



# Boletim



# SPE

Sociedade Portuguesa  
de Estatística

Publicação semestral

primavera de 2023



## *PORTSEA – um mar de Extremos em Portugal*

|   |    |
|---|----|
| Nota Editorial .....  | 19 |
| PORTSEA – um mar de Extremos em Portugal                                      |    |
| Emília Athayde .....  | 20 |
| Como comecei e tenho “navegado” neste “mar de extremos”                       |    |
| Manuela Neves .....   | 21 |
| Teoria de Valores Extremos em Sistemas Dinâmicos                              |    |
| Ana Freitas e Jorge Freitas .....   | 23 |
| Mare Nostrum — Um Mar de Extremos em Portugal                                 |    |
| Miguel de Carvalho .....  | 35 |
| Alguns Detalhes sobre a PORTSEA – Escola de Extremos e Aplicações em Portugal |    |
| M. Ivette Gomes .....   | 38 |
| PORTSEA 1983-2023   |    |
| Emília Athayde .....  | 60 |
| Adenda .....  | 61 |

|  |    |
|--|----|
| Editorial .....                                | 2  |
| Mensagem do Presidente .....                   | 4  |
| Notícias .....                                 | 7  |
| <i>Enigmística</i> .....                       | 11 |
| SPE e a Comunidade .....                       | 12 |
| PORTSEA – um mar de Extremos em Portugal ..... | 19 |
| Ciência Estatística .....                      | 74 |
| Prémio SPE 2022 .....                          | 75 |
| Prémio SPE 2023 .....                          | 79 |
| Boletim através do Tema Central .....          | 80 |

### Informação Editorial

**Endereço:** Sociedade Portuguesa de Estatística,  
Campo Grande. Bloco C6. Piso 4.

1749-016 Lisboa. Portugal.

**Telefone:** +351.217500120

**e-mail:** [spe@spestatistica.pt](mailto:spe@spestatistica.pt)

**URL:** <https://www.spestatistica.pt>

**ISSN:** 1646-5903

**Depósito Legal:** 249102/06

**Tiragem:** Edição digital

**Execução Gráfica e Impressão:** Gráfica Sobreireense

**Editor:** Fernando Rosado, [fernando.rosado@fc.ul.pt](mailto:fernando.rosado@fc.ul.pt)

Sociedade Portuguesa de Estatística desde 1980

# XXVI Congresso da Sociedade Portuguesa de Estatística

SPE2023

Guimarães, 11 a 14 de outubro de 2023



(CEphoto, Uwe Aranas)

Informações mais detalhadas do evento podem ser consultadas em

<https://w3.math.uminho.pt/SPE2023>

# Junta-te à



# SPE

Sociedade Portuguesa  
de Estatística

*“Se já és sócio da SPE, incentiva os teus colegas,  
colaboradores e alunos a juntarem-se à SPE”*

## A SPE

- Oferece descontos em congressos e outros eventos organizados pela SPE.
- Oferece distinções e reconhecimento através dos seus prémios.
- Oferece oportunidades para ampliares a tua rede de contactos através da comunidade SPE.
- Oferece aos sócios acesso a um sistema de acreditação internacional.
- Valoriza sócios, comunidade e profissão apostando na educação, formação e inovação.
- Defende a profissão e molda o seu futuro.

## Junta-te à SPE:

<https://www.spestatistica.pt/socios/admissao-formulario>

## Quota anual

- Regular: 30€
- Estudante: 15€
- Promotor\*: 0€
- Recém-licenciado†: grátis!

† Até um ano após terminar a licenciatura.

\* Um “sócio promotor” angaria 2 novos sócios por ano.

# Editorial

**... um mar de descobertas! Para os jovens investigadores, para os cientistas, para o País...**

1. A triangulação é método e procedimento de recolha de dados para uma melhor localização dos pontos importantes do objetivo em estudo. É uma metodologia muito usada nas mais diversas ciências. O objetivo fundamental é descobrir referências. Forma-se então “uma rede de marcos” que caracteriza e filtra o desiderato em vista. Assim também na Estatística, podemos construir a rede dos “pontos de referência” para o seu desenvolvimento na Ciência em Portugal. Nos últimos cinquenta anos, em Portugal, nas Universidades e Centros, foi construída uma rede de polos estatísticos – cada um na medida das suas possibilidades e oportunidades. A Ciência Estatística Portuguesa já possui uma triangulação nacional.

