponto se a sequência começar por qualquer sequência inicial de V's e P's.

Pelo TPT total  $G = G_P P(P) + G_V P(V) = G_P 1/2 + G_V 1/2$   $2G = G_P + G_V$

Iremos agora considerar os primeiros 3 casos da tabela 2.

**Caso 1:** J1 – VVV J2 – PVV

Nesta situação J1 só ganha se ocorrer VVV no início da sequência. Neste caso  $G = 1 - P(VVV) = 1 - (1/2)^3 = 1 - 1/8 = 7/8$

**Caso 2:** J1 – VVP J2 – PVV

Nesta situação, se a primeira carta for preta, P, então o jogador 2 ganha certamente pois PVV ocorre sempre antes de VVP (pois já saiu P). Portanto  $G_P = 1$ .

Para calcular  $G_V$  reparemos que por um lado  $G_{VP} = G_P$  já que se o jogo começar com VP a probabilidade de J2 ganhar é a mesma que se começar com P e por outro  $G_{VV} = 0$  (se já saíram dois V's então mais tarde ou mais cedo vai sair VVP, sem poder sair PVV). Assim, usando o TPT total

$$G_V = G_{VP} P(P) + G_{VV} P(V) = G_{VP} 1/2 + G_{VV} 1/2 = G_P 1/2 + 0 \times 1/2 = 1/2$$

Então,  $2G = G_P + G_V$   $2G = 1 + 1/2$   $G = 3/4$

**Caso 3:** J1 – VPV J2 – VVP

Se a primeira carta for P voltamos ao início. Então  $G_P = G$ . Pelo TPT

$$G_V = G_{VP} P(P) + G_{VV} P(V) = G_{VP} 1/2 + G_{VV} 1/2$$

Para calcular  $G_{VP}$  aplica-se novamente o TPT, reparando que  $G_{VPP} = G_P = G$ :

$$G_{VP} = G_{VPP} 1/2 + G_{VVP} 1/2 = 0 + G 1/2 = G/2$$

Por outro lado  $G_{VV} = 1$  já que nesta situação VVP sai certamente antes de VPV.

Assim,  $G_V = G/2 \times 1/2 + 1 \times 1/2 = G/4 + 1/2$ . Então,

$$2G = G_P + G_V \quad 2G = G + G/4 + 1/2 \quad 3/4 G = 1/2 \quad G = 2/3$$

O 4º caso da tabela calcula-se utilizando argumentos análogos aos apresentados nos casos anteriores. Os restantes casos calculam-se por analogia trocando os V's pelos P's.

Tendo em conta que neste jogo podem ocorrer (e em geral ocorrem) múltiplos *runs*, a probabilidade do jogador 2 ganhar quando se esgota o baralho é muito elevada. Podem ser feitos alguns cálculos aproximados da probabilidade do jogador 2 ganhar utilizando a distribuição binomial e considerando um certo número de *runs* em cada execução do jogo.

Os leitores interessados neste jogo poderão consultar Nyshiyama & Humble (2010) bem como a apresentação dos cálculos das probabilidades da tabela feitos por James Grime no vídeo <https://www.youtube.com/watch?v=U9wak7g5yQA&feature=related>.

### Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente financiado pela FCT-Fundação para a Ciência e a Tecnologia através do CIDMA - Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações - no âmbito do projeto UID/MAT/04106/2013.

### Referências

- Blasco, F. (2007). *Matemagia. Los Mejores Trucos para Entender los Numeros*. Temas de Hoy.
- Blasco, F. (2015). Consultado em 22 de maio, 2016 em: <http://www.fblasco.com/index.html>.
- Gardner, M. (1970), Mathematical Games: The Paradox of the Nontransitive Dice and the Elusive Principle of Indifference. *Scientific American* (223) 110-114.
- Gardner, M. (2011). *Matemática Magia e Mistério*. Lisboa. Gradiva.
- Grime, J. (s.d.) Non-transitive dice. Consultado em 22 de maio, 2016 em: <http://grime.s3-website-eu-west-1.amazonaws.com/#TUD>.
- Humble, S. & Nishiyama, Y. (2010) Humble-Nishiyama Randomness Game A New Variation on Penney's Coin Game, *Mathematics TODAY*, 148-9. Disponível em: [http://www.ima.org.uk/\\_db/\\_documents/Humble%20Nishiyama%20Randomness%20Game%20copy.pdf](http://www.ima.org.uk/_db/_documents/Humble%20Nishiyama%20Randomness%20Game%20copy.pdf).
- Melo, J. (2013) *Probabilidades e Magia Matemática*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Aveiro.
- Nishiyama, Y. & Humble, S. (2010) Winning odds. *+Pus magazine*. Disponível em: <https://plus.maths.org/content/os/issue55/features/nishiyama/index>.
- Oxford University (2015). Consultado em 22 de maio, 2016 em: <https://www.maths.ox.ac.uk/study-here/undergraduate-study/outreach/marcus-marvellous-mathemagicians>.
- Penney, W. (1969). Problem 95: Penney Ante. *Journal of Recreational Mathematics*, (2) 241.



# **Estatística Educacional: a propósito dos Modelos de Valor Acrescentado**

Maria Eugénia Ferrão, *meferrao@ubi.pt*

*UBI & CEMAPRE*

## **NOTA INTRODUTÓRIA**

É uma enorme satisfação ter oportunidade para participar na vigésima edição, nesta série, do Boletim. Ao longo deste tempo, o Boletim tem sido o melhor divulgador das actividades da Sociedade Portuguesa de Estatística, contribuindo decisivamente para a consolidação da Sociedade e para a prossecução dos seus objectivos. Aqui deixo enorme gratidão ao Professor Fernando Rosado que, com inigualável perseverança e empenho, tem trabalhado para tornar possível a edição comemorativa de 10 anos de existência de uma publicação que já se tornou referência.

A Sociedade tem estatutariamente os objectivos de promover, cultivar e desenvolver em Portugal, o estudo da Estatística, suas aplicações e Ciências afins. A vertente transdisciplinar da Estatística tem-se desenvolvido ao longo dos últimos anos com novos temas e desafios colocados pela realidade, mas também com o ressurgir de temas históricos, como é exemplo a recente declaração da congénere norte-americana sobre o valor de prova (Wasserstein & Lazar, 2016), que recorrentemente emergem (e.g. Kirk, 1996, 2001; Thompson, 1996). Uma declaração anterior, sobre modelos de valor acrescentado (Morganstein & Wasserstein, 2014), suscita uma nova agenda de investigação científica em estatística educacional. Os avanços tecnológicos e computacionais recentes prospectivam o crescimento e grande desenvolvimento desta subárea, notadamente no que se refere aos métodos computacionais e estatísticos para lidar com *large and complex surveys* e dados longitudinais.

Assim, escolhi abordar o tema da Estatística Educacional, nos termos genericamente definidos pela Encyclopedia of Statistical Sciences (vol. 3, p.1872), a propósito dos modelos de valor acrescentado.

## **O DEBATE EM PORTUGAL**

O debate em torno dos modelos de valor acrescentado emerge da onda crescente na implementação de sistemas de avaliação educacional, que têm como principal propósito a responsabilização - prestação de contas com consequências de alto risco ao nível dos indivíduos e das instituições. A responsabilização - prestação de contas foi um dos princípios enunciados para a boa governança das instituições da União Europeia, a par de outros quatro: abertura, participação, eficácia e coerência (Commission of the European Communities, 2001), princípios vertidos na legislação dos Estados-membros.

Um pouco por todo o mundo, tem-se verificado a implementação em ritmo acelerado de sistemas de avaliação que visam a comparação do desempenho profissional e institucional, apesar de ainda nos depararmos com desafios metodológicos e técnicos consideráveis para que os resultados da avaliação contribuam efectivamente para a melhoria da educação e para a prosperidade da sociedade. A comparação do desempenho pode ser bastante produtiva para os envolvidos quando é bem feita. Quando mal feita, pode ser muito custosa, e não apenas inútil mas prejudicial e até mesmo destrutiva (Bird et al., 2005). Contribuições recentes têm mostrado que é possível obter estimativas da eficácia educacional na promoção das aprendizagens. Apesar das limitações de tais abordagens, alguns mentores de política educativa têm sido demasiado entusiastas na incorporação dessas estimativas como indicadores de desempenho nos sistemas de avaliação educacional dos seus países. As

propriedades associadas a esses indicadores são cruciais para a legitimidade desses sistemas, particularmente quando são usados com consequências de alto risco. A maioria dos investigadores está consciente quanto às implicações da assunção de determinados pressupostos, ou da sua violação, nos resultados obtidos; dependendo do uso dado àqueles indicadores, assim serão os efeitos nas pessoas e instituições envolvidas.

Em Portugal, à semelhança do que ocorreu em outros países, uma das faces visíveis foi a publicação periódica dos resultados escolares sob a forma de *rankings* como instrumento para a comparação do desempenho institucional. O tema ganhou rapidamente a atenção dos meios de comunicação social e de governantes, cujo discurso associou a necessidade de avaliação de desempenho à melhoria da qualidade da educação, sem qualquer preocupação de natureza metodológica relacionada com a operacionalização e obtenção dos indicadores de desempenho. A par da crítica que surgiu em torno da publicação dos *rankings*, disseminaram-se alternativas metodológicas para a produção de indicadores de desempenho escolar, entre as quais a abordagem de valor acrescentado (VA).

### **NOTAS SOBRE MODELO DE VALOR ACRESCENTADO**

Na actualidade há consenso amplo relativamente aos requisitos metodológicos mínimos que devem ser satisfeitos. O relatório *Measuring Improvements in Learning Outcomes, best practices to assess the value-added of schools* (OECD, 2008) define modelo de valor acrescentado como pertencendo à classe de modelos estatísticos que permitem estimar a contribuição das escolas para o progresso dos alunos. Isto assume particular relevância no que se refere aos objectivos educativos estabelecidos, sendo o progresso medido, pelo menos, em duas ocasiões no tempo. Noutros termos, mas com significado semelhante, a National Academy of Sciences (EUA) no relatório *Getting Value Out of Value-Added* (Braun, Chudowsky, & Koenig, 2010), menciona que a abordagem se refere à quantificação do efeito da escola, professor ou programa no desempenho dos alunos, considerando as diferenças entre os alunos no que se refere ao conhecimento prévio e também a outras variáveis extra-escolares que influenciam o desempenho dos alunos. O volume 26 do *Handbook of Statistics*, no capítulo dedicado à modelação VA (Braun & Wainer, 2007), apresenta-os como sendo a família de modelos estatísticos que são usados para inferir sobre a eficácia das unidades educativas, usualmente escolas e/ou professores. Estas definições são convergentes num conjunto de características sobre as quais vale a pena reflectir.

A primeira é a da existência duma família ou classe de modelos. Assim, o conceito “o modelo VA” denota uma escolha entre diversos modelos estatísticos possíveis. A escolha deve ser realizada em concordância com o critério de comparação estabelecido pelo *designer* do sistema de avaliação e de modo adequado ao contexto educativo, social, económico e cultural em que o modelo vai ser aplicado. Naturalmente, verificam-se diferenças entre os indicadores VA resultantes da aplicação de cada um dos modelos possíveis, e, à luz dessas diferenças, deverá ser realizada a respectiva interpretação dos resultados obtidos. Os estudos de consistência são encorajadores do seu uso como critério de avaliação educacional.

A segunda característica está relacionada com os cuidados a ter para tornar comparável a acção educativa das escolas já que cada uma delas serve população discente com características diferentes. Para estimar a “contribuição da escola” ou a “eficácia das unidades educativas” é absolutamente necessário ter em mente que a população discente que frequenta a rede pública de escolas é muito heterogénea e que essa heterogeneidade também se verifica entre escolas. Logo, é preciso que o modelo contemple variáveis extra-escolares que têm influência no desempenho dos alunos e, como tal, garantir que a estimativa da “contribuição da escola” esteja livre dessa influência. Por exemplo, a variável que representa o nível socioeconómico do aluno deve ser incluída no modelo e, eventualmente, o seu efeito contextual também.

A terceira característica envolve a noção de “progresso”. O progresso está associado a um atributo que varia no tempo. Para quantificar a mudança ao longo do tempo e, por conseguinte, o progresso, são necessários dados longitudinais – de tal maneira que seja possível captar as mudanças decorrentes da aprendizagem realizada de permeio. Por um lado, a infra-estrutura técnica para a realização de estudos longitudinais é exigente. Por outro, a construção da métrica que permita quantificar o progresso não é trivial. Neste caso não se trata de uma dificuldade específica dos modelos VA. Trata-se duma dificuldade inerente ao processo de aferição das aprendizagens. No fundo, é a mesma dificuldade que

impossibilita, por enquanto em Portugal, a comparação, ao longo do tempo, tanto da classificação das provas de aferição como da classificação dos exames nacionais. Ninguém em Portugal pode, com fundamento em tais classificações, afirmar se os resultados escolares estão a melhorar ou a piorar de ano para ano. A inexistência dessa métrica também condiciona a avaliação de impacto dos programas de intervenção ou mesmo da avaliação de alterações programáticas e/ou reformas em termos do benefício ou prejuízo que têm na aprendizagem dos alunos.

### **CONSIDERAÇÃO FINAL**

O grande desenvolvimento que a modelação estatística tem tido recentemente constitui uma promessa para desvendar a complexidade do mundo real (Goldstein, 1998) como nunca antes aconteceu, especialmente ao incorporar a estrutura hierárquica da população e ainda a dimensão longitudinal inerente a qualquer processo de mudança. De acordo com Raymond & Negassi (2015; p. 29), “em breve, o Ministério [da Educação português] irá fornecer informações ao nível micro dos alunos, tornando possível aos pesquisadores seguirem os alunos ao longo do tempo [...]”. Esta notícia é muito bem-vinda pelos horizontes que pode abrir à investigação em Estatística Educacional.

### **REFERÊNCIAS**

- Bird, S. M., Cox, D., Farewell, V. T., Goldstein, H., Holt, T., & Smith, P. C. (2005). Performance indicators: Good, bad, and ugly. *Journal of the Royal Statistical Society: Series A (Statistics in Society)*, 168(1), 1–27. doi:10.1111/j.1467-985X.2004.00333.x
- Braun, H., Chudowsky, N., & Koenig, J. (2010). *Getting value out of value-added. Social Sciences*. Washington, DC: National Academies Press. Retrieved from <http://216.78.200.159/Documents/RandD/Other/Getting Value out of Value-Added.pdf>
- Braun, H., & Wainer, H. (2007). Value-Added Modeling. In C. R. Rao & S. Sinharay (Eds.), *Handbook of Statistics: Psychometrics* (Vol. 26, pp. 867–892). Amsterdam: Elsevier. doi:10.1016/S0169-7161(06)26027-9
- Commission of the European Communities. (2001). *European Governance: A white paper*. Brussels.
- Goldstein, H. (1998). *Models for Reality: New approaches to the understanding of educational processes*. London: Institute of Education Publications.
- Kirk, R. E. (1996). Practical Significance: A Concept Whose Time Has Come. *Educational and Psychological Measurement*, 56(5), 746–759. doi:10.1177/0013164496056005002
- Kirk, R. E. (2001). Promoting good statistical practices: some suggestions. *Educational and Psychological Measurement*, 61, 213–218.
- Morganstein, D., & Wasserstein, R. (2014). ASA Statement on Value-Added Models. *Statistics and Public Policy*, 1(1), 108–110. doi:10.1080/2330443X.2014.956906
- OECD. (2008). *Measuring Improvements in Learning Outcomes*. Paris: OECD Publishing. doi:10.1787/9789264050259-en
- Raymond, M. E., & Negassi, Y. (2015). *O quinto compromisso. Desenvolvimento de um sistema de garantia de desempenho educativo em Portugal*. Lisboa: Fundação Francisco Manuel dos Santos.
- Thompson, B. (1996). Research news and Comment: AERA Editorial Policies Regarding Statistical Significance Testing: Three Suggested Reforms. *Educational Researcher*, 25(2), 26–30. doi:10.3102/0013189X025002026
- Wasserstein, R. L., & Lazar, N. A. (2016). The ASA’s statement on p-values: context, process, and purpose. *The American Statistician*, 1305(March). doi:10.1080/00031305.2016.1154108



# Os modelos GTARCH de potência na dialética empírico-teórica da descrição temporal

Nazaré Mendes Lopes, *nazare@mat.uc.pt*

*CMUC, Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, Portugal*

## 1 Introdução

A grande maioria dos sistemas naturais, ambientais, sociais ou económicos são de natureza dinâmica apresentando evolução aleatória com significativa variabilidade. A análise empírica retrospectiva de tais sistemas, olhando em particular para os respetivos resultados sob diferentes pressupostos, é essencial ao desenvolvimento da investigação no domínio da modelação matemática.

Tal modelação pode, em alguns casos, surgir associada a fenómenos cuja descrição permite equacionar matematicamente a sua evolução: o sistema real a descrever enquadra-se numa estrutura matemática teoricamente estudada e com características adequadas ao problema em causa, como é o caso, por exemplo, dos modelos associados à teoria de filas de espera. Noutros casos, é a análise do comportamento evolutivo de conjuntos de dados reais, que permite criar modelos teóricos com propriedades compatíveis com as características empíricas dos dados a descrever. À medida que vamos conseguindo, teoricamente, responder aos factos empíricos conhecidos sobre tais dados, aumenta a necessidade de prosseguir estudos que permitam identificar novas características comportamentais. Trata-se de um procedimento muito utilizado no estudo de séries financeiras, em particular com a necessidade de descrever e prever a, eventual, volatilidade instantânea associada. Os modelos condicionalmente heteroscedásticos (*vulgo* ARCH), introduzidos em 1982 por Robert Engle ([5]), são disso paradigma pois surgiram para dar resposta a vários factos estilizados e comportamentais à época não captáveis pelos modelos matemáticos desenvolvidos na literatura.

O carácter de imprevisibilidade desta realidade dinâmica justifica a sua descrição por modelos matemáticos de natureza estocástica, designados genericamente por processos estocásticos, cuja estudo teórico-prático se inclui no domínio geral das Probabilidades e Estatística. Assim, falar de processos estocásticos é falar do mundo real, da sua descrição e interpretação, do seu desenvolvimento e evolução. Mais ainda é sobretudo referir a existência de uma investigação matemática interdisciplinar que permita, por exemplo, desenvolver modelos capazes de incorporar o maior número de características empíricas e físicas observadas em sistemas de áreas transversais da sociedade como a tecnologia, a biotecnologia e a medicina, a economia, as finanças e a gestão ou a sociologia.

Genericamente, um processo estocástico é um modelo matemático capaz de descrever um sistema que varia, de forma imprevisível, com um certo parâmetro, usualmente o tempo. A imprevisibilidade resulta do facto de observarmos o sistema durante um certo tempo por diversas ocasiões, sob condições presumivelmente idênticas, e de as sequências em observação resultantes serem, em geral, diferentes. Assim, a probabilidade aparece não no sentido de cada resultado de uma experiência aleatória determinar uma única observação, por exemplo, um único número, mas sim o comportamento de tal sistema ao longo de uma sequência ou intervalo de tempo. Fazendo o contraponto com a Estatística Clássica, onde o dado fundamental é uma família (quando muito numerável) de variáveis aleatórias independentes, realçar-se-á o carácter dinâmico deste modelo estocástico através da dependência, habitualmente existente, entre as variáveis que o definem. De facto, a hipótese de independência das observações não tem agora qualquer

sentido: estamos perante variáveis que já se observavam no passado, que podemos observar no futuro e cujas conclusões dependem de um segmento de observações entre dois instantes conhecidos a que chamamos *trajetória* do processo. Perante uma tal trajetória, interessa-nos analisar o tipo de evolução subjacente, as características empíricas que lhe estão associadas (factos estilizados) de modo a poder, por exemplo, prever valores futuros; tal previsão poderá ser precedida por um procedimento de filtragem que permita eliminar certas características da série, tais como fatores de sazonalidade ou observações aberrantes.

Uma evolução totalmente anárquica impede, no entanto, uma análise estatística válida do fenómeno em causa. Por exemplo, se temos em vista a previsão do futuro é fundamental assegurar uma certa estabilidade no tempo dos valores da série, isto é, garantir as chamadas propriedades de estacionariedade do processo. A **estacionariedade** é assim uma característica fundamental a ter em conta nos processos estocásticos que modelam séries temporais (ou as suas transformadas por filtragem) por forma a legitimar o estudo evolutivo do correspondente sistema com base no comportamento observado. Outra característica dos processos estocásticos que, aliada à propriedade de estacionariedade, é fundamental na análise de séries temporais é a propriedade de **ergodicidade**. De facto, é a aplicação do teorema ergódico ([1], [15]) a tais processos que legitima a modelação dos sistemas por eles descritos, designadamente no que concerne a estimação dos parâmetros que lhe estão subjacentes ou da própria distribuição global, com base na observação de uma única trajetória, isto é, de uma amostra (em geral, parcial) de dimensão um.

Um dos aspetos raramente discutidos na modelação estocástica é a relação entre o sistema em análise e a lei de probabilidade que o descreve, apesar da estimação dos parâmetros associados ao modelo dever ter subjacente tal lei. A dificuldade em obter a distribuição global em certas classes de processos, como os condicionalmente heteroscedásticos, leva à utilização frequente, em sua substituição, da correspondente distribuição condicional ao passado do processo. No entanto, o desenvolvimento de estudos integrados na modelação estocástica de tais sistemas, como os relativos a Cartas de Controlo no âmbito do Processo de Controlo Estatístico, obrigam ao conhecimento e estimação da **distribuição de probabilidade** do processo associado ([7], [11]).

Os aspetos acima referidos, de grande importância na análise probabilista e estatístico de modelos estocásticos, conheceram desenvolvimentos recentes numa classe muito geral de processos estocásticos para modelos com volatilidade (ou heteroscedasticidade) condicional, nomeadamente a dos processos Threshold GARCH de potência, designados  $\delta$ -TGARCH, fortemente ligada à modelação de séries financeiras. No que diz respeito à estimação da distribuição de probabilidade do processo, a impossibilidade de obter as verdadeiras leis levou ao desenvolvimento de estudos baseados no enquadramento das leis de dimensão finita do processo, procedimento que, no âmbito dos processos condicionalmente heteroscedásticos, teve como origem o trabalho pioneiro de Pawlak and Schmid ([14]) para leis de dimensão finita do processo quadrado de um modelo GARCH. Uma sua primeira extensão para o processo módulo de um modelo TGARCH é desenvolvida por Gonçalves e Mendes-Lopes em ([10]). Mais recentemente, Gonçalves, Leite e Mendes-Lopes ([8]) alargam estes estudos aos modelos TGARCH de potência, e obtêm enquadramentos para a correspondente família de leis de dimensão finita. Tal estudo é desenvolvido em processos  $\delta$ -TGARCH **estacionários e ergódicos**, propriedades estabelecidas pelas referidas autoras em ([6]).

A procura de modelos estocásticos capazes de melhorar a realidade dinâmica que nos cerca, captando novas características ou factos estilizados, é uma questão permanentemente em aberto na investigação em Séries Temporais. No entanto, cada nova classe de modelos para ser útil nos desenvolvimentos e aplicações subsequentes, deverá cumprir um conjunto de pressupostos que assegurem, em particular, a estacionariedade e a ergodicidade dos processos estocásticos que a integram. Neste texto escolhemos a classe geral dos processos TGARCH de potência para ilustrar o estudo destas propriedades no contexto da modelação da heteroscedasticidade condicional.

O carácter geral e eclético destes modelos leva a que possam captar em simultâneo, entre outros aspetos, diferentes tipos de heteroscedasticidade condicional, simetria ou assimetria na volatilidade estocástica,

características (ou não) de memória longa, e ainda factos estilizados comuns a dados de natureza financeira, como a leptocurtose e a propriedade de Taylor ([11]).

Tomando como referências os trabalhos [6] e [8] já referidos, analisaremos as propriedades de estacionaridade e ergodicidade dos processos  $\delta$ -TGARCH e ilustraremos a sua importância na investigação subsequente referindo sinteticamente a estimação por enquadramento das leis de dimensão finita de tais processos.

## 2 Modelos TGARCH de potência: definição, estacionaridade e ergodicidade

Consideremos um processo estocástico  $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$  e definam-se, para cada  $t \in \mathbb{Z}$ , as variáveis aleatórias reais (v.a.r.)  $X_t^+ = \max(X_t, 0)$ ,  $X_t^- = \max(-X_t, 0)$ ; denote-se por  $\underline{X}_t$  a sigma-álgebra gerada por  $(X_t, X_{t-1}, \dots)$ .

O processo  $X$  segue um modelo *Threshold GARCH* de potência  $\delta$  com ordens  $p$  e  $q$ , i.e  $\delta$ -TGARCH( $p, q$ ), ([6]) se para constantes reais  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\beta_i \geq 0$ ,  $\gamma_j \geq 0$ , ( $i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, q$ ) e uma sucessão de variáveis  $(Z_t, t \in \mathbb{Z})$  centradas e reduzidas, e tais que  $Z_t$  é independente de  $\underline{X}_{t-1}$  se tem, para todo o  $t \in \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{cases} X_t = \sigma_t Z_t \\ \sigma_t^\delta = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p [\alpha_i (X_{t-i}^+)^{\delta} + \beta_i (X_{t-i}^-)^{\delta}] + \sum_{j=1}^q \gamma_j \sigma_{t-j}^{\delta}, \end{cases} \quad (1)$$

com  $\delta \neq 0$ , considerando para  $\delta < 0$  a seguinte convenção:  $(X_t^+)^{\delta} = 0$  se  $X_t < 0$  e  $(X_t^-)^{\delta} = 0$  se  $X_t > 0$ .

Ao processo  $Z = (Z_t, t \in \mathbb{Z})$  chama-se **processo gerador** de  $X$ .

Diremos que  $X$  segue um modelo  $\delta$ -TARCH( $p$ ) se  $\gamma_j = 0$ , para  $j = 1, \dots, q$ .

Esta formulação geral permite incluir as principais classes de modelos condicionalmente heteroscedásticos, entre as quais se destacam as dos modelos GARCH ([2], [5]),  $\delta$ -GARCH ([12]), TGARCH ([16]) e APARCH ([4], [13]).

O estudo da estacionaridade e ergodicidade deste tipo de modelos está fortemente ligado à procura de uma representação Markoviana em espaço de estados de tais processos.

No caso dos modelos  $\delta$ -TGARCH é estabelecida a representação Markoviana em  $\mathbb{R}^m$ , com  $m = \max(p, q)$ , de coeficientes aleatórios definida por

$$Y_{t+1} = A_t Y_t + B \quad (2)$$

cuja  $k$ -ésima componente,  $Y_t^{(k)}$ , do processo  $(Y_t, t \in \mathbb{Z})$  verifica

$$\begin{cases} Y_t^{(1)} = \sigma_t^\delta \\ Y_t^{(k)} = \sum_{i=k}^m [\alpha_i (X_{t-i+k-1}^+)^{\delta} + \beta_i (X_{t-i+k-1}^-)^{\delta} + \gamma_i \sigma_{t-i+k-1}^{\delta}], \quad k = 2, \dots, m; \end{cases}$$

onde  $(A_t, t \in \mathbb{Z})$  é sequência de matrizes quadradas de ordem  $m$ , independentes e identicamente distribuídas, e  $B$  o vetor de  $\mathbb{R}^m$  seguintes:

$$A_t = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m-1} [\alpha_i (\varepsilon_t^+)^{\delta} + \beta_i (\varepsilon_t^-)^{\delta} + \gamma_i] e_i & I_{m-1} \\ \alpha_m (\varepsilon_t^+)^{\delta} + \beta_m (\varepsilon_t^-)^{\delta} + \gamma_m & 0_{m-1}^T \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \omega e_1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

com  $e_1, \dots, e_{m-1}$  a base canónica de  $\mathbb{R}^{m-1}$ ,  $I_{m-1}$  a matriz identidade de ordem  $m-1$  e  $0_{m-1}$  o vetor nulo de  $\mathbb{R}^{m-1}$ .

Sob a negatividade do expoente de Lyapunov da família de matrizes  $(A_t, t \in \mathbb{Z})$ , é estabelecida em ([6]) a existência e unicidade de uma solução estritamente estacionária e ergódica recorrendo à metodologia proposta em ([3]) para a resolução de equações autorregressivas multivariadas com coeficientes aleatórios não negativos, independentes e identicamente distribuídos.

Supondo que  $E(|Z_t|^{\delta}) < +\infty$  e  $P(Z_t = 0) \neq 1$ , prova-se a existência de solução estacionária e ergódica sob condições de grande simplicidade expressas em termos dos coeficientes do modelo. Designadamente, se

$$S_{\delta} = \sum_{i=1}^m (\alpha_i \phi_{1,\delta} + \beta_i \phi_{2,\delta} + \gamma_i) < 1,$$

com  $\phi_{1,\delta} = E[(Z_t^+)^{\delta}]$  e  $\phi_{2,\delta} = E[(Z_t^-)^{\delta}]$ , então  $X$  é estritamente estacionário, ergódico e fracamente estacionário até à ordem  $\delta$ . Além disso a condição acima é necessária e suficiente para que  $E(|X_t|^{\delta})$  exista e seja independente de  $t$ , tendo-se

$$E(|X_t|^{\delta}) = E(|Z_t|^{\delta}) E(\sigma_t^{\delta}) = \frac{\alpha_0 E(|Z_t|^{\delta})}{1 - S_{\delta}}.$$

A representação Markoviana (2) acima apresentada é também determinante no estudo da estacionaridade fraca de subclasses de modelos desta classe geral ([6]). De facto, no caso dos modelos *threshold* generalizados, tanto quanto é do nosso conhecimento, não são conhecidos estudos gerais sobre a estacionaridade fraca que não envolvam tal tipo de representações Markovianas.

Tal estudo passa por estabelecer que a condição sobre a família de matrizes  $(A_t, t \in \mathbb{Z})$ , definida por

$$\forall m \in \mathbb{N}_0, E(\|A_0 \dots A_m\|^2) < \infty \text{ e } \exists r \in \mathbb{N}_0 : E(\|A_0 \dots A_r\|^2) < 1,$$

é necessária e suficiente para assegurar a existência e unicidade de uma solução fracamente estacionária do modelo vetorial (2), a qual é a correspondente solução estritamente estacionária e ergódica.

A respetiva solução estritamente estacionária e ergódica do modelo univariado  $\delta$ -TGARCH, denotado (1), admite sob a condição anterior momentos até à ordem  $2\delta$  estabelecendo-se, para  $\delta > 0$ , a estacionaridade fraca até esta ordem dessa solução.

Para  $\delta = 1$ , decorre obviamente a estacionaridade fraca do correspondente modelo conforme tinha sido estabelecido em ([9]) por metodologia análoga, mas onde é usada uma representação vetorial do processo um pouco mais restritiva.

### 3 Um procedimento de estimação distribucional

Nesta secção ilustraremos a metodologia de estimação por enquadramento da lei de processos condicionalmente heterosedásticos, referindo-nos ao estudo desenvolvido em ([8]) para processos  $\delta$ -TGARCH de ordens  $p$  e  $q$  e concentrando-nos no ponto de partida desta metodologia que diz respeito à procura de um enquadramento para a distribuição marginal do processo em causa. Naquele trabalho o estudo evoluiu generalizando a metodologia usada no enquadramento das leis marginais para a obtenção de limites superior e inferior da função de distribuição do vetor de dimensão  $2n$ ,  $(X_1^+, X_1^-, \dots, X_n^+, X_n^-)$ . Obtendo caracterizações da lei dos vetores aleatórios  $n$ -dimensionais  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  à custa das dos anteriormente referidos, é possível estabelecer enquadramentos finais das distribuições marginais conjuntas da lei do processo  $X$ . Estudos de simulação para leis marginais e bidimensionais de alguns modelos concretos permitem avaliar a qualidade dos enquadramentos obtidos.

É importante referir que tais enquadramentos são expressos em termos da função de distribuição do processo gerador independente  $Z$ , sendo muito significativo observar que a lei marginal de  $X$  é fortemente controlada pela daquele processo, facto tanto mais relevante quanto é nosso conhecimento que tais leis têm, em geral, características bastante diferentes. De facto, estamos perante processos que sabemos serem, por exemplo, leptocúrticos independentemente da lei marginal do processo gerador o ser ou não.

No estudo que se segue iremos assumir que  $\sum_{j=1}^q \gamma_j < 1$ , notando que esta condição é necessária para que se tenham os vários modos de estacionaridade de  $X$  e permite assegurar a  $\underline{X}_{t-1}$ -mensurabilidade de  $\sigma_t$ .

#### 3.1 Enquadramento da função de distribuição marginal

Consideremos o processo estocástico  $X = (X_t, t \in \mathbb{Z})$  seguindo um modelo  $\delta$ -TGARCH( $p, q$ ) e sejam  $F_{X_t}$  e  $F_Z$ , respetivamente, as funções de distribuição de  $X_t$  e de  $Z_t$ .

Em ([8]) foram obtidos enquadramentos pontuais da função de distribuição marginal do processo,  $F_{X_t}$ , para toda a potência  $\delta$  do modelo. Tais enquadramentos dependem no entanto dos sinais de  $x$  e de  $\delta$ . Como ilustração apresentaremos tais enquadramentos para  $x \geq 0$  e  $\delta > 0$ .

Considerando  $\theta = \alpha_0^{\frac{1}{\delta}} \left(1 - \sum_{j=1}^q \gamma_j\right)^{-\frac{1}{\delta}}$  é fácil estabelecer que

$$F_{X_t}(x) \leq F_Z\left(\frac{x}{\theta}\right), \quad x \geq 0, \quad \delta > 0,$$

tendo, em particular, em conta que  $\sigma_t \geq \theta$ .

A conclusão do enquadramento para  $F_{X_t}$  não é desenvolvida num espectro tão alargado de modelos. De facto, necessitamos de um conjunto de hipóteses adicionais que passam pela  $\delta$ -integrabilidade do processo gerador, *i.e.*,  $E(|Z_0|^\delta) < +\infty$ , e ainda pela estacionaridade estrita e fraca até à ordem  $\delta$  de  $X$ , mediante a verificação da já referida condição  $S_\delta < 1$

Além disso, a lei do processo gerador deverá ser absolutamente contínua e de densidade diferenciável.

Designando por  $f_Z$  a função densidade comum às variáveis  $(Z_t)$ , consideremos a função

$$h_\delta(x, y) = (1 + \delta) f_Z\left(\frac{x}{y^\delta}\right) + \frac{x}{y^\delta} f'_Z\left(\frac{x}{y^\delta}\right), \quad \text{com } y \in [\theta^\delta, +\infty[.$$

A determinação do enquadramento vai depender, para além do já referido sinal de  $x$ , também do sinal da função  $h_\delta$ .

Supondo que  $x \geq 0$  e  $h_\delta(x, y) \geq 0$ , obtém-se.

$$F_{X_t}(x) \geq F_Z \left( \frac{x}{\left[ E(\sigma_t^\delta) \right]^{\frac{1}{\delta}}} \right).$$

Ilustremos a técnica usada na obtenção deste tipo de limites resumindo a prova desta última desigualdade.

Para  $t \in \mathbb{Z}$  e  $x \in \mathbb{R}$ , tem-se que  $F_{X_t}(x) = E \left[ F_Z \left( \frac{x}{(\sigma_t^\delta)^{\frac{1}{\delta}}} \right) \right]$ . (3)

Considerando a função  $R_\delta(y) = F_Z \left( \frac{x}{y^{\frac{1}{\delta}}} \right)$ ,  $y \geq \theta^\delta$ , tem-se que

$$\frac{dR_\delta}{dy}(y) = -\frac{x}{\delta y^{\frac{1}{\delta}+1}} f_Z \left( \frac{x}{y^{\frac{1}{\delta}}} \right) \text{ e } \frac{d^2R_\delta}{dy^2}(y) = \frac{x}{\delta^2 y^{\frac{1}{\delta}+2}} h_\delta(x, y).$$

Para  $x \geq 0$ ,  $y \geq \theta^\delta$ ,  $R_\delta$  é uma função convexa desde que  $h_\delta(x, y) \geq 0$ . A desigualdade referida decorre então da aplicação da desigualdade de Jensen à expressão (3).

Analisando os vários jogos de condições possíveis envolvendo  $\delta$ ,  $x$  e  $h_\delta$  obtêm-se os restantes enquadramentos para a função  $F_{X_t}$ .

A análise dos domínios de variação de sinal da função  $h_\delta$  é assim determinante na obtenção de limites inferiores (ou superiores) de  $F_{X_t}$ . Ilustremos tais domínios, que dependem dos valores de  $x$  e de  $\delta$ , no caso particular em que o processo gerador  $Z$  segue uma distribuição centrada e reduzida baseada na lei de Student de parâmetro  $n$ ,  $n > 2$ , *i.e.* de densidade  $f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{(n-2)\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \left( 1 + \frac{x^2}{n-2} \right)^{-\frac{n+1}{2}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Tendo em atenção que neste caso  $h_\delta(x, y) = f_Z \left( \frac{x}{y^{\frac{1}{\delta}}} \right) \frac{(1+\delta)(n-2)y^{\frac{2}{\delta}} + (\delta-n)x^2}{y^{\frac{2}{\delta}(n-2)+x^2}}$ , e fixando  $y$  em  $[\theta^\delta, +\infty[$ , têm-se os seguintes domínios de variação para  $h_\delta$ :

- i)  $h_\delta(x, y) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , se  $\delta \leq -1$ ;
- ii)  $h_\delta(x, y) \leq 0, \forall x \in \left] -\infty, -\theta \sqrt{\frac{(1+\delta)(n-2)}{n-\delta}} \right] \cup \left[ \theta \sqrt{\frac{(1+\delta)(n-2)}{n-\delta}}, +\infty \right[$ , se  $-1 < \delta < 0$ ;
- iii)  $h_\delta(x, y) \geq 0, \forall x \in \left[ -\theta \sqrt{\frac{(1+\delta)(n-2)}{n-\delta}}, \theta \sqrt{\frac{(1+\delta)(n-2)}{n-\delta}} \right]$ , se  $0 < \delta < n$ ;
- iv)  $h_\delta(x, y) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , se  $\delta \geq n$ .

Em ([8]) são apresentados vários estudos de simulação ilustrando quer os enquadramentos quer a sua qualidade para várias modelações  $\delta$ -TGARCH, envolvendo diferentes conjuntos de parâmetros e diferentes tipos de leis para o processo gerador (*i.e.* leptocúrticas ou não, e simétricas ou não). Tais enquadramentos são comparados com as funções de distribuição empírica dos processos simulados.

O estudo realizado revela uma muito boa precisão, em especial na parte do enquadramento relacionada com a função  $F_Z \left( x \left[ E(\sigma_t^\delta) \right]^{-\frac{1}{\delta}} \right)$  que envolve todos os parâmetros do modelo bem como a evolução, em média, da volatilidade condicional. Mais ainda tais estudos de simulação parecem indicar que a qualidade dos enquadramentos está fortemente relacionada com a grandeza do valor de  $S_\delta$ , definidor do domínio de estacionaridade e ergodicidade do modelo, sendo tanto melhor quanto menor for este valor. Nota-se finalmente que tais conclusões são independentes das características distribucionais do processo gerador.

### 3.2 Enquadramento das distribuições de dimensão finita

O enquadramento das distribuições de dimensão finita foi completamente desenvolvido em ([8]) no caso dos processos  $\delta$ -TGARCH com potência  $\delta$  positiva, estritamente estacionários e ergódicos, e processo gerador absolutamente contínuo. O desenvolvimento desses enquadramentos teve como estudo preliminar a majoração e minoração da função de distribuição do vetor  $(X_1^+, X_1^-, \dots, X_n^+, X_n^-)$  à custa do conjunto de parâmetros do processo e da lei do processo gerador.

Apesar de estarmos agora perante uma situação de grau de complexidade substancialmente acrescido, a metodologia neste enquadramento preliminar baseia-se fortemente na utilizada aquando do estudo da distribuição marginal, designadamente majorando ou minorando  $\sigma_t$  e recorrendo, mediante condições a definir ou estabelecer, à desigualdade de Jensen.

No que diz respeito à função de distribuição de  $(X_1, \dots, X_n)$  foram sendo obtidos enquadramentos pontuais por regiões de  $\mathbb{R}^n$ , designadamente,  $[0, +\infty[^n, ]-\infty, 0]^n \setminus \{0, \dots, 0\}$  e  $\mathbb{R}^n \setminus (]-\infty, 0]^n \cup [0, +\infty[^n)$ , relacionando em cada uma destas regiões tal função de distribuição com a função de distribuição do vetor  $(X_1^+, X_1^-, \dots, X_n^+, X_n^-)$ .

Por exemplo, concentrando-nos em  $[0, +\infty[^n$ , é fácil provar que se  $X$  é um processo  $\delta$ -TGARCH( $p, q$ ) com  $\delta > 0$ , se tem

$$F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) \leq \prod_{t=1}^n F_Z\left(\frac{x_t}{\theta}\right).$$

Além disso, no que diz respeito ao limite inferior, estabelece-se para variáveis aleatórias  $Z_t$  absolutamente contínuas o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} F_{(X_1, \dots, X_n)}(x_1, \dots, x_n) &\geq [F_Z(0)]^n + \sum_{k=1}^n F_{(X_1^+, X_1^-, \dots, X_k^+, X_k^-)}(x_1, 0, \dots, x_k, 0) [F_Z(0)]^{n-k} + \\ &+ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2^0, 2^1, \dots, 2^n}}^{2^n} F_{(X_1^+, X_1^-, \dots, X_n^+, X_n^-)}(a_{k,1}, a_{k,1}^*, \dots, a_{k,n}, a_{k,n}^*), \end{aligned}$$

com  $a_{k,t} = \begin{cases} x_t, & \text{se } \lfloor \frac{k-1}{2^{n-t}} \rfloor \text{ is even} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$  e  $a_{k,t}^* = \begin{cases} 0, & \text{se } \lfloor \frac{k-1}{2^{n-t}} \rfloor \text{ é par} \\ y_t, & \text{em qualquer outro caso} \end{cases}$ , e  $y_t$  arbitrariamente fixo em  $[0, +\infty[$ .

Como ilustração observa-se que o referido limite inferior se reduz, no caso  $n = 2$ , a

$$\begin{aligned} F_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2) &\geq [F_Z(0)]^2 + F_{(X_1^+, X_1^-)}(x_1, 0) [F_Z(0)] + F_{(X_1^+, X_1^-, X_2^+, X_2^-)}(x_1, 0, x_2, 0) + \\ &+ F_{(X_1^+, X_1^-, X_2^+, X_2^-)}(0, y_1, x_2, 0). \end{aligned}$$

Nota-se que a utilização destes enquadramentos só tem interesse prático quando combinada com a dos enquadramentos obtidos para as leis de dimensão finita do processo  $((X_t^+, X_t^-), t \in \mathbb{Z})$  e mediante as condições em que os mesmos se verificam.

A qualidade destes enquadramentos foi também já avaliada através de estudos de simulação e comparada, em particular, com a da função de distribuição empírica relativa a amostras dos processos simulados, sendo as conclusões semelhantes às obtidas para a lei marginal. Os exemplos apresentados designadamente em ([11]) mostram que este procedimento pode ser uma alternativa válida à estimação clássica das leis de dimensão finita pelas funções de distribuição empíricas.

Já no trabalho pioneiro de Pawlak and Schmid, ([14]), sobre este tipo de aproximação, encontramos referências ao potencial interesse desta metodologia na avaliação de cartas de controlo em modelos condicionalmente heteroscedásticos, estando no entanto uma eventual aplicação restrita a cartas de controlo de

limites simétricos e numa classe muito limitada de processos condicionalmente heteroscedásticos. Com os desenvolvimentos posteriores, designadamente os aqui resumidos, tais aplicações são fortemente enriquecidas quer pela melhoria presente na qualidade dos enquadramentos quer porque esta metodologia geral pode agora ser utilizada na avaliação de cartas de controlo com limites simétricos ou assimétricos numa classe muito alargada de processos condicionalmente heteroscedásticos. Em ([7]) foi discutido o interesse e qualidade desta metodologia ao estudar, no contexto simétrico, cartas de controlo associadas à subclasse dos modelos ARCH e TARCh.

#### 4 Em jeito de conclusão

Os modelos condicionalmente heteroscedásticos surgiram, em 1982, na literatura para dar resposta a características empíricas observadas nas séries financeiras de que se destacam a volatilidade instantânea, a não normalidade e a leptocurtose, as quais não eram captadas pelos modelos conhecidos à época tais como os clássicos ARMA. A complexidade que foi sendo acrescida nos modelos ARCH e GARCH iniciais manteve o objetivo de melhorar a descrição de tal tipo de séries. Assim, surgiram os modelos *threshold* capazes de captar o comportamento assimétrico da variabilidade em geral presente nos comportamentos diferenciados de sucesso ou de crise. Prolongar a memória nas perturbações da volatilidade condicional dos sistemas temporais em análise levou ao aparecimento de potência não inteira na evolução da referida volatilidade e à introdução dos modelos condicionalmente heteroscedásticos de potência.

A classe de processos  $\delta$ -TGARCH, sobre os quais apresentámos aspetos significativos do seu comportamento probabilista, permite agregar as referidas características empíricas das séries reais que motivaram este tipo de modelação. A sua aplicação prática não dispensa no entanto um desenvolvimento teórico rigoroso que permita, em particular, selecionar classes de modelos com comportamento probabilista estável, designadamente estacionários (segundo os vários tipos de estacionaridade) e ergódicos. É em tais classes que estudos posteriores de estimação e testes, indispensáveis nas aplicações, podem ser legitimamente desenvolvidos.

À análise empírica responde-se assim com investigação teórica, indo esta frequentemente mais longe do que a motivação que lhe esteve subjacente. No entanto, quando se encontram sistemas reais compatíveis com os modelos gerais que a teoria desenvolveu é um ciclo que se fecha e novos aspetos teóricos devem ser desenvolvidos para que a qualidade da descrição de sistemas reais possa ser melhorada. É a dialética entre o teórico e o empírico em pleno desenvolvimento!

#### Referências

- [1] Azencott, R., D. Dacunha-Castelle (1984). *Séries d'observations irrégulières: modélisation et prévision*. Masson, Paris.
- [2] Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *J. Econometrics* **31**, 307-327.
- [3] Bougerol, P., Picard, N. (1992). Stationarity of GARCH processes and some nonnegative time series. *J. Econometrics* **52**, 115-127.
- [4] Ding, Z., Granger, C.W., Engle, R.F. (1993). A long memory property of stock market returns and a new model. *J. Empirical Finance* **1**, 83-106.

- [5] Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of the UK inflation. *Econometrica* **50**, 987-1008.
- [6] Gonçalves, E., Leite, J., Mendes-Lopes, N. (2012). On the probabilistic structure of power threshold generalized ARCH stochastic processes. *Stat. Prob. Lett.* **82**, 1597-1609.
- [7] Gonçalves, E., Leite, J., Mendes Lopes, N. (2013). The ARL of modified Shewhart control charts for conditionally heteroskedastic models. *Statistical Papers* **54**, 1-19.
- [8] Gonçalves, E., Leite, J., Mendes Lopes, N. (2016). On the Distribution Estimation of Power Threshold Garch Processes. *Journal of Time Series Analysis* DOI: 10.1111/jtsa.12173.
- [9] Gonçalves, E., Mendes Lopes, N. (1994). The generalized Threshold ARCH model: wide sense stationarity and asymptotic normality of the temporal aggregate. *Pub. Inst. Stat. Univ. Paris* **38**, 2, 19-35.
- [10] Gonçalves, E., Mendes Lopes, N. (2007). On the distribution of generalized threshold ARCH models. *International Journal of Pure and Applied Mathematics* **35**, 397-419..
- [11] Leite, J. (2013). *Processos Threshold GARCH com Potência: estrutura probabilista e aplicações a cartas de controlo*. Tese de Doutoramento, Universidade de Coimbra.
- [12] Mittnik, S., Paolella, M.S., Rachev, S.T. (2002). Stationarity of stable power-GARCH processes. *Journal of Econometrics* **106**, 97-107.
- [13] Pan, J., Wang, H., Tong, H. (2008). Estimation and tests for power-transformed and threshold GARCH models. *Journal of Econometrics* **142**, 352-378.
- [14] Pawlak, M., Schmid, W. (2001). On the distributional properties of GARCH processes. *Journal of Time Series Analysis* **22**, 3, 339-352.
- [15] Rosenblatt, M. (1978). Dependence and asymptotic independence for random processes. In *Studies in Probability Theory* (Rosenblatt, M. eds.), Mathematical Association of America, Washington, DC, 24-45.
- [16] Zakoian, J.M. (1994). Threshold heteroskedasticity models. *Journal of Economic Dynamics and Control* **18**, 931-955.



# Testes de Memória Longa Usando Estimadores LAD<sup>1</sup>

Paulo M. M. Rodrigues, *pmrodrigues@bportugal.pt*

*Banco de Portugal e Nova SBE da Universidade Nova de Lisboa*

## 1 Introdução

Este trabalho propõe um teste de memória longa, do tipo multiplicador de Lagrange, baseado no método dos mínimos desvios absolutos que permite abordar de forma robusta a hipótese de integração fracionária em ambientes não-Gaussianos. A distribuição nula deste teste obedece a leis padrão (como, por exemplo, a distribuição normal) e é livre de parâmetros de perturbação. A validade da abordagem em amostras finitas é estabelecida através de simulações de Monte Carlo.

Grande parte dos testes de tendências estocásticas baseam-se no método dos mínimos quadrados (LS), conseguindo propriedades ótimas somente em contexto Gaussiano. No entanto, muitas variáveis observadas seguem distribuições de cauda pesada. Este artigo contribui para a literatura propondo um teste, baseado no método dos mínimos desvios absolutos (LAD), do tipo multiplicador de Lagrange (LM), para detetar memória longa em séries temporais.

O teste que irá ser proposto generaliza o procedimento de Breitung e Hassler [BH] (2002), e permite abordar hipóteses mais gerais do que apenas o caso da raiz unitária como é habitual na literatura. Além disso, invertendo as estatísticas de teste pode-se facilmente obter intervalos de confiança para o parâmetro de memória longa; Hassler, Rodrigues e Rubia (2009). Na discussão dos testes de memória longa baseados em LAD propostos neste artigo, demonstra-se que as distribuições destes procedimentos, sob a hipótese nula, não dependem do grau de integração da série observada, nem de outros parâmetros perturbadores, o que está em contraste com os testes de raiz unitária robustos existentes na literatura.

O restante artigo está organizado da seguinte forma. A secção 2 analisa o teste baseado em LS proposto por BH e discute o comportamento assintótico do novo procedimento baseado em LAD. A Secção 3 apresenta o desempenho dos testes em amostra finita e a Secção 4 conclui.

## 2 Testes de memória longa

Considere o processo de geração de dados (PGD),

$$(1 - L)^{d+\delta} y_t = \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T \quad (1)$$

onde  $L$  representa o operador de defasamento temporal,  $(d, \delta)'$  é um vetor de valor real com elementos desconhecidos não restritos a assumirem valores inteiros,  $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$  e  $\varepsilon_k = 0$  para todo  $k \leq 0$ . O interesse reside em testar a hipótese nula de que  $\{y_t\}$  é integrada de ordem  $d$ , i.e.,  $I(d)$ , contra a alternativa  $I(d + \delta)$ , ou seja, testar  $H_0 : \delta = 0$  contra  $H_a : \delta \neq 0$  para um dado valor de  $d$ . A raiz unitária,  $d = 1$ , é um caso particular deste procedimento uma vez que  $d$  pode tomar qualquer valor real.

---

<sup>1</sup> Texto baseado em trabalho recentemente desenvolvido por Uwe Hassler (Goethe University Frankfurt), Paulo M. M. Rodrigues (Banco de Portugal e Nova SBE), e Antonio Rubia (University of Alicante).

## 2.1 O teste baseado em LS

O PGD descrito acima tem sido considerado, entre outros, por Robinson (1994) e por Tanaka (1999), que propõem testes de memória longa, num contexto Gaussiano, nos domínios da frequência e do tempo, respectivamente. BH propõem um procedimento simples baseado numa regressão que foi generalizado por Demetrescu et al. (2008) e Hassler et al. (2009). Para ilustrar as principais características deste teste, considere  $\{\varepsilon_{t,d}\}$  que corresponde a  $\{y_t\}$  diferenciado sob a hipótese nula, ou seja,

$$\{\varepsilon_{t,d}\} := (1 - L)^d y_t \quad (2)$$

e defina  $x_{t-1,d}^*$  como a soma parcial ponderada de desfasamentos de  $\varepsilon_{t,d}$  i.e.,

$$x_{t-1,d}^* := \sum_{j=1}^{t-1} j^{-1} \varepsilon_{t-j,d}, \quad t = 2, \dots, T. \quad (3)$$

Seguindo o princípio LM, sob o presuposto de erros Gaussianos e com base em (2) e (3), BH demonstram que o teste LM para a hipótese nula  $H_0 : \delta = 0$  em (1), que designamos por  $LM_{LS}$ , é equivalente ao quadrado da estatística  $t$  sobre  $\hat{\phi}_{LS}$ , para testar  $H_0 : \phi = 0$  obtido da regressão auxiliar,

$$\varepsilon_{t,d} = \phi x_{t-1,d}^* + u_t. \quad (4)$$

O teste é dado por,

$$LM_{LS} := \frac{(\sum_{t=2}^T \varepsilon_{t,d} x_{t-1,d}^*)^2}{\hat{\sigma}_u^2 \sum_{t=2}^T (x_{t-1,d}^*)^2} \quad (5)$$

onde  $\hat{\sigma}_u^2$  indica a estimativa da variância residual obtida de (4) pelo método LS. Note que o teste  $LM_{LS}$  é assintoticamente equivalente aos testes de Robinson (1994) e Tanaka (1999).

Considerando  $\{y_t\}$  gerado como em (1), com  $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$ , BH demonstram ainda, sob a hipótese nula  $H_0 : \phi = 0$  com  $T \rightarrow \infty$ , que  $\sqrt{T} \hat{\phi}_{LS} \Rightarrow \mathcal{N}(0, \frac{6}{\pi^2})$ , e  $LM_{LS} \Rightarrow \mathcal{X}_{(1)}^2$ , onde  $\Rightarrow$  denota convergência em sentido fraco.

**Observação:** Note-se que apesar do pressuposto da normalidade não ser estritamente necessário para a derivação do teste (isto é,  $LM_{LS} \Rightarrow \mathcal{X}_{(1)}^2$  com  $T \rightarrow \infty$ , independentemente dos erros serem ou não normais), é apenas sob esta restrição que o teste atinge a eficiência observada por Robinson (1994). No entanto, no caso de grandes desvios da distribuição normal, o teste não é o mais eficiente e pode sofrer perdas graves de desempenho em amostras finitas (ver resultados Monte Carlo abaixo).

## 2.2 O teste baseado em LAD

Num contexto de não-normalidade e observações extremas ou discordantes, como frequentemente é encontrado, por exemplo, em finanças, para garantir a robustez da inferência, o parâmetro  $\phi$  na regressão auxiliar (4) pode alternativamente ser estimado por recurso ao método LAD, i.e.,

$$\hat{\phi}_{LAD} := \operatorname{argmin}_{\phi \in \mathbb{R}} \sum_{t=2}^T |\varepsilon_{t,d} - \phi x_{t-1,d}^*|. \quad (6)$$

Assim, paralelamente à análise LS, a hipótese  $H_0 : \phi = 0$  pode ser testada através do teste

$$LM_{LAD} := [2\hat{\phi}_{LAD}\hat{f}(0)]^2 \sum_{t=2}^T (x_{t-1,d}^*)^2 \quad (7)$$

onde  $\hat{f}(0)$  é uma estimativa consistente da função de densidade (desconhecida) dos resíduos da regressão,  $\hat{u}_{t,d} := \varepsilon_{t,d} - \hat{\phi}_{LAD}x_{t-1,d}^*$ , avaliada na origem. De seguida, sob condições similares às consideradas em Delgado e Velasco (2005), generaliza-se o contexto analisado em BH para caracterizar a distribuição assintótica do teste  $LM_{LAD}$  proposto.

**Teorema 2.1** Considerando  $\{y_t\}$  gerado como em (1) com  $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$  e mediana zero, e assumindo que as inovações são distribuídas de forma contínua, com densidade  $f$  estritamente positiva numa vizinhança de zero, segue-se, sob a hipótese nula  $H_0 : \phi = 0$  com  $T \rightarrow \infty$  que,

$$\sqrt{T}\hat{\phi}_{LAD} \Rightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{3}{2\pi^2 f^2(0)\sigma^2}\right), \quad (8)$$

e assumindo que  $\hat{f}(0)$  é um estimador consistente de  $f(0)$  então  $LM_{LAD} \Rightarrow \chi_{(1)}^2$ .

Há duas características do  $LM_{LAD}$  que devem ser destacadas em relação a outros procedimentos na literatura: *i*) o  $LM_{LAD}$  é assintoticamente distribuído como o  $LM_{LS}$ , e *ii*) tem uma distribuição livre de parâmetros perturbadores. Estas propriedades permitem que a inferência seja realizada sem a necessidade de computação de valores críticos, o que contrasta com os testes robustos de raiz unitária existentes na literatura. Por exemplo, o teste de raízes unitárias de Herce (1996), baseado em LAD, tem uma distribuição assintótica que pode ser representada por  $\rho DF + \sqrt{1 - \rho^2}Z$ , onde  $DF$  indica a distribuição não convencional de Dickey e Fuller (1979),  $Z$  é uma variável aleatória independente e normal padrão, e o parâmetro  $\rho$  mede a correlação entre  $\varepsilon_t$  e o  $sin(\varepsilon_t)$ , onde  $sin(\varepsilon_t) := 2\mathbb{I}(\varepsilon_t > 0) - 1$  e  $\mathbb{I}(\cdot)$  uma função indicadora. Estes testes exigem a computação dos valores críticos necessários.

### 3 Resultados em amostra finita

Nesta secção compara-se o comportamento em amostras finitas dos testes  $LM_{LS}$  e  $LM_{LAD}$  discutidos anteriormente. Dado que o desempenho destes testes em amostras finitas sob (1) com  $\varepsilon_t$  seguindo uma distribuição normal tem recebido atenção considerável na literatura (ver, por exemplo, BH e Nielsen (2004)), esta secção foca-se apenas em distribuições de cauda pesada.

Nesta análise consideram-se dados gerados a partir de  $(1 - \alpha L)(1 - L)^{d+\delta}y_t = \varepsilon_t$ ,  $t = 1, \dots, T$ , onde  $\varepsilon_t$  é iid e segue uma distribuição t-Student com  $\nu \in \{2, 3, 4\}$  graus de liberdade, como em Koenker e Xiao (2004),  $\alpha \in \{0, 0.5\}$  e  $T \in \{100, 300\}$ . Para  $\nu = 2$ ,  $\varepsilon_t$  tem variância infinita, uma possibilidade que não foi abordada formalmente na secção anterior. A distribuição t-Student é contínua, e uma vez que verifica  $E(|\varepsilon_t|^{p+r}) < \infty$  para qualquer  $r > 0$  arbitrariamente pequeno, pode pensar-se em  $\nu = 2$  como o caso limite de  $E(\varepsilon_t^{2+r})$  quando  $r$  se aproxima de zero.

Como em BH, sob a hipótese nula, vamos concentrar-nos no caso da raiz unitária,  $d = 1$ , e analisar as frequências de rejeição médias ao testar  $H_0 : \delta = 0$  contra uma alternativa bilateral a um nível de significância de 5% para valores de  $\delta \in \{-0.5, -0.4, \dots, 0, 0.1, \dots, 0.5\}$ . A distribuição nula dos testes não depende do valor particular de  $d$ , e as propriedades são principalmente determinadas pela magnitude de  $\delta$  e do seu sinal. Nesta análise avaliamos o teste  $LM_{LS}$ , e uma versão do mesmo baseado na correcção de White ( $LM_{LS}^W$ ), c.f. Demetrescu et al. (2008), bem como o  $LM_{LAD}$  introduzido neste trabalho. Todas as simulações são baseadas em 5000 replicações. Como é habitual na literatura aplicada, apresentamos resultados para os testes calculados a partir da regressão,

$$\varepsilon_{t,d} = \phi x_{t-1,d}^* + \sum_{k=1}^p \alpha_k \varepsilon_{t-k,d} + e_t \quad (9)$$

onde  $p$  é determinado com base na regra de Schwert,  $p := [4(T/100)^{1/4}]$ .

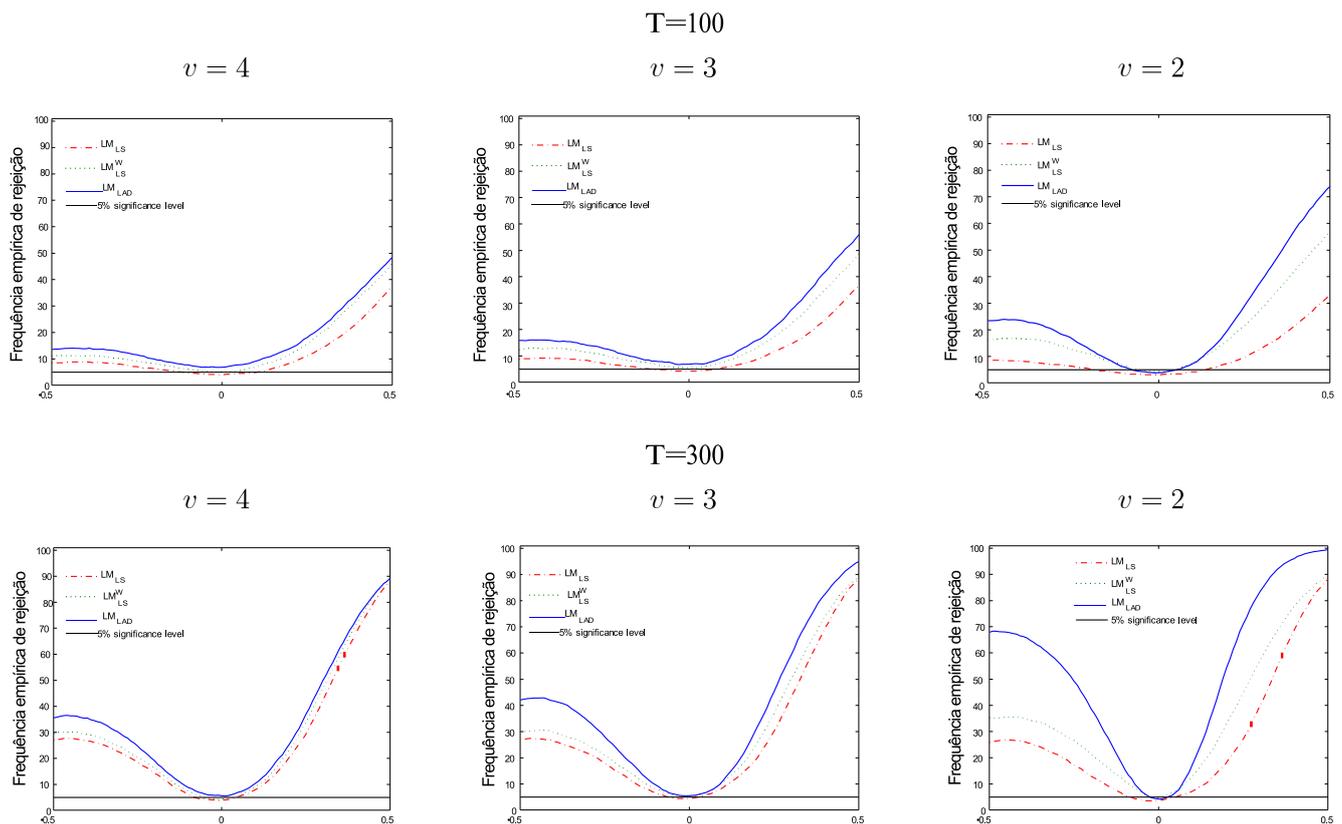


Figura 1: Frequência de rejeição empírica dos testes  $LM_{LS}$ ,  $LM_{LS}^W$  e  $LM_{LAD}$  quando o  $PGD$  é  $(1 - \alpha L)(1 - L)^{d+\delta} x_t = \varepsilon_t$ , com  $\alpha = 0.5$  e  $\varepsilon_t$  segue a distribuição t-Student com  $\nu$  graus de liberdade.

A Figura 1 destaca vários resultados importantes:

1. O  $LM_{LAD}$  é ligeiramente sobredimensionado para  $\nu > 2$  (para  $T = 100$ ,  $\alpha = 0.5$  e  $\nu = 3$  e  $4$ , a rejeição empírica sob a hipótese nula é de 6,84% e 6,80%, respectivamente), em pequenas amostras, mas melhorar quando o tamanho da amostra aumenta (para  $T = 300$ ,  $\alpha = 0.5$  e  $\nu = 2, 3$  e  $4$ , a rejeição empírica sob a hipótese nula é de 4,20%, 5,56% e 5,64%, respectivamente), enquanto que a rejeição empírica dos testes  $LM_{LS}^W$  é próxima do valor nominal de 5%, a do  $LM_{LS}$  é ligeiramente conservador.
2. Todos os testes sugerem assimetria no padrão de rejeição, assimetria essa que é mais acentuada para  $T = 100$ , mas ainda está fortemente presente com  $T = 300$ , embora pareça estar a diminuir há medida que o tamanho da amostra aumenta e as caudas se tornam mais pesadas. Além disso, essa assimetria é mais acentuada na versão LS do teste do que no LAD.
3. A superioridade do desempenho dos  $LM_{LAD}$  aumenta à medida que o peso das caudas aumenta.
4. Os resultados para o caso  $iid$  ( $\alpha = 0$ ) não são relatados a fim de economizar espaço, mas o perfil de rejeição dos testes é semelhante ao apresentado na Figura 1.

## 4 Conclusão

Este artigo introduz um teste de integração fracionária baseado em LAD e demonstra que a abordagem LAD supera significativamente os procedimentos LS em ambientes onde as inovações seguem distribuições de cauda pesada.

Uma propriedade interessante dos testes tipo LM baseados em LAD (comum aos testes LM baseados em LS) é que, sob a hipótese nula, estes convergem para uma distribuição normal padrão ou para uma distribuição Qui-quadrado (dependendo do teste que se considere). Além disso, as versões aumentadas destes testes são assintoticamente robustas contra dependência nos erros sob condições bastante gerais, e apresentam bom desempenho estatístico em amostras de dimensão moderada. Isso faz com que os procedimentos introduzidos neste trabalho sejam uma ferramenta valiosa para lidar com a determinação da ordem de integração de uma série, em particular, em contextos não-Gaussianos.

Embora as técnicas baseadas em LS tenham sido preferidas a abordagens alternativas, devido às suas boas propriedades estatísticas, simplicidade e facilidade computacional, existem contextos práticos em que o LS não proporciona estimativas ótimas, e onde as propriedades dos testes podem ser melhoradas através da aplicação de procedimentos tais como o LAD discutido neste trabalho. O teste proposto é, portanto, um importante contributo que pode facilmente ser estimado juntamente com o seu homólogo LS e a sua significância avaliada com base nos mesmos valores críticos.

## Referências

- Breitung, J., Hassler, U., 2002. Inference on the cointegration rank in fractionally integrated processes. *Journal of Econometrics* 110, 167-185.
- Delgado, M.A., Velasco, C., 2005. Sign tests for long-memory time series. *Journal of Econometrics* 128, 215-251.
- Demetrescu, M., Kuzin, V., Hassler, U., 2008. Long memory testing in the time domain. *Econometric Theory* 24, 176-215.
- Hassler, U., Breitung, J., 2006. A residual-based LM type test against fractional cointegration. *Econometric Theory* 22, 1091-1111.
- Hassler, U., Rodrigues, P.M.M., Rubia, A., 2009. Testing for the General Unit Root Hypothesis in the Time Domain. *Econometric Theory* 25, 1793-1828.
- Herce, M., 1996. Asymptotic theory of LAD estimation in a unit root process with finite variance errors. *Econometric Theory* 12, 129-153.
- Koenker, R., Xiao, Z., 2004. Unit Root Quantile Autoregression Inference. *Journal of the American Statistical Association* 99, 775-787.
- Nielsen, M., 2004. Efficient likelihood inference in nonstationary univariate models. *Econometric Theory* 20, 116-146.
- Robinson, P.M., 1994. Efficient tests of nonstationary hypotheses. *Journal of the American Statistical Association* 89, 1420-1437.
- Tanaka, K., 1999. The nonstationary fractional unit root. *Econometric Theory* 15, 549-582.



## ***Data Science* – um desafio para os estatísticos?**

Paula Brito, *mpbrito@fep.up.pt*

*Faculdade de Economia & LIAAD - INESC TEC, Universidade do Porto*

Está definitivamente “na ordem do dia”. Há quem ache que é apenas mais uma *buzzword*... que fatalmente passará de moda como outras antes dela. Mas há quem ache que é uma nova área científica a parte inteira. Mas do que se está a falar afinal de contas quando se fala de *Data Science*? De que trata afinal? Tem a ver com os dados? A ciência de analisar os dados? Com a atitude? É uma nova ciência? É realmente algo de novo?... E a Estatística, onde fica no meio deste movimento?

Recuemos um pouco, e vejamos como alguns eminentes estatísticos foram, ao longo de anos, abrindo caminho a esta “Ciência dos Dados”.

Em 1961, Tukey escrevia, no seu famoso artigo intitulado *The Future of Data Analysis*: “(...) my central interest is in data analysis, which I take to include, among other things: procedures for analysing data, techniques for interpreting the results of such procedures, ways of planning the gathering of data to make its analysis easier, more precise or more accurate, and all the machinery and results of (mathematical) statistics which apply to analysing data...”. Não é disto que se fala quando se fala de *Data Science* ?... Tukey identificava quatro motores desta nova ciência: “Four major influences act on data analysis today: 1. The formal theories of statistics; 2. Accelerating developments in computers and display devices; 3. The challenge, in many fields, of more and ever larger bodies of data ; 4. The emphasis on quantification in an ever wider variety of disciplines”. Ou seja: Tukey via o desenvolvimento da Análise de Dados como o resultado da interacção da modelação estatística com o desenvolvimento informático, no contexto de um progressivo aumento da quantidade de dados disponíveis num universo cada vez mais alargado. É no mesmo período que em França, Jean-Paul Benzécri lança a escola francesa de *Analyse des Données*. Os princípios que levaram a este desenvolvimento da Análise de Dados ainda se aplicam hoje, num tempo em que a quantidade de dados disponíveis, a sua forma e complexidade, não cessam de aumentar.

Chambers, em 1993, punha o dedo na ferida, ao considerar que se a Estatística queria ter um papel central, não podia ignorar a análise dos dados: “The statistics profession faces a choice in its future research between continuing concentration on traditional topics (...) and a broader viewpoint based on an inclusive concept of learning from data. The latter course presents severe challenges as well as exciting opportunities. The former risks seeing statistics become increasingly marginal...”. O desafio estava lançado.

Em Novembro de 1997, C.F. Jeff Wu apresentou uma conferência intitulada “Statistics = Data Science?” para a sua nomeação para a H. C. Carver Professorship na Universidade do Michigan. Foi Wu quem popularizou o termo *Data Science*, advogando que *Statistics* deveria ser renomeada *Data Science* e os estatísticos designados *data scientists*. Wu defendeu que o ensino da Estatística devia ser mais equilibrado, com ênfase na análise de conjuntos de dados extensos e complexos, e definitivamente interdisciplinar. Mas ainda que sublinhando o ênfase na exploração de dados, será que a *Data Science* se constituiu apenas pela Estatística?

Cleveland (2001) viria a apresentar uma definição de *Data Science* como “An Action Plan for Expanding the Technical Areas of the Field of Statistics”, continuando que “an action plan ... focuses on the data analyst.” No mesmo ano, Leo Breiman escrevia que há duas culturas na utilização de modelação estatística para obter informação a partir de dados: Uma assume que os dados são gerados por um dado modelo estocástico – é o modelo Gerativo. O objectivo é então o de encontrar o “melhor” modelo que se ajusta aos dados e depois fazer inferências sobre o mecanismo de geração dos dados baseadas nesse modelo. Breiman entendia que esmagadora maioria da comunidade estatística se

revê nesta cultura. A outra cultura usa abordagens algorítmicas e considera o modelo que gerou os dados como desconhecido – é o modelo Preditivo. Foca-se na previsão, e interessa-se pela precisão de diferentes algoritmos. Um pequena parte dos estatísticos seguem esta linha, que por outro lado engloba muitos investigadores de *Computer Science*, em particular os de *Machine Learning*. E Breiman escrevia: “The statistical community has been committed to the almost exclusive use of [generative] models. This commitment has led to irrelevant theory, questionable conclusions, and has kept statisticians from working on a large range of interesting current problems. [Predictive] modelling, both in theory and practice, has developed rapidly in fields outside statistics. It can be used both on large complex data sets and as a more accurate and informative alternative to data modelling on smaller data sets. If our goal as a field is to use data to solve problems, then we need to move away from exclusive dependence on [generative] models ...”. Ou seja, para ter um papel relevante no desenvolvimento da *Data Science*, os estatísticos terão que se abrir a outras formas de pensar para além dos modelos generativos com os quais se sentem tão confortáveis... Bin Yu mostrou tê-lo compreendido claramente quando disse, no seu discurso de Presidente do IMS, em 2014: “Data Science represents an inevitable (re)-merging of computational and statistical thinking in the big data era”! O título da palestra era “Let us own Data Science” ...

O que é então um “cientista de dados”? Que outras competências deve um estatístico desenvolver para poder responder ao desafio desta que já foi considerada “a profissão mais *sexy* do século XXI”?

Segundo o respectivo código de conduta profissional, um cientista de dados é alguém que usa métodos científicos para “libertar” e criar sentido a partir de dados “brutos”.

Michael E. Driscoll escreveu no seu *Twitter* (17 /07/2012): “Data scientists: better statisticians than most programmers & better programmers than most statisticians”. Ou seja: estatísticos sim, mas não só, o cientista de dados tem que ter competências em programação.

Consultada a Wikipédia, encontramos: “Data scientists use their data and analytical ability to find and interpret rich data sources; manage large amounts of data despite hardware, software, and bandwidth constraints; merge data sources; ensure consistency of datasets; create visualizations to aid in understanding data; build mathematical models using the data; present and communicate the data insights/findings.” O cientista de dados deve ainda ter competências em comunicação! A IBM é clara ao acrescentar às competências em Estatística e Informática a visão do negócio e capacidade de comunicação: “A data scientist represents an evolution from the business or data analyst role. The formal training is similar, with a solid foundation typically in computer science and applications, modelling, statistics, analytics and math. What sets the data scientist apart is strong business acumen, coupled with the ability to communicate findings to both business and IT leaders. It's almost like a Renaissance individual who really wants to learn and bring change to an organization.”

A Technopedia sublinha a capacidade de resolução de problemas: “A data scientist is an individual, organization or application that performs statistical analysis, data mining and retrieval processes on a large amount of data to identify trends, figures and other relevant information. A data scientist performs data analysis on data stored in data warehouses or data centres to solve a variety of business problems, optimize performance and gather business intelligence.”

Neste contexto de rápido desenvolvimento, e identificadas as valências necessárias, e a crescente procura de *data scientists*, têm-se multiplicado os programas de mestrado que visam formar estes novos cientistas. Estes programas tendem a fazer um *mix* de disciplinas típicas de mestrados em Estatística, com outras de programas em *Machine Learning*, visando fornecer uma formação multifacetada. No entanto, a mera combinação de disciplinas de diferentes “proveniências” poderá não ser o mais adequado... No seu artigo “50 Years of Data Science”, Donoho critica a abordagem que é por vezes seguida de formar programas de mestrado em *Data Science* apenas por “justaposição” de disciplinas de Estatística e de *Computer Science*, sem uma visão integrada. Como alternativa, estabelece o que designa por “*the full scope of Data Science*”, considerando uma divisão em seis pontos: 1. Exploração e Preparação dos dados - incluindo a análise preliminar dos dados, avaliação da sua qualidade, detecção de eventuais *outliers*, todo o pré-processamento; 2. Representação e Transformação dos dados – onde se fala de gestão de bases de dados mas também de representações por recurso a modelos matemáticos como transformadas de Fourier ou *wavelets*; 3. Implementação e Cálculo – que requer o domínio de diferentes linguagens de programação, capacidade de desenvolver pacotes, conhecimento de computação paralela, ou na *cloud*,...; 4. Modelação – é aqui que entram os modelos estatísticos generativos e os modelos preditivos do *Machine Learning*; 5. Visualização e

Apresentação – explorando as muitas possibilidades que diferentes técnicas de visualização hoje permitem, e o novo quadro da *Visual Analytics* – “The science of analytical reasoning facilitated by interactive visual interfaces”; 6. Ciência sobre a “Ciência dos Dados” – que pressupõe a disponibilização dos dados que são analisados, a partilha de *workflows*, e a reproductibilidade da investigação.

*Data Science - the science of extracting knowledge from data*, não é nem pode ser “apenas” Estatística, mas também não se limita à área da *Computer Science*. E não pode ser apenas a “colagem” de duas abordagens distintas – requer uma visão integrada, que vai buscar contributos importantes àquelas duas áreas, mas também requer competências de comunicação, de técnicas de visualização, de análise de negócio... Se os estatísticos abraçarem o desafio de se abrirem a novas formas de pensar e de comunicar, a Estatística terá um papel relevante, e que se nos afigura imprescindível, para o desenvolvimento sadio da *Data Science*.

### Referências

- Breiman, Leo (2001). Statistical modelling: The two cultures (with comments and a rejoinder by the author). *Statistical Science* 16.3, 199-231.
- Chambers, John M. (1993). Greater or lesser statistics: a choice for future research. *Statistics and Computing*, 3(4), 182-184.
- Cleveland, William S. (2001). Data science: an action plan for expanding the technical areas of the field of statistics. *International statistical review* 69.1, 21-26.
- Donoho, David (2015). 50 years of Data Science. Princeton NJ, *Tukey Centennial Workshop*.
- Patil, T.H., and Davenport, D. J. (2012). Data Scientist: The Sexiest Job of the 21st Century. *Harvard Business Review*, 70, Outubro 2012.
- Tukey, John W. (1962). The future of data analysis. *The Annals of Mathematical Statistics* 33.1, 1-67.
- Wu, C.F. Jeff (1997). Statistics= Data Science. Slides disponíveis *online*: <http://www2.isye.gatech.edu/~jeffwu/presentations/datascience.pdf> (consultado em 17/09/2016).
- Yu, Bin (2014). Let us own data science. *IMS Bulletin Online*, 43(7).
- “Data Scientists: quem são e porque são tão procurados”  
<http://expressoemprego.pt/noticias/data-scientists--quem-sao-e-porque-sao-cao-procurados/4153>
- Código de Conduta: <http://www.datascienceassn.org/code-of-conduct.html>

**NOTA: Por vontade expressa da autora, o artigo não se apresenta ao abrigo do novo Acordo Ortográfico.**



## Uma reflexão *enviesada* (!) sobre a "nossa" SPE

Manuela Neves, *manela@isa.ulisboa.pt*

*ISA e CEAUL*

Há alguns anos, num dos Congressos da “nossa” SPE, o XIV realizado em 2006 na Covilhã, o colega Russell Alpizar-Jara teve a gentileza de me convidar a falar na Sessão Temática intitulada “Modelação Estatística com Aplicações às Ciências da Vida”. Não tinha grande experiência em colaborações naquela área mas sob a responsabilidade do Departamento de Matemática do Instituto Superior de Agronomia estava em pleno funcionamento o “Mestrado em Matemática Aplicada às Ciências Biológicas”. Decidi, por isso, falar de alguns dos trabalhos que os nossos excelentes alunos tinham preparado para apresentar nas suas teses, procurando diversificar os temas, as áreas específicas de aplicação e os procedimentos estatísticos que os autores necessitaram de utilizar na análise dos seus dados.

Antes de iniciar a minha apresentação e tendo combinado com o Russell, preparei uma pequena brincadeira, na qual simulei ilustrar a aplicação do método de captura-recaptura, para “estimar a probabilidade de um colega qualquer ir a um congresso da SPE”. Este problema até era complexo (!) pois logo o pressuposto clássico de a amostragem se realizar numa população fechada falhava – todos os anos surgem caras novas nos nossos Congressos, felizmente!

Um dos colegas que foi “capturado” e “recapturado” nessa minha brincadeira é o “responsável” por eu estar a preparar este texto. Quando me pediu para escrever sobre a SPE, a cuja Direcção, Conselho Fiscal ou simplesmente como sócia, pertencia/tenho pertencido há muitos anos, a minha primeira ideia foi falar dos Congressos. Particpei, pela primeira vez na 1ª Conferência em Estatística e Optimização com organização conjunta da então Sociedade Portuguesa de Estatística e Investigação Operacional (SPEIO) e do Centro de Estatística e Aplicações da Universidade de Lisboa (CEAUL). Realizada em Troia, em 1990, contou com cerca de 200 participantes. Entretanto, o grupo de Investigação Operacional que integrava a SPEIO juntou-se à Associação Portuguesa de Investigação Operacional (APDIO), vindo o grupo da Estatística a alterar os estatutos da sociedade, que passou a designar-se Sociedade Portuguesa de Estatística (SPE), ver o *Memorial da Sociedade Portuguesa de Estatística*, 2005, Rosado (ed.). Em Junho de 1993 realizou-se no Vimeiro o *I Congresso Anual da SPE* e já vamos no *XXII*, que teve lugar em 2015, em Olhão. E eu estive presente em todos!

Efectivamente os Congressos da SPE são a reunião magna da nossa sociedade, a oportunidade de iniciação de “jovens” estatísticos, de partilha e de a aquisição de novas experiências dos utilizadores da Estatística, o momento de encontro dos “menos jovens”, o reencontro de “amigos jovens ou menos jovens”. Os desafios a que todos estamos sujeitos, com muito maior preocupação nos mais novos, levam inevitavelmente a que seja muito difícil manter o nível de exigência de publicações e a participação com trabalho científico de valor, com a periodicidade anual dos Congressos. A anterior Direcção (à qual eu pertenci) colocou no seu programa de candidatura e referendou a periodicidade anual ou bienal dos Congressos. Passou a ser bienal mas confesso que continuo dividida! À distância digo, desta vez não vou, já estou cansada!... mas quando se vai aproximando o prazo limite da inscrição, começo a sentir um *formigueiro*... e lá vou eu inscrever-me! Mesmo sendo muito difícil sentir-me com energia para continuar a participar, sinto muita falta daqueles dias de convívio!

Os Congressos são, como disse, para muitos de nós, momentos de encontro de uma “família”, com a sua parte “séria” mas também com a parte de “festa”, com o reencontro de colegas que as responsabilidades da vida colocaram mais distantes. Gosto tanto de participar! Que bem sabe cumprimentar, abraçar, rever!

Não posso falar dos Congressos sem deixar uma palavra aos "responsáveis" pelo seu sucesso. Em minha opinião penso mesmo que o sucesso resulta de que eles são preparados "com o coração!" - é a escolha dos conferencistas convidados, é o local, é a preparação das sessões, é toda a montagem, são os passeios aos congressistas e aos acompanhantes (o que eles não têm gozado enquanto nós, coitadinhos, ali estamos metidos a trabalhar!) . A última palavra para os participantes, naturalmente, que recompensam com a sua presença e apresentação de trabalhos o esforço dos que os organizam!

Esta primeira parte da minha reflexão, muito *enviesada* como avisei de início mas que não sei como corrigir apesar de fazer alguma investigação no grupo de Extremos na procura de "estimadores de parâmetros de acontecimentos raros de viés reduzido...", tem como destaque final o empenho, dedicação e carolice dos diferentes intervenientes na organização de um Congresso. As Comissões Organizadora, Científica e Editorial (mais tarde), com o apoio da Direcção, têm permitido que se fizesse e continue a fazer o que em cada Congresso nos continua a "surprender"! Vamos a caminho do XXIII e, enquanto escrevo estas linhas, e porque estou a fazê-lo no início de mais um ano lectivo aquela surpresa assemelha-se à que vivi há dias, quando me senti a olhar comovida e cheia de esperança para um anfiteatro cheio de alunos!

Mas há muito mais na "nossa" SPE. Como tenho tido a experiência de períodos de maior envolvimento e outros com uma participação mais calma, gostaria de deixar uma palavra de agradecimento a todos os que têm conseguido manter este "barco" a navegar! São o Presidente e respectivas Direcções (e já passaram sete, incluindo a actual) mas são ainda todos os outros Grupos/Comissões nas quais alguns colegas têm, com grande dedicação e carinho, ocupado muito do seu tempo para levar o conhecimento, divulgação e acção da SPE a alguns sectores da Sociedade (a Explorística, a Radical Estatística, a Comissão Especializada de Nomenclatura Estatística, a Comissão Especializada de Educação, a A Estatística Vai à Escola, a Secção de Biometria...) e ainda a intervenção pontual de muitos sócios, que de uma ou outra forma participam. Neste agradecimento incluo naturalmente a "vida" do Boletim que tem contado com a dedicação em primeiro lugar do nosso colega Fernando Rosado, mas também dos que têm respondido aos seus desafios!

Apesar das muitas dificuldades por que estamos a passar (na verdade continua a desprestigiar-se o trabalho realizado a nível nacional) tenho alguma esperança de ver um maior envolvimento de gente jovem. Nas Assembleias Gerais estão quase sempre as mesmas caras! Pois aí talvez seja possível trazer alguma energia e sangue fresco para “renovar” o papel da SPE. E este papel devia, em meu entender, passar pela cooperação/ligação a outras Sociedades congéneres, todas elas talvez passando pelas mesmas dificuldades, das quais cito a título de exemplo, a Associação Portuguesa de Classificação e Análise de Dados, a Sociedade Portuguesa de Matemática, a Associação dos Professores de Matemática, a Associação Portuguesa de Demografia e outras Sociedades que trabalham em aplicações que, cada vez mais necessitam da Estatística.

Quanto à colaboração com a Associação dos Professores de Matemática, considero que, apesar de alguns colegas terem dedicado e continuarem a dedicar muito do seu tempo à colaboração nos ensinamentos básico e secundário (perdoem-me não citar nomes mas não quero melindrar ninguém por esquecimento!) penso que a SPE deverá procurar ter um papel ainda mais interveniente e visível nesses graus de ensino. Conseguirá a SPE juntar "menos jovens" e profundamente conhecedores e experientes e "jovens" cheios de genica e ideias desafiadoras na afirmação do papel da Estatística?

(Texto escrito ao abrigo do antigo acordo ortográfico)



## Reflexões estatísticas

Carlos A. Braumann, *braumann@uevora.pt*

*CIMA - Centro de Investigação em Matemática e Aplicações, Instituto de Investigação e Formação Avançada, Universidade de Évora*

Agradecendo o convite do nosso amigo Fernando Rosado para escrever para o Boletim da SPE, venho, em jeito de comemoração do merecido sucesso do Boletim e de preocupação com o futuro da SPE e da Estatística, partilhar convosco a minha reflexão sobre três temas. O primeiro está relacionado com o ensino da Estatística. O segundo, pelo qual farei uma passagem fugaz, refere-se a alguns dos desafios atuais da Ciência Estatística que mais têm captado a minha atenção. O terceiro é sobre a comunidade estatística nacional, a sua inserção internacional e o seu futuro.

As recentes polémicas sobre o uso devido ou indevido do valor- $p$  (“ $p$ -value” em inglês) chamam a atenção para os cuidados que há a ter na transmissão aos nossos estudantes das ideias estatísticas. Os riscos de uma abordagem demasiado apressada e superficial são porventura ainda maiores nas unidades curriculares destinadas à formação estatística básica de estudantes de outras áreas. Essa formação é extremamente importante para a utilização e compreensão das análises estatísticas que irão encontrar na sua vida profissional, pelo que, apesar de termos de meter o Rossio na Rua da Betesga, é importante dedicar algum tempo à correta interpretação dos conceitos básicos da Estatística, até porque a sua utilização em unidades curriculares posteriores de outras áreas vem frequentemente reforçar os erros de perceção inicial mais comuns. A situação agrava-se quando se criam unidades curriculares com variadas designações (“Metodologias de Investigação em ...” é muito comum) que não são mais do que unidades curriculares de Estatística assim transvertidas para justificar serem lecionadas (sem qualquer colaboração de professores da área da Estatística) por colegas professores de outras áreas sem formação estatística adequada. Não falando já do problema da interpretação menos correta dos resultados estatísticos, podia dar (mas não vou fazê-lo) exemplos chocantes de utilizações grosseiras de metodologias estatísticas totalmente inadequadas ao problema em estudo, utilizações que obviamente o *software* permite e que, ainda por cima, são às vezes transmitidas às vítimas inocentes (os alunos) como se de grande inovação científica se tratasse.

Mas a reflexão sobre o uso dos valores- $p$  leva-me a uma outra questão que tem a ver com a própria teoria estatística que transmitimos, designadamente com a hipótese nula e os testes de significância. De facto, aceitar ou rejeitar a hipótese nula tem pouco a ver com ela ser verdadeira ou falsa. Não estou a falar de erros de primeira ou segunda espécie, nem sequer dos erros de terceira espécie (inadequação do modelo estatístico). Estou a falar de uma falácia fundamental, podíamos chamar-lhe um erro de quarta espécie, que está subjacente a esta teoria estatística. Com efeito, na esmagadora maioria (senão mesmo na totalidade) das aplicações, mesmo sem quaisquer dados, e obviamente sem qualquer teste estatístico, é seguro afirmar categoricamente e *a priori* que a hipótese nula é falsa. Por que razão é que dois tratamentos de uma doença teriam exatamente a mesma probabilidade de cura, sem o mínimo desvio? Por que razão é que dois materiais diferentes teriam exatamente a mesma resistência? Por que razão é que a altura média  $\mu_1$  de uma população de um país haveria de ser exatamente igual à altura média  $\mu_2$  da população de outro país? Por que razão dois métodos de ensino deveriam ter exatamente a mesma taxa de sucesso? Mesmo em casos aparentemente mais controlados, por que razão é que a probabilidade de sair cara no lançamento de uma moeda deveria ser exatamente 1/2, isto é, será que há mesmo moedas absolutamente honestas? É óbvio que haverá sempre uma diferença, por mínima que seja. Presumir que seria possível uma igualdade perfeita (entre duas quantidades ou entre uma quantidade e um valor de referência) constitui um modelo teórico que peca por não ser genérico e que

seria liminarmente descartado *a priori* noutras áreas de aplicação de modelos matemáticos, como sucede por exemplo nos sistemas dinâmicos aplicados.

Assim, na esmagadora maioria dos casos, quando testamos uma hipótese nula, concluir pela sua aceitação ou rejeição nada tem a ver com ela ser verdadeira ou falsa. Ela é, como vimos, falsa. Aceitar ou rejeitar a hipótese nula tem apenas a ver com o tamanho da amostra e o acaso. Se a nossa amostra for pequena, a probabilidade de aceitar a hipótese nula é muito elevada, não obstante essa hipótese ser falsa. Se a amostra for grande, a probabilidade de rejeitar a hipótese nula é muito elevada (de facto, esta probabilidade tende para um quando o tamanho da amostra tende para infinito). É claro que a hipótese nula, apesar de falsa, pode ser um instrumento útil, se admitirmos que não exigimos uma igualdade perfeita, isto é, se, para efeitos práticos, considerarmos verdadeira a hipótese nula caso a diferença entre as duas quantidades em causa seja muito pequena (inferior a uma certa margem de tolerância  $\varepsilon > 0$ ). Mas isso não é normalmente dito aos alunos. Designando por  $d$  o parâmetro que representa a diferença entre os parâmetros em comparação (por exemplo,  $d = \mu_2 - \mu_1$  ou  $d = p - 1/2$ ), o que nós de facto queremos não é testar  $H_0: d = 0$  versus  $H_1: d \neq 0$  mas decidir entre  $H_0: |d| < \varepsilon$  e  $H_1: |d| \geq \varepsilon$ . O leitor fará as necessárias adaptações se o teste for unilateral em vez de bilateral.

O caso da saúde é paradigmático. Se testarmos um novo medicamento comparativamente ao medicamento anteriormente usado numa determinada patologia, sendo  $p_1$  e  $p_2$  as taxas de cura do antigo e do novo medicamento, respetivamente, testamos  $H_0: p_1 = p_2$  (ou seja  $H_0: d = p_2 - p_1 = 0$ ) versus  $H_1: p_2 > p_1$  (ou seja  $H_1: d > 0$ ), apesar de  $H_0$  ser falsa à partida. Se o novo medicamento for ligeiramente melhor (isto é,  $p_2$  for maior que  $p_1$  mas por muito pouco), é só fazer ensaios clínicos com amostras suficientemente grandes para concluir que é de rejeitar a hipótese nula e de aceitar  $H_1$ . Se a análise ficar por aí, podemos estar a pressionar as autoridades de saúde para adotarem o novo medicamento, ainda que o seu custo seja exorbitante em comparação com o antigo, quando a sua taxa de cura é apenas muito ligeiramente superior. O que talvez devêssemos fazer era definir uma margem  $\varepsilon > 0$  que levaria à adoção do novo medicamento se houvesse evidência de que a sua taxa de cura superava a do antigo no mínimo por essa margem. Deveríamos então decidir entre  $H_0: d < \varepsilon$  e  $H_1: d \geq \varepsilon$ . E note-se que aqui a margem  $\varepsilon$  pode ser muito pequena mas também pode não ser tão pequena assim, dependendo a decisão política de considerações sobre a eficácia da utilização dos recursos e sobre a gravidade da patologia.

Esta área da saúde é muito delicada mas considerações semelhantes surgem noutras áreas em que a decisão sobre o valor de  $\varepsilon$  pode ser bem mais simples.

Nada disto é propriamente novidade, antes constitui conhecimento comum da comunidade estatística. Mas raramente passamos este conhecimento aos nossos alunos, até porque o problema reformulado é mais complexo. Mas devíamos, pelo menos, informar que a hipótese nula é uma base de trabalho um tanto “artificial”, sendo importante, além, da decisão sobre a sua aceitação ou rejeição, fazer intervir nas decisões de atuação outras considerações como, por exemplo, no caso dos medicamentos, as estimativas das taxas de cura.

Sobre o segundo tópico, os desafios atuais da Ciência Estatística, muito haveria a dizer, mas limitar-me-ei a uma breve referência a duas áreas que me parecem particularmente interessantes. Uma é a das grandes bases de dados (“big data sets”) que hoje abundam e do “data mining” (mineração de dados), onde estamos em competição com a informática e a inteligência artificial e onde uma síntese útil entre as abordagens estatística e informática parece ser um desafio interessante. A outra é a da estatística de processos estocásticos (estimação paramétrica, não-paramétrica ou semiparamétrica, simulação de Monte Carlo, seleção de modelos, testes de hipóteses), onde tem havido progressos muito relevantes mas onde há problemas particularmente interessantes que, pela sua dificuldade (especialmente no caso de processos em tempo contínuo em que as observações decorrem em tempo discreto ou quando há variáveis não observadas), ainda têm soluções pouco satisfatórias. Um problema particularmente difícil, mas que seria muito útil desenvolver, tem a ver com os tempos de passagem dos processos por certos limiares, seja o problema de determinar a sua distribuição e/ou os seus momentos, seja o de utilizar a distribuição ou os momentos empíricos dos tempos de passagem para inferir sobre o processo estocástico subjacente.

Finalmente, queria fazer uma referência à evolução da comunidade estatística nacional e aos desafios futuros que enfrenta. Hesitei muito em falar sobre este tema pois ele interliga-se com a atividade da SPE e entendo que quem, como eu, foi Presidente da SPE, deve exercer alguma cautela nas suas

intervenções, não vão elas ser interpretadas como pressão indevida sobre os atuais órgãos sociais. Mas, para além de não querer frustrar o convite do Editor do Boletim, sei que os detentores dos atuais órgãos me conhecem e sabem que eu conheço a sua independência, pelo que não há o risco de interpretarem mal a minha intervenção. Peço desde já desculpa se ela é, como não podia deixar de ser, influenciada pelo envolvimento afetivo de um sócio fundador que teve responsabilidades diretivas e deseja o melhor para a SPE.

A comunidade estatística portuguesa, trabalhando na academia e nos setores público e privado, teve um extraordinário desenvolvimento nas últimas décadas, acompanhando a crescente necessidade de pessoas com formação estatística qualificada. Isso resultou num aumento do número de estudantes a procurar formação inicial e avançada nestas áreas, o que, juntamente com o reconhecimento da necessidade de alguma formação estatística nos mais diversos cursos, levou ao crescimento do setor da Estatística nas instituições de ensino superior, acompanhado de um incremento exponencial da investigação e do reforço quantitativo e qualitativo dos centros de investigação com atividade nesta área. E com isso, e também pela sua elevada qualidade, a comunidade estatística nacional tem-se afirmado, quer no País, onde desempenha um importante papel no desenvolvimento, quer a nível internacional, seja em termos de publicações, seja em termos de reconhecimento, com estatísticos portugueses ocupando por mérito próprio cargos diretivos em sociedades científicas internacionais.

Mas este progresso da comunidade estatística nacional é indissociável da atuação da SPE, que tem tido um papel fundamental na construção do próprio sentido de comunidade e da sua coesão e como catalisador do desenvolvimento da Estatística a nível científico e profissional e na sua internacionalização. O mérito da SPE deve-se naturalmente ao dinamismo e empenhamento dos seus sócios na vida e na atividade da Sociedade.

A SPE tem promovido a cooperação com outros organismos com relevante atividade estatística, como o INE e o Banco de Portugal, e a interação entre as instituições de ensino superior e as instituições públicas e privadas onde a estatística é um instrumento importante de análise e intervenção. A SPE estabeleceu ligações com outras sociedades científicas congéneres, quer a nível europeu (que incluiu, entre outras iniciativas, um acordo para publicação internacional das Atas dos congressos e a criação da FENStatS), quer com o Brasil, quer ainda no âmbito do ISI, que contribuíram para uma maior conetividade internacional. A SPE, em cooperação com outras entidades, tem promovido a divulgação da Estatística, particularmente junto dos jovens, com atividades variadas, como os Prémios Estatístico Júnior, a Radical Estatística ou a Explorística, que é uma exposição interativa itinerante resultante da cooperação da SPE com o Ciência Viva que mereceu já dois prémios internacionais de grande relevo (além de estar a ser exportada para outros países).

Mas a atividade da SPE que mais se destaca, pelo papel fundamental que desempenhou na coesão da comunidade estatística nacional e no desenvolvimento da sua atividade estatística, foi a realização dos Congressos anuais e publicações associadas (atas e livros de minicurso). Os Congressos, para além de constituírem uma vivida e desejada celebração da comunidade e do seu labor já consagrada nos seus hábitos, permitiram um melhor conhecimento mútuo e um incentivo ao desenvolvimento científico e aperfeiçoamento profissional, inclusivamente pelos estudantes de pós-graduação. Claro que a isso não é alheio o convívio num espírito de cordialidade e amizade que as atividades da SPE e a efetiva participação dos sócios na definição e construção do futuro da Sociedade proporcionam.

Recentemente, o País foi abalado por uma crise da qual a Estatística nacional não saiu incólume. A procura da formação avançada em Estatística diminuiu, as instituições de ensino superior passaram de um ciclo de expansão para um de contração, praticamente parando o influxo de sangue novo, o financiamento da investigação sofreu cortes brutais, a investigação estatística e vários dos centros onde decorria foram vítimas de uma política de avaliação incompetente em que a Estatística foi uma das áreas discriminadas (a nível da constituição dos painéis de avaliação e sua valorização do trabalho científico estatístico e a nível do estabelecimento de quotas cegas que não tiveram em conta o grande desenvolvimento desta área). Naturalmente, a SPE sofreu também os efeitos induzidos por esta crise. Em minha opinião, a Sociedade deveria ter tentado, em contraciclo, contrariar esses efeitos, tirando partido da dinâmica positiva que sempre a caracterizou, em vez de tentar acomodá-los aumentando o intervalo entre Congressos (que deixaram de ser anuais, o que foi parcialmente compensado com a realização de outro evento científico intercalar de caráter mais setorial) e eliminando a publicação internacional das Atas. Esta acomodação afetou, na minha opinião, a atratividade dos Congressos e a coesão da comunidade estatística, efeitos que correm o risco de se autoalimentarem. É certo que se

temia o risco de retração das receitas da SPE por efeito da crise, mas o elevado capital financeiro acumulado no passado constituía uma almofada que permitia e permite perfeitamente um investimento no futuro. O vínculo da comunidade estatística nacional à SPE, que se reflete no próprio sentido de comunidade, é hoje provavelmente menos forte que no passado. Precisamos de contrariar esta tendência.

Felizmente, parece-me que as circunstâncias externas que afetaram a comunidade estatística estão lentamente a começar a inverter-se. O setor produtivo dá alguns sinais de retoma, a importância de profissionais com formação estatística qualificada nas organizações públicas e privadas é crescentemente reconhecida, a retoma da procura dessa formação, ainda que com um fator de atraso, começa a dar sinais positivos a que as instituições de ensino superior começam timidamente a responder, a política de avaliação começa a ter outra atitude e a reconhecer a importância da investigação estatística e dos centros de investigação em que se realiza. São ainda sinais débeis, mas que alimentam a esperança.

O vínculo dos sócios à SPE terá sido afetado mas, na maioria dos casos e como se pôde constatar no Congresso de Olhão, é grande a vontade dos sócios em o retomar na plenitude. Se as circunstâncias internas da SPE derem uma ajuda, contribuindo, através de políticas adequadas, para revigorar este vínculo (processo que não é fácil e requer atuação imediata e vários anos de esforços continuados), a comunidade estatística será ainda mais forte e coesa. É esse o desafio da nova Direção e demais órgãos da SPE, bem como de todos os sócios.

Termino formulando votos de continuado sucesso para o Boletim da SPE, para a SPE e para os seus sócios, ao serviço da Estatística e do seu relevante papel no desenvolvimento económico e social.



# O Futuro da Estatística

João A. Branco, [jbranco@math.ist.utl.pt](mailto:jbranco@math.ist.utl.pt)

*Departamento de Matemática – CEMAT  
Instituto Superior Técnico  
Universidade de Lisboa*

## 1. Introdução

*E depois deles levantar-se-ão sete anos de fome, e toda aquela fartura será esquecida na terra do Egipto, e a fome consumirá a terra. Génesis 41, 30.*

Esta predição de José, filho de Jacó, deu ao Faraó a oportunidade de mandar preparar o país para enfrentar 7 anos de calamidade e evitar males maiores. Fazer predições, previsões e projeções é uma atividade natural da vida com vista a obter indicações que permitam delinear, o melhor possível, o caminho a percorrer a partir do presente. A estatística é seguramente a ciência da predição do comportamento dos fenómenos que observamos. Curiosamente aqui não vai falar-se do papel decisivo da estatística nesse domínio mas sim do futuro da própria estatística. Obviamente que não há a pretensão de predizer o futuro desconhecido da estatística, uma tarefa que consideramos insuperável, como é também admitido por Savage (1968):

*We don't know the future of statistics; all we can do is talk about what the idea of the future puts into our minds. Even perception of the present is gigantic. Whoever perceives the present very well will be seeing about as far into the future as there is any hope of seeing.*

Pretende-se, tão somente, falar do futuro da estatística tanto quanto o conhecimento do passado e do presente o permitir. Falar do futuro da estatística é um tema tão recorrente que acaba por levantar estranheza e uma curiosidade em saber porquê, como se nota em Folks (1970):

*A cursory examination of the card catalog in our own university library leads me to believe that statisticians spend more time discussing the future of the profession than do the members of most disciplines.*

De facto o tema é frequentemente repetido e a impressão que fica da leitura do que se publica sobre o assunto é que parece haver um receio latente sobre o futuro da estatística e a estatística, ela própria, surge retratada quase como se fosse uma ave em perigo de extinção. É sobre esta inquietação que se pretende deixar aqui a nossa opinião, num momento em que a dinâmica de novas áreas emergentes da expansão tecnológica parece estar a ameaçar a estabilidade da estatística. Para concretizar a ideia vamos fazer como na fisga, que vai atrás para arremessar para a frente, e invocamos Janus, o Deus da transição, aquele que vê simultaneamente o princípio e o fim. Ao espreitar o passado, no ponto 2, esperamos perceber as ansiedades que então se geraram e levaram a pensar no futuro para nos inspirarmos e poder perceber, no ponto 3, a ansiedade actual que está, outra vez, a requerer a necessidade de se falar do futuro. A seguir, no ponto 4, conta-se uma história que, não sendo de encantar, suporta algum dos nossos argumentos e pode ser consoladora para leitores que tenham histórias semelhantes para contar. No ponto 5 apresentam-se os comentários finais e a conclusão.

## 2. O futuro do passado

Quando o interesse pela estatística se começou a revelar de forma generalizada os seus seguidores começaram a reunir-se com regularidade à volta das primeiras sociedades de estatística para debater os problemas da disciplina. No início de mandato, o novo presidente da sociedade aproveitava, em geral, o discurso presidencial para fazer um balanço, muitas vezes com projecções para o futuro. É o que ainda hoje se faz nas sociedades mais dinâmicas. Por exemplo, Newmarch mostra no seu discurso presidencial à *Statistical Society of London (Progress and present conditions of statistical inquiry)*, Newmarch (1869), preocupações futuras com o pouco uso da matemática no desenvolvimento da estatística:

*... relates to the mathematics and logic of Statistics, and therefore, as many will think, to the most fundamental enquire with which we can be occupied ... This abstract portion of the inquires we cultivate is still, however, in the first stages of growth.*

Nas primeiras décadas do século XX a necessidade de olhar para o futuro da estatística parece natural pois a estatística está a crescer, a teoria que sustenta a inferência estatística está a desenvolver-se a grande ritmo e as aplicações estão a surgir em muitas áreas do conhecimento. Um tema de grande interesse e atenção é o ensino da estatística (Hotelling, 1940): como ensinar e o que ensinar, é uma preocupação que continua mais tarde, com o, como reformar (Yates and Healy, 1964) e depois se mantém para sempre (Branco, 2006; Brown and Kass, 2009; Tishkovskaya and Lancaster, 2012), mesmo depois das instituições que vieram a fundar-se e da investigação que se começou a fazer com vista a acompanhar e servir as necessidades do ensino. Vários encontros e reuniões de estatística começam a incluir nos trabalhos painéis de discussão e sessões diversas dedicadas ao ensino e ao futuro da estatística.

M. G. Kendall é um dos primeiros estatísticos a reflectir alongadamente sobre o futuro da estatística (Kendall, 1942), sobretudo no que concerne ao âmbito da estatística teórica que de acordo com Kendall teria chegado a um ponto a partir do qual não se poderiam esperar desenvolvimentos com o impacto do que já se tinha alcançado. A perspectiva de Kendall é optimista, não mostra a existência de receio de ameaças para a estatística mas parece antever-se na sua análise o caminhar para o fim de uma era. De facto, na sequência da insatisfação generalizada com a rigidez e limitações da inferência estatística surge em 1962 o famoso artigo “*The future of data analysis*” (Tukey, 1962). Trata-se de uma verdadeira revolução intelectual que introduz o conceito de *Data analysis* (Análise de dados) e propõe uma nova visão da estatística que considera mais capaz de enfrentar os problemas reais e mais disponível para beneficiar com o uso dos computadores, cujo avanço já se faz sentir nos princípios dos anos 60. A partir daqui as discussões sobre o futuro da estatística tornam-se mais frequentes e o optimismo de Kendall passa a ser acompanhado de sentimentos de receio, vindos do lado da progressiva actividade computacional, de que a estatística possa sair do controlo dos estatísticos para cair em mãos de menor competência, sentimentos que têm subsistido, em crescendo, até aos nossos dias. Em Watts (1968) encontramos uma colecção de artigos de uma conferência sobre o assunto, julgamos até que tenha sido a primeira conferência dedicada ao tema. O número de autores a escrever sobre o futuro da estatística é grande: Kendall (1968), Savage (1968), Wolfowitz (1969), Folks (1970), Kendall (1972) (Kendall escreveu 3 artigos sobre o mesmo tema mas em ocasiões diferentes), Huber (1975), Lindley (1975) (Lindley até fez, inspirado no seu eterno sonho, uma previsão espectacular: o século XXI será bayesiano), Bradley (1982), Geisser (1988), Good (1990), Rubin (1993), Pestana et. al (1994) (colecção de artigos apresentados no I Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística: A Estatística e o futuro e o futuro da estatística). Quanto às apreensões manifestadas por vários destes autores, e pelos estatísticos em geral, durante este período: i) a implementação dos métodos estatísticos no *software* então disponível poderá vir a dispensar os especialistas, ii) o uso e ensino da estatística por especialistas de outras áreas científicas (uma espécie de balcanização da estatística) leva a um descrédito irreversível da disciplina. Mas o que se pode dizer é que estas apreensões não se concretizaram e pelo menos em parte tiveram um efeito diferente e de certo modo contrário ao preconizado pelos seus ideólogos. Na verdade o uso criterioso dos computadores veio trazer um desenvolvimento à estatística até então nunca imaginado. Basta pensar, entre muitos outros desenvolvimentos, nos métodos robustos, na facilidade de aplicação dos métodos de análise multivariada, nos métodos de computação intensiva, nos avanços da estatística bayesiana no domínio

das aplicações, para se perceber que os computadores vieram dar ao estatístico mais liberdade, mais tempo para dedicar às suas investigações e uma facilidade e rapidez de cálculo e análise nunca pensadas antes da sua existência. Outro aspecto resultante da disponibilização dos métodos estatísticos em programas de software foi a grande divulgação da estatística que veio revelar-se a muitos cientistas como o método correcto a usar nas suas investigações. Houve, no entanto, um preço a pagar: muito do poder ficou na rua, isto é, a popularização do uso da estatística por utilizadores sem a formação estatística necessária conduz à descredibilização da estatística e à desconfiança do rigor de certos resultados científicos (Ioannidis, 2005).

### 3. O futuro do presente

Progressivamente os estatísticos foram verificando que afinal os computadores não constituíam uma ameaça mas antes eram uma poderosa ferramenta de trabalho. Os computadores foram o motor do grande incremento da produção de *software* que esteve na base do notável desenvolvimento da estatística que se verificou a partir do final dos anos 60. A disponibilização da linguagem de código aberto, R, foi sem dúvida uma feliz aposta da qual a estatística beneficiou grandemente. Ao chegar aos meados dos anos 90 os cépticos do futuro da estatística activaram a publicação das suas predições, possivelmente motivados pela atracção do virar de século e também por uma anunciada mudança do tipo e natureza de dados que iriam ser disponibilizados no futuro próximo. Da lista de autores a debruçarem-se sobre o futuro da estatística neste período destacam-se: Duncan and Andrew (1995), Huber (1975), Wegman (1998), Bendell et al. (1999) (estes autores são muito críticos quanto à actuação dos estatísticos na área do controlo de qualidade em engenharia e gestão), Des Nicholls (1999), Rao and Székely (2000), Rao (2001), Raftery et al. (2001), Efron (2003), Lindsay et al. (2004), Efron (2011) e Huber (2011). Acrescentamos ainda a referência relativa a um *workshop* realizado em Londres, em 2013 integrado nas celebrações do Ano Internacional da Estatística. (Statistics and Science: A report of the London workshop on the future of the statistical sciences <http://www.worldofstatistics.org/wos/pdfs/Statistics&Science-TheLondonWorkshopReport.pdf>)

A este período que começa nos meados de 90 e se estende até à actualidade chamamos nós presente, para justificar o título da secção e podermos falar do futuro deste presente. Este período é caracterizado por uma enorme produção de grandes conjuntos de dados de natureza variada facto que está novamente a assustar os estatísticos que receiam a marginalização ou mesmo fragmentação da disciplina na sequência do aparecimento de novas áreas de actividade como: reconhecimento de padrões, *machine learning*, *datamining* e outras.

Pensando bem verificamos que estamos de volta à situação surgida com o advento dos computadores, isto é, já vimos este filme. A novidade agora é que a ameaça não parte dos computadores mas sim dos dados, isto é, da matéria-prima usada para fazer funcionar a estatística. Dados esses que surgem em grandes volumes, com variáveis de vários tipos, por vezes em número superior ao número de observações, dados que são em geral não estruturados, não homogéneos, com valores omissos e outras dificuldades. Dados aos quais a estatística não pode responder imediatamente com os seus métodos tradicionais que foram desenhados para pequenos conjuntos de dados com características convenientes. Isto significa que os estatísticos terão que ser capazes de criar metodologias de análise que sirvam o tipo de problemas levantados. Caso contrário outros terão que o fazer, mesmo que não tenham a formação e as ferramentas que a estatística dá aos seus especialistas.

O desinteresse dos estatísticos pelos problemas que estão a ser colocados à estatística dará oportunidade a outros, como se refere em Huber (2006):

*By not paying attention to “dirty stuff”, the statistics community opened the field wide to others, particularly computer scientists, who then invented data mining and touted it as a cure-all for the problems caused by data glut.*

Outra novidade que está a perturbar a comunidade estatística é o aparecimento de uma nova área conhecida por “*data science*” que agrega “*data scientists*” que são especialistas de análise de “*big data*” (dados caracterizados por serem: muito volumosos, de tipos variados e produzidos a alta Velocidade). *Big data* é uma fonte donde brotam problemas de grande complexidade para toda a comunidade científica, muito especialmente para os estatísticos.

Muitas destas ideias e métodos de análise são muito recentes e a sua definição nem sempre é clara. O que é claro é que os objectivos destas técnicas são basicamente os mesmos objectivos da estatística que consistem em extrair informação e conhecimento a partir dos dados. Por isso o entusiasmo à volta dos *big data* é bom para a estatística e os estatísticos devem colaborar com os especialistas para conjuntamente poderem avançar na procura de resultados úteis para os problemas complexos que estas estruturas estão a colocar, ver Diggle (2015). A vantagem da estatística são os seus fundamentos e o seu método de trabalho que permitem responder de forma competente às inferências que lhe forem pedidas.

#### 4. A história de insucesso de um resultado relevante

##### O resultado

Imagine que alguém se desloca no seu automóvel numa estrada habitual rodeada de uma paisagem variada que é possível observar e usufruir. Imagine ainda que, por qualquer razão o veículo sai da estrada e entra no lago que a ladeia e se estende ao longo do percurso. Pondo de lado outras consequências óbvias, o veículo perde a capacidade de prosseguir viagem no novo meio para o qual não foi preparado e na paisagem de completa e fatal monotonia nada se vislumbra dentro da eterna escuridão do macabro espaço.

Ao deixar a gostosa fantasia para passar à realidade que nos move façamos a seguinte analogia, inevitavelmente tosca, como não pode deixar de ser: o automóvel é a distância de Mahalanobis, a paisagem inicial é o espaço de trabalho tradicional da Estatística, em que o número de variáveis é menor que o número de observações ( $p < n$ ), e o tenebroso ambiente subaquático é o espaço em que  $p \geq n$ , que, como vimos, sendo improvável no passado se tornou verdadeiramente real na actualidade, e que está despudoradamente a oferecer-se à Estatística como um novo e surpreendente campo de trabalho.

Para continuar recordemos que a distância de Mahalanobis entre dois pontos  $x_i$  e  $x_j$  de um conjunto de  $n$  pontos num espaço multivariado de  $p$  variáveis, com matriz de covariâncias  $S$ , é

$$d_{x_i, x_j} = \{(x_i - x_j)S^{-1}(x_i - x_j)\}^{1/2}$$

Trata-se de uma invenção espetacular (Mahalanobis, 1936) do grande estatístico indiano, Prasantha Chandra Mahalanobis, arquiteto da estatística indiana, fundador do Instituto de Estatística Indiano e responsável por uma verdadeira revolução da estatística na Índia (ainda agora o recordámos quando o vimos numa cena do filme com que nos presentearam este verão, “O homem que viu o infinito”, onde aparece com o seu grande amigo, o genial Srivinaava Ramanujan, no Trinity College em Cambridge). Ao ter em conta a correlação entre variáveis, uma ideia que hoje nos surge de forma tão imediata e tão óbvia mas que ainda no princípio dos anos 30 parece que não lembrava a ninguém, a distância de Mahalanobis é uma ferramenta indispensável para a resolução de problemas que se prendam com distâncias formuladas no campo multivariado, como são a construção de dissemelhanças, deteção de *outliers* ou a classificação e *clustering*.

O outro ingrediente que faz parte do trabalho que leva ao resultado que queremos destacar é o espaço misterioso em que o número de variáveis é no mínimo igual ao número de observações  $p \geq n$ . Esta situação é agora, como já foi referido antes, muito comum em consequência do novo paradigma da produção automática de dados e como tal não podemos nem poderemos evitá-la. A questão que se levanta imediatamente é a de saber se podemos, nas condições deste espaço, calcular a distância de Mahalanobis uma vez que a matriz de covariâncias presente na definição da distância de Mahalanobis é agora singular. A resposta é sim e a justificação não é complicada. De facto mostra-se que o conjunto de dados inicial pode sempre ser representado, sem perda de informação, num outro espaço com apenas  $q = n - 1$  variáveis onde a distância de Mahalanobis já pode ser calculada. Para ilustrar a situação basta imaginar um conjunto de 3 pontos não colineares num espaço tridimensional ( $p =$

3,  $n = 3$ ). Induzindo um sistema de coordenadas no subespaço bidimensional correspondente ao plano definido pelos 3 pontos torna-se possível calcular a distância de Mahalanobis uma vez que a matriz de covariâncias deixou de ser singular.

Ao calcular então a distância de Mahalanobis com base nas  $q = n - 1$  novas variáveis (obtidas como combinações lineares das variáveis originais) temos a seguinte surpresa:

Resultado – Com  $n$  pontos e  $p \geq n - 1$  variáveis verifica-se que a distância de Mahalanobis entre i) qualquer ponto do conjunto e o centro do conjunto é uma constante ( $d_{x_i, \bar{x}} = (n - 1)n^{-1/2}$ ), ii) dois pontos quaisquer do conjunto é outra constante ( $d_{x_i, x_j} = \{2(n - 1)\}^{1/2}$ ). As duas constantes dependem apenas de  $n$ .

Apesar da dedução deste resultado ser muito simples, exigindo apenas um pequeno trabalho de manipulação de matrizes e de cálculo matricial, admira que ele não apareça na literatura após tantos anos (80) de estudo e de aplicação da distância de Mahalanobis.

Em termos geométricos esta situação significa que um conjunto de dados multivariados na situação aqui tratada,  $p \geq n - 1$ , pode ser visto como um invólucro convexo (simplex) completamente vazio com todos os pontos na superfície do invólucro equidistantes entre si e equidistantes do centro do conjunto. Esta visão é sempre a mesma quaisquer que sejam os dados (só depende do  $n$ ) e faz lembrar a monotonia subaquática relatada no episódio descrito no início desta secção.

Para além da surpresa este resultado tem implicações sérias na análise de dados multivariados pois que, nas condições indicadas não será possível responder a muitos dos problemas desta área, como a identificação de *outliers*, a identificação de *clusters*, e todas as questões que possam requerer o uso da distância de Mahalanobis.

Imagine-se que iniciamos uma viagem à volta do conjunto de pontos ao mesmo tempo que vamos fotografando a estrutura, isto é, projectando os pontos num espaço bidimensional, a partir de posições que nos permitam obter imagens interessantes. De um outro resultado importante que decorre desta investigação conclui-se que se pensarmos numa imagem a 2 dimensões, qualquer que ela seja, é sempre possível encontrar uma projecção ortogonal da nuvem de pontos semelhante a essa imagem. Ou seja, durante a viagem nós podemos ver tudo aquilo que desejarmos ver. Por exemplo se quisermos ver um *outlier*, sabemos que de acordo com este resultado, é possível encontrar uma projecção que nos mostra o outlier, quer ele exista ou não. As implicações desta revelação conjuntamente com as implicações do resultado anterior levam a que, quando  $p \geq n - 1$ , a distância de Mahalanobis e o sistema de projecções tão essenciais na análise de dados multivariados perdem as capacidades que lhe conhecemos, as propriedades da distância de Mahalanobis deixam de se verificar e o uso de projecções deixa de ser um processo credível concluindo-se que não devem ser utilizados no estudo de estruturas de dados multivariados, nas condições assumidas. Considera-se que o conhecimento destes resultados e das suas implicações é da maior utilidade para os investigadores que inadvertidamente podem insistir na utilização de estratégias de análise ou de métodos inadequados quando os seus dados se encontram em espaços de alta dimensão, expostos às dificuldades da chamada *curse of dimensionality* que nos persegue e confunde sempre que nos aventuramos a entrar naqueles espaços.

### A história

A descrição anterior é um resumo comentado de aspectos, considerados relevantes para este artigo, de um trabalho completo (Pires and Branco, 2016) que não está publicado. Os autores apresentaram este trabalho em várias conferências e encontros científicos tendo em todos eles recebido felicitações pela novidade e inegável valor dos resultados obtidos. De alguns participantes os autores receberam mesmo mensagens escritas de apreço e elogio.

Preparou-se um manuscrito que foi enviado sucessivamente às seguintes revistas científicas: *Science* (... *your analysis is interesting* ...), *Nature* (... *we are not persuaded that your findings represent a sufficiently outstanding scientific advance* ...), *JRSS-B* (... *the paper does look interesting* ...),

*Statistical Science* (Although it contains some interesting material ...), *JASA* (... your paper makes a good point ...), *Annals of Statistics* (... it is publishable work ...), *Annals of Applied Statistics* (...if you think you can revise your manuscript ...) e *Biometrika* (... although there is original detail in your paper ...). Sucessivamente significa que o manuscrito não foi sendo aceite por nenhuma delas. Mas como a história ainda não terminou os autores preparam actualmente nova submissão, convictos de que haverá críticas a fazer ao trabalho. Os autores não estranham a não aceitação. Como se costuma dizer, são ossos do ofício ou quem anda à chuva molha-se. O que os autores estranham é que tratando-se de resultados aparentemente inéditos com implicações muito sérias, em toda a actividade de investigação científica que recorra à análise de dados multivariados, o trabalho não mereça uma leitura atenta que viesse eventualmente a produzir críticas suficientes para se poder concluir de forma competente pela rejeição do trabalho. Em geral os editores mostraram simpatia e consideração pelo trabalho mas optaram quase sempre por concluir que a investigação não é adequada para a respectiva revista. A única excepção veio da revista *Annals of Applied Statistics* que realmente entregou o trabalho a *referees* e concluiu que o texto deveria incluir uma nova aplicação, o que os autores rejeitaram pelo facto do manuscrito já lá conter duas.

Os autores têm longa experiência nesta actividade e não estão ansiosos pela concretização da publicação do seu trabalho *per se* mas desejam sim divulgar estes resultados e ao mesmo tempo avisar a comunidade científica dos perigos do seu desconhecimento. Como se trata de um tema da maior actualidade e que está no centro das atenções não se percebe a aparente desatenção ou desinteresse dos respectivos editores. Foi também este facto que embora não sendo certamente estatisticamente significativo acelerou a vontade de reflectir sobre o futuro da Estatística. Na verdade esta ilustração é mais uma contribuição que vem reforçar a ideia que o autor destas notas tem sobre o tema do futuro da Estatística: o futuro está garantido pelo volume, diversidade e complexidade dos novos problemas que permanentemente surgem e que não dispensam a estatística se os queremos ver resolvidos, porém nem todos os estatísticos parecem estar atentos ou interessados nessas novidades com que o futuro nos vai apresentando todos os dias.

## 5. Comentários finais e conclusão

A estatística é uma disciplina difícil: difícil de definir, de ensinar, de aprender e de aplicar. Por isso muitos estudantes a consideram uma disciplina pouco interessante e por vezes até uma das piores do currículo. Contudo um ensino de boa qualidade pode resolver parte dessas dificuldades pois facilita a aprendizagem e pode mesmo cativar o estudante ao ponto de lhe criar o verdadeiro interesse pela actividade estatística. As aplicações da estatística fazem-se onde existam os problemas reais, nas empresas, nos departamentos de investigação e nas instituições do Estado e outras. Não parece possível, durante o período normal de ensino da estatística, treinar de forma eficaz os alunos para que possam analisar dados com a complexidade com que esses dados hoje se nos apresentam. O que é normal é que a aprendizagem dos segredos da análise de dados vá acontecendo ao longo do exercício da profissão.

As dificuldades da estatística prendem-se com a própria natureza da estatística e com o processo da sua actuação, sendo que em ambos os casos há que contar com a presença do acaso. A grande variedade de métodos existentes, a delicadeza de vários conceitos e as diferentes visões e abordagens para os mesmos problemas promovidas por especialistas de diferentes escolas gera um clima de desorientação e até certo ponto de falta de credibilidade da valiosa missão da estatística. Várias das controvérsias passam ao lado do utilizador comum, porventura para seu próprio benefício, pois embora sendo interessante conhecê-las, daí não parece resultar benefício para o uso que ele possa fazer da estatística. O caso da controvérsia da média, que é o pão com manteiga de quase todos aqueles que estão ligados à prática da estatística, é bem paradigmático: para a estimativa do valor médio de uma distribuição normal existem, no mínimo, três propostas (Efron, 1978), correspondentes a três abordagens diferentes, a frequentista, a bayesiana e uma terceira abordagem da autoria de Fisher assente no chamado argumento fiducial, qual delas a melhor, de acordo com a respectiva abordagem. Sim, de facto é interessante saber deste diferendo, mas o que é que adianta uma vez que a disputa entre frequentistas e bayesianos já começou há mais de 2 séculos e ainda não está resolvida.

Mais uma perturbação para a comunidade estatística e científica em geral veio a lume o ano passado quando a revista *Basic and Applied Social Psychology* anunciou em Editorial, (Trafimow and Marks, 2015), a decisão de banir os testes de significância levando na água do banho o tão adorado, por muitos, o pequenino *p-value*. A irreverente decisão surge na sequência de sucessivos alertas, alguns alarmantes (Ioannidis, 2005), do mau uso do *p-value*, que não tiveram a reacção que se poderia esperar da parte da comunidade estatística. Esta decisão teve logo divulgação de destaque na imprensa científica (Leek and Peng, 2015; Siegfried, 2015; Nuzzo, 2015) e levantou uma espécie de onda de solidariedade “salvemos o *p-value*” e de onda de sinal oposto “finalmente está enterrado” que revelou respostas de preocupação oriundas de grupos e indivíduos de todo o lado com interesse no assunto. Em particular a Royal Statistical Society pediu a 6 destacados estatísticos para livremente reagirem a esta ameaça, sem contudo ter tomado posição institucional sobre o assunto, (<https://www.statslife.org.uk/features/2114-journal-s-ban-on-null-hypothesis-significance-testing-reactions-from-the-statistical-arena>).

Por sua vez, a *American Statistical Association*, que até então nunca tinha tomado posição pública sobre questões relacionadas com a prática da estatística, foi mais além e decidiu emitir uma declaração oficial sobre o assunto. Na feitura dessa declaração estiveram envolvidos mais de 20 especialistas que depois de muitas discussões e algumas reuniões conjuntas deram as suas contribuições para ao resultado final, com a ressalva de que vários dos contribuintes não concordaram parcialmente ou mesmo totalmente com a declaração. O resultado final (Wasserstein and Lazar, 2016) apareceu publicado mais de um ano depois da publicação do Editorial da *Basic and Applied Social Psychology*. A julgar pelo nível de apreensão que esta situação veio causar, pelo número de especialistas que mobilizou e pelo longo tempo que a declaração levou a confeccionar e ser concluída, parece razoável concluir que afinal a questão *p-value* não é assim tão simples e que pode haver razões estruturais para que muitos utilizadores, que não sendo especialistas e que pretendam simplesmente utilizar uma ferramenta que se diz útil para as suas investigações, não consigam dominar essa mesma ferramenta de forma correcta. A insatisfação com o uso do *p-value* é muito antiga, mas não parece ter gerado a preocupação que esta ameaça de extinção agora trouxe. Uma consequência positiva da discussão é a de chamar a atenção dos estatísticos para a oportunidade que agora têm de se unirem e acabarem de vez com o problema da má utilização do *p-value* (Aschwanden, 2016). A *American Statistical Association* dá uma ajuda explicando agora na sua declaração, aquilo que já é sabido: o que é o *p-value*, qual deve ser e, sobretudo, qual não deve ser a sua interpretação. No meio da interessante discussão fica uma questão muito pertinente: porque é que estas coisas acontecem e permanecem assim durante tanto tempo? Uma das razões pode estar na menor atenção que é dada ao ensino de um conceito que ao ser apresentado vestido de atraente simplicidade cativa muitos utilizadores que, desconhecendo complicações, acabam por fazer dele um uso trivial e abusivo, com as consequências que estamos a constatar – “fazemos o que pregamos”.

Com esta breve dissertação pretende-se esclarecer que a estatística não é só difícil para aqueles que a querem aprender, que a usam regularmente ou que dela precisam de quando em quando, é também difícil para os próprios estatísticos. Contrariamente ao que muitos pensam, os matemáticos também acham a estatística difícil o que pode explicar-se pelo facto das duas disciplinas apresentarem diferenças muito marcantes e apesar da matemática ter um papel fundamental no desenvolvimento e na prática da estatística, (Branco, 2014).

Apesar das dificuldades mencionadas e outras, a estatística é a fonte de ajuda mais valiosa de que dispomos para compreender o mundo desconhecido que nos rodeia. A estatística oferece-nos continuamente ferramentas interessantes e eficazes com que analisamos os dados que esse mesmo mundo nos proporciona e nos quais esperamos encontrar as explicações que procuramos. A sua contribuição para o desenvolvimento científico é verdadeiramente notável.

Quanto ao futuro da estatística o que se nos oferece dizer é que nunca a estatística teve tantos problemas e questões que esperam a sua indispensável intervenção. E o número e complexidade dos novos problemas tende a crescer acompanhando o inexorável desenvolvimento tecnológico e a consequente aceleração da produção de dados. Por isso a estatística será cada vez mais preciosa e necessária. Registamos assim, com confiança, que o seu futuro parece garantido e espera-se que seja famoso.

A dúvida está no futuro dos estatísticos em face da atitude que lhe conhecemos hoje, muito centrada em metodologias bem conhecidas, como que distraídos do facto de elas não servirem para responder aos novos problemas que outros, não estatísticos, tentarão resolver servindo-se da estatística certamente à sua maneira. Para acompanhar o futuro garantido da estatística temos que: i) reconhecer a novidade dos recentes problemas que já nos está batendo à porta e que nos espera lá fora, ii) ter o arrojo de ir ter com ela e não esperar que outros a tomem de assalto, iii) ter a força de nos irmos libertando das ferramentas espectaculares que têm feito o progresso da nossa profissão, iv) esperar que o trabalho e a inspiração possam levar à criação de novos métodos de análise v) ter uma cuidadosa atenção ao ensino da estatística empreendendo as reformas que se vierem a impor, vi) ser capazes de inculcar nos nossos colaboradores das outras áreas científicas o espírito da ciência estatística, e o modo de pensar à maneira da estatística vii) trabalhar para que a estatística e a profissão de estatístico deixem a posição sombria em que se encontram e se mostrem de forma convincente para poderem ser reconhecidas pela sociedade e viii) ter a flexibilidade para se adaptar a toda esta transformação.

Essa flexibilidade, tomada aqui de forma abrangente, que é considerada uma característica fundamental da profissão de estatístico na sua incessante procura da verdade, para a qual muitos apelam, como Des Nicholls (1999), e como John Tukey tão enfaticamente destaca na sua definição de “*Exploratory data analysis*” e no seu famoso artigo “*The future of data analysis*”:

*“exploratory data analysis” is an attitude, a state of flexibility, a willingness to look for those things that we believe are not there, as well as for those we believe might be there. Except for emphasis on graphs, its tools are secondary to its purposes (Tukey, 1979).*

*We need to seek out other tools of data analysis showing high flexibility of effectiveness in other situations. Like the simple graph they will offer us much. We should not expect them to be free of a substantial foundation of computation, and we should not expect their results to be necessary graphical. Our aim should be flexibility (Tukey, 1962).*

## 6. Referências

- Aschwenden, C. (2016). Statisticians found one thing they can agree on: it is time to stop misusing p-values. *FiveThirtyEight* (website).
- Bendell, A., Disney, J. and McCollin, C. (1999). The future role of statistics in quality engineering and management. *Journal of the Royal Statistical Society: Series D (The Statistician)*, **48**, 3, 299-313.
- Bradley, R. A. (1982). The future of statistics as a discipline. *Journal of the American Statistical Association*, **77**, 377, 1-10.
- Branco, J. A. (2006). Mudanças no ensino da estatística. *Boletim Informativo da Sociedade Portuguesa de Estatística*, **2**, 19-23.
- Branco, J. A. (2014). The non-mathematical side of statistics. In: Pacheco, A., Santos, R., Oliveira, M. R. and Paulino, D. (eds), *New Advances in statistical modeling and applications*. Springer, Cham.
- Brown, E. N. and Kass, R. E. (2009). Statistical training and curricular revision. *The American Statistician*, **63**, 105-121.
- Des Nicholls (1999). Statistics into the 21st century. *Australian & New Zealand Journal of Statistics*, **41**, 2, 127-139.
- Diggle, P. J. (2015). Statistics: a data science for the 21st century. *Journal of the Royal Statistical Society: A*, **178**, 4, 793-813.
- Duncan, J. W. and Andrew C. G. (1995). *Statistics for the 21st century*. Irwin, Chicago.
- Efron, B. (1978). Controversies in the foundations of statistics. *The American Mathematical Monthly*, **85**, 4, 231-246.
- Efron, B. (2003). The statistical century. In Panaretos, J. (ed), *Stochastic Musings: Perspectives from the Pioneers of the Late 20th Century*. Lawrence Erlbaum Associates, New Jersey.
- Efron, B. (2011). The future of statistics. (Forward) In: Lovric, M. (ed), *International Encyclopedia of Statistical Science*. Springer-Verlag, Berlin.
- Folks, J. F. (1970). Some prior probabilities on the future of statistics. *The American Statistician*, **24**, 5, 10-13.
- Geisser, S. (1988). The future of Statistics in retrospect. In: Bernardo, J. M., DeGroot, M. H., Lindley, D. V. and Smith, A. F. M. (eds), *Bayesian Statistics 3*. Oxford University Press, Oxford.

- Good, I. J. (1990). Speculations concerning the future of Statistics. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **25**, 441-466.
- Hotelling, H. (1940). The teaching of statistics. *The Annals of Mathematical Statistics*, **11**, 4, 457-470.
- Huber, J. P. (1975). Applications vs. Abstraction: The selling out of Mathematical Statistics? *Advances in Probability*, **7**, Supplement: Proceedings of the conference on Directions for Mathematicam Statistics, 84-89.
- Huber, J. P. (1997). Speculations on the path of statistics. In: Brillinger, D. R., Fernholz, L. T., and Morgenthaler, S. (eds), *The practice of data analysis. Essays in honor of John W. Tukey*. Princeton University Press.
- Huber, J. P. (2006). Discussion on “Tukey’s paper after 40 years, by Colin Mallows”, *Journal of the American Statistical Association*, **48**, 3,319-335.
- Huber, P. (2011). *Data analysis, what can be learned from the past 50 years*. John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey.
- Ioannidis, J. P. A. (2005). Why most published research findings are false. *PLoS Med*, **2**, 8, 696-701.
- Kendall, M. G. (1942). On the future of statistics. *The Journal of the Royal Statistical Society*, **105**, 2, 69-91.
- Kendall, M. G. (1968). On the future of statistics – a second look. *The Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, **131**, 2, 182-204.
- Kendall, M. G. (1972). The history and the future of statistics. In: Bancroft T. (ed). *Statistical Papers in honour of George Snedecor*, Iowa State University Press, 193-210.
- Leek, J. T. and Peng, R. D. (2015). Statistics: *P* values are just the tip of the iceberg. *Nature*, **520**, 612.
- Lin, X., Genest, C., Banks D. L., Molenberghs, G., Scott, D. W. and Wang, J. (2014). *Past, Present and Future of Statistical Sciences*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, Florida.
- Lindley, D. V. (1975). The future of statistics: A Bayesian 21st century. *Advances in Applied Probability*, **7**, Supplement: Proceedings of the Conference on Directions of Mathematical Statistics, 106-115.
- Lindsay, B. G., Kettenring, J. and Siegmund, D. O. (2004). A Report on the Future of Statistics. *Statistical Science*, **19**, 387-413.
- Mahalanobis, P. C. (1936). On the generalised distance in statistics. *Proceedings of the National Institute of Sciences of India*, **2**, 49-55.
- Newmarch, W. (1869). Inaugural address on the progress and present condition of statistcsl inquiry, delivered at the Statistical Society of London. *Journal of the Statistical Society of London*, **32**, 359-390.
- Nuzzo, R. (2015). Scientists perturbed by loss of stat tools to sift research fudge from fact. *Scientific American*.
- Pestana, D., Turkman, A., Branco, J., Duarte, L. and Pires, A. (eds) (1994). *A Estatística e o futuro e o futuro da Estatística*. Novas tecnologias/Estatística, Edições Salamandra, Lisboa.
- Pires, A. M. e Branco, J. A. (2016). High dimensionality: the latest challenge to data analysis. (manuscrito em processo de submissão).
- Raftery, A. E., Tanner, M. A. and Wells, M. T. (eds) (2001). *Statistics in the 21st century*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, Florida.
- Rao, C. R. and Székely, G. J. (eds) (2000). *Statistics for the 21st century: methodologies for applications of the future*. Marcel Dekker, New York.
- Rao, C. R. (2001). Statistics: reflections on the past and visions for the future. *Communications in Statistics – Theory and Methods*, **30**, 11, 2235-2257.
- Rubin, D. B. (1993). The future of statistics. *Statistics and Computing*, **3**, 204.
- Savage, L. J. (1968). Statistical inference-panel contributions by G. A. Barnard, J.C. Kiefer, L. M. LeCam and L. J. Savage. In: Watts, D. J. (ed) *The future of statistics*. Academic Press, New York.
- Siegfried, T. (2015). P value ban: small step for a journal, giant leap for science. *Science News*.
- Tishkovskaya, S. and Lancaster, G. A. (2012). Statistical Education in the 21st century: a review of challenges, teaching innovations and strategies for reform. *Journal of Statistical Education*, **20**, 2.
- Trafimow, D. and Marks, M. (2015). Editorial. *Basic and Applied Social Psychology*, **37**, 1-2.
- Tukey, J. (1962). The future of data analysis. *The Annals of Mathematical Statistics*, **33**, 1-67.

- Tukey. J. (1979). Comment on “Nonparametric Statistical Data Modeling, by Emanuel Parzen”, *Journal of the American Statistical Association*, **74**,121-122.
- Yates, F. and Healy, M. J. R. (1964). How should we reform the teaching of statistics. *Journal of the Royal Statistical Society A*, **127**, 199-210.
- Wasserstein, R. L. and Lazar, N. A. (2016). The ASA’s Statement on  $p$ -values: Context, Process and Purpose. *The American Statistician*, **70**, 2, 129-133.
- Watts, D. (1968). The future of statistics. Proceedings of a conference on the future of statistics held at the university of Wisconsin, Madison. Academic Press, New York.
- Wegman, E. J. (1998). Visions: the evolution of statistics. Keynote talk at the conference, New Techniques and Technologies in statistics, Sorrento, Italy.
- Wolfowitz, J. (1969). Reflections on the future of mathematical statistics. In et al RB (ed). *Essays in Probability and Statistics*. University of North Carolina Press, 739-750.





## • Artigos Científicos

- Beirlant, J., Fraga Alves, M.I. and Gomes, M.I. (2016). Tail fitting for truncated and non-truncated Pareto-type distributions. *Extremes*, 19:3, 429–462.
- Cristina, S., Cordeiro, C., Lavender, S., Goela, P.G., Icely, J. & Newton, A. (2016). MERIS Phytoplankton Time Series Products from the SW Iberian Peninsula (Sagres) Using Seasonal-Trend Decomposition Based on Loess. *Remote Sensing*, 8(6), 449.
- Fraga Alves, M.I., Neves, C. and Rosário, P. (2016). A general estimator for the right endpoint with an application to supercentenarian women's records. *Extremes*, 1-39.
- Goela, P.C., Cordeiro, C., Danchenko, S., Icely Cristina, S. & Newton, A. (2016). Time series analysis of data for Sea Surface Temperature and Upwelling components from the Southwest Coast of Portugal., *Journal of Marine Systems*.

## • Capítulos de Livros

- Silva, C., Freitas, A., Roque, S. e Sousa, L. (2016). Arrow Plot and Correspondence Analysis Maps for visualizing the effects of background correction and normalization methods on microarray data. Chapter 21 in *Pattern Recognition in Computational Molecular Biology. Techniques and Approaches*. Elloumi, M. Iliopoulos, C. S., Wang, J.T.L. and Zomaya, A. Y. (Eds). Wiley Series on Bioinformatics: Computational Techniques and Engineering.

## • Teses de Mestrado

**Título:** Extreme Value Analysis of Competitive Freediving Records

**Autora:** Jessica Silva Lomba, [jessicasilvalomba@gmail.com](mailto:jessicasilvalomba@gmail.com)

**Orientadora:** Maria Isabel Fraga Alves

**Título:** Análise Estatística de Dados Composicionais

**Autor:** Rodney Carvalho Afonso de Sousa, [rsrodney@hotmail.com](mailto:rsrodney@hotmail.com)

**Orientadora:** Adelaide Valente Freitas

**Título:** Probabilidades e Magia Matemática

**Autora:** Justina Melo, [justina@portugalmail.com](mailto:justina@portugalmail.com)

**Orientadora:** Andreia Hall

## • Livros

**Título:** *Introdução à Estatística*

**Autores:** Bento Murteira, Carlos Silva Ribeiro, João Andrade e Silva, Filomena Pimenta e Carlos Pimenta

Ano: 2015. Editora: Escolar Editora. ISBN: 978-972-59-2468-6

**Título:** *Probabilidades e Estatística para Ciências e Tecnologia – Conceitos e exercícios resolvidos*

**Autoras:** Esmeralda Gonçalves, Emília Nogueira e Ana Cristina Rosa

Ano: 2016. Editora: Almedina. ISBN: 978-972-40-6460-4

## • Teses de Doutoramento

**Título:** Compound Poisson integer-valued GARCH processes

**Autora:** Filipa Silva, *mat0504@mat.uc.pt*

**Orientadoras:** Nazaré Mendes Lopes e Esmeralda Gonçalves

A minha tese tem como objectivo introduzir e analisar uma nova classe de modelos de valores inteiros não negativos com evolução para a média condicional análoga à considerada por Ferland, Latour e Oraichi (2006) mas em que se considera associada uma família abrangente de leis condicionais, nomeadamente a das leis infinitamente divisíveis discretas com suporte em  $\{0,1,2,\dots\}$ , inflacionadas (ou não) em zero.

Consideramos então uma família de leis condicionais que, na sua forma mais geral, podem ser interpretadas como misturas de uma lei de Dirac com uma qualquer lei discreta infinitamente divisível, sendo a sua especificação feita através da função característica. Em consequência da equivalência, no conjunto das leis discretas com suporte em  $\{0,1,2,\dots\}$ , entre leis infinitamente divisíveis e leis de Poisson compostas, este novo modelo denomina-se modelo GARCH de valor inteiro Poisson Composto inflacionado em zero (abreviadamente ZICP-INGARCH).

Não se limitando a considerar como lei condicional uma lei específica, este modelo tem como principal vantagem considerar uma vasta família de processos estocásticos de valores inteiros, unificando e alargando significativamente contribuições recentes neste domínio. Destaca-se que é possível evidenciar novos modelos com leis condicionais com interesse nas aplicações práticas como, em particular, os modelos INGARCH Poisson geométrico e INGARCH Neyman tipo-A eventualmente inflacionados em zero, e também reencontrar contribuições recentes como os modelos INGARCH binomial negativo (Zhu, 2011, 2012c), INGARCH Poisson (Ferland et al., 2006; Zhu, 2012c), INGARCH Poisson generalizado (Zhu, 2012a; Lee et al., 2015) e INARCH binomial negativo disperso (Xu et al, 2012) eventualmente inflacionados em zero. Para além de ter a capacidade de descrever diferentes comportamentos distribucionais e, consequentemente, diferentes tipos de heteroscedasticidade condicional, o modelo ZICP-INGARCH consegue incorporar outros factos estilizados muito associados a séries de contagem, nomeadamente a sobredispersão e a elevada ocorrência de zeros.

A análise probabilista da estrutura destes modelos, no que diz respeito em particular ao desenvolvimento de condições necessárias e suficientes de estacionaridade (de primeira ordem, forte e fraca) e ergodicidade e também de existência de momentos de ordem elevada, é o objecto principal deste estudo. São ainda determinados estimadores para os parâmetros do modelo CP-INARCH(1) seguindo uma metodologia em duas etapas que envolve o método dos mínimos quadrados e o dos momentos.

Filipa Silva

**Título:** Modelos com cruzamento de aninhamentos em escada estruturados

**Autora:** Sandra Inês Monteiro, *sandra.ines.monteiro@esce.ips.pt*

**Orientadores:** Miguel Fonseca e Francisco Carvalho

Na minha tese proponho um novo tipo de modelo, que designo por modelo com aninhamento em escada estruturado. Este modelo tem por base o modelo com aninhamento em escada e, tal como este, apresenta vantagens face ao aninhamento equilibrado. Permite grande economia no número de observações utilizadas e uma distribuição mais uniforme da informação pelos vários fatores. Com este novo tipo de modelo podemos construir novos modelos, também em escada, mais complexos do que os existentes até agora.

No aninhamento em escada a cada degrau do modelo corresponde um fator. Generalizo a teoria destes modelos introduzindo a possibilidade de se desagregar cada um dos fatores intervenientes, passando os degraus a terem submodelos com estrutura ortogonal.

Para estudar o aninhamento em escada estruturado, proponho duas estruturas algébricas que, apesar de diferentes, possibilitam obter os mesmos estimadores dos parâmetros relevantes. Álgebras de Jordan comutativas são utilizadas para exprimir essas estruturas. Usando as matrizes da base principal, das álgebras a que se associam os modelos, a estimação vai ter por base a relação entre as componentes de variância canónicas e as usuais. Para além do aninhamento em escada estruturado, apresento também modelos obtidos cruzando vários desses aninhamentos.

Sandra Monteiro



## Prémios Estatístico Júnior 2016

### Trabalho classificado em 1º lugar (3º ciclo do Ensino Básico)

Título: *Estilos de Vida*

Autores: Ana Rita Pôço Henriques

Professora orientadora: Não teve

Estabelecimento de Ensino: Escola Secundária 3º Ciclo Entroncamento

### Trabalho classificado em 2º lugar (3º ciclo do Ensino Básico)

Título: *Situações de Emergência*

Autores: Margarida Pereira Duarte e Maria João Meireles

Professor orientador: Andreia Mónica Moreira Silva.

Estabelecimento de Ensino: E B 2,3 Gonçalo Mendes Maia, Maia

### Trabalho classificado em 3º lugar *ex-aequo* (3º ciclo do Ensino Básico)

Título: *Hábitos de Higiene Oral*

Autores: Alexandre Pinto Silva, Carolina Fernandes Clemente e Maria Leitão Carvalho

Professor orientador: Carlos André Pimentel Lameirinhas

Estabelecimento de Ensino: Colégio Senhor dos Milagres, Leiria

### Trabalho classificado em 3º lugar *ex-aequo* (3º ciclo do Ensino Básico)

Título: *Rotina Diária*

Autores: Luana Isabel Rocha Pereira e Ana Rita Alves Magalhães

Professor orientador: José António Fernandes Freitas

Estabelecimento de Ensino: Escola Básica de Caldas de Vizela, Vizela

**Trabalho classificado em 2º lugar *ex-aequo*  
(Ensino Secundário)**

Título: *Escola Artur Gonçalves: Pontos Fortes e Pontos Fracos*  
Autores: Inês Viriato Santos e Daniela Filipa Rodrigues Godinho  
Professora orientadora: Maria Alice da Silva Martins  
Estabelecimento de Ensino: Escola Artur Gonçalves, Torres Novas

**Trabalho classificado em 2º lugar *ex-aequo*  
(Ensino Secundário)**

Título: *O papel da escola e do género na adopção de comportamentos sustentáveis*  
Autora: Leonor Veríssimo Carvalho Lince Duarte  
Professora orientadora: Cristina Maria Cohen Gonzaga Borges Caseiro Oliveira  
Carvalho  
Estabelecimento de Ensino: Escola Sede Secundária Maria Lamas, Torres Novas

**Trabalho classificado em 3º lugar *ex-aequo*  
(Ensino Secundário—Cursos Profissionais)**

Título: *Frequência dos Cursos Profissionais*  
Autor: Carolina Fernandes Mendes, Mariana Araújo Moura e Pedro Mendes Jacob  
Professores orientadores: Sandra Isabel Figueiredo Pimenta e César Torres  
Estabelecimento de Ensino: Escola Secundária Cacilhas-Tejo, Almada

**Trabalho classificado em 3º lugar *ex-aequo*  
(Ensino Secundário—Cursos Profissionais)**

Título: *Características Pessoais*  
Autores: Rafael Alexandre Carreira Semedo, Nuno Miguel Ventura Correia Nota  
Moreira e Thales Barros França Silva.  
Professores orientadores: Sandra Isabel Figueiredo Pimenta e César Torres  
Estabelecimento de Ensino: Escola Secundária Cacilhas-Tejo, Almada

**Nota: Não foi atribuído o 1º lugar (Ensino Secundário)**



**SOCIEDADE PORTUGUESA  
DE ESTATÍSTICA**

**[www.spestatistica.pt](http://www.spestatistica.pt)**