O Boletim primavera 2023 contém em si um marco de primeira categoria da história científica portuguesa. A partir deste marco, em todo o país, foi construída uma área de investigação ligada à Teoria dos Valores Extremos.

O miolo editorial descreve-o muito bem – desde o relato histórico e o contexto em que surgiu até aos mais diversos testemunhos.

**PORTSEA – um mar de Extremos em Portugal** é a concretização editorial para efeméride de um acontecimento de enorme relevo para a Estatística; que aglomera e faz parte das vidas científicas de muitos estatísticos portugueses.

PORTSEA é um marco de primeiríssima categoria. Está num ponto mais alto e é observado a partir dos mais diversos outros pontos (mais) secundários.

Esse marco com todos os outros que compõem esta simbólica triangulação nacional formam uma rede histórica de Estatística em Portugal. O pioneirismo, a liderança, a dedicação, o voluntarismo e a determinação geraram uma Força Estatística Nacional que produziu frutos em todas as Universidades e Centros de Investigação portugueses e alguns estrangeiros. No simbólico *quadragésimus annus* este Boletim SPE primavera 2023 relata um pouco do memorial *PORTSEA*.

2. A jeito de testemunho pessoal!

Anos depois de cumprido o serviço militar obrigatório que a lei, à época, exigia,...

Em 1973 e já com o desempenho de dois anos de Assistente Eventual da FCUL “apesentei-me” para cumprir o serviço militar obrigatório. Durante 27 meses percorri tempo e espaço da minha vida que, obviamente, não formavam a minha primeira escolha. Fazia parte do tempo do jovem daquela década em plena guerra colonial.

Em 1975 em pleno “verão quente” – momento histórico de relevância – regresssei às funções académicas interrompidas e às quais voltava como para um novo mundo, com novas regras e diferentes atribuições. Tudo era e por todo o lado havia “revolução”. Regressado à FCUL, com a agitação já bem relatada, o serviço que me foi distribuído implicou dois / três anos de passagem pela “Matemática Pura”. E assim, neste mar atribulado da Universidade e do País, naveguei durante alguns anos. Em 1979/80 “abriu-se” de novo a porta da Estatística, Ciência que à época dava os primeiros passos em Portugal. Iniciei a minha carreira de investigação sob a orientação do Prof Tiago de Oliveira e, como em tantas (co)incidências da vida tive a feliz oportunidade de ser um dos jovens participantes do histórico “Vimeiro 1983” que este Boletim celebra. Aí recebi as primeiras “cartas de navegação” que me orientaram por toda a vida científica tal era o manancial de grandes navegadores que se congregaram nessa histórica **“quinzena de retiro científico”**.

Para além da gratidão pela oportunidade fica o testemunho de que “lá” se sentiu muito bem todo o valor da força da união e dedicação em prol de uma causa. A época “sem redes sociais” e o local (algo isolado) permitiram uma vivência muito bem aproveitada por todos os jovens que bem sentiram o valor dos mestres que com eles partilhavam intensamente todo o seu saber. Os frutos, quarenta anos depois, aí estão, apresentados nos mais variados documentos referenciados neste Boletim primavera de 2023

Este Boletim SPE primavera de 2023, como seria de esperar, teve a generosa e muito dedicada colaboração da Prof. Ivette Gomes numa coedição preciosa, sem a qual o desiderato editorial ficaria sem o cerne gerador. Os desafios, as apertadas agendas e todos os constrangimentos por muitos conhecidos tornam difícil o desejado “maior leque possível” de autores. As “presenças” e contribuições acrescidas com as referências já acima indicadas permitem o alargar do número de presenças autorais.



O Tema Central do próximo Boletim será

*Educação (e) Estatística*

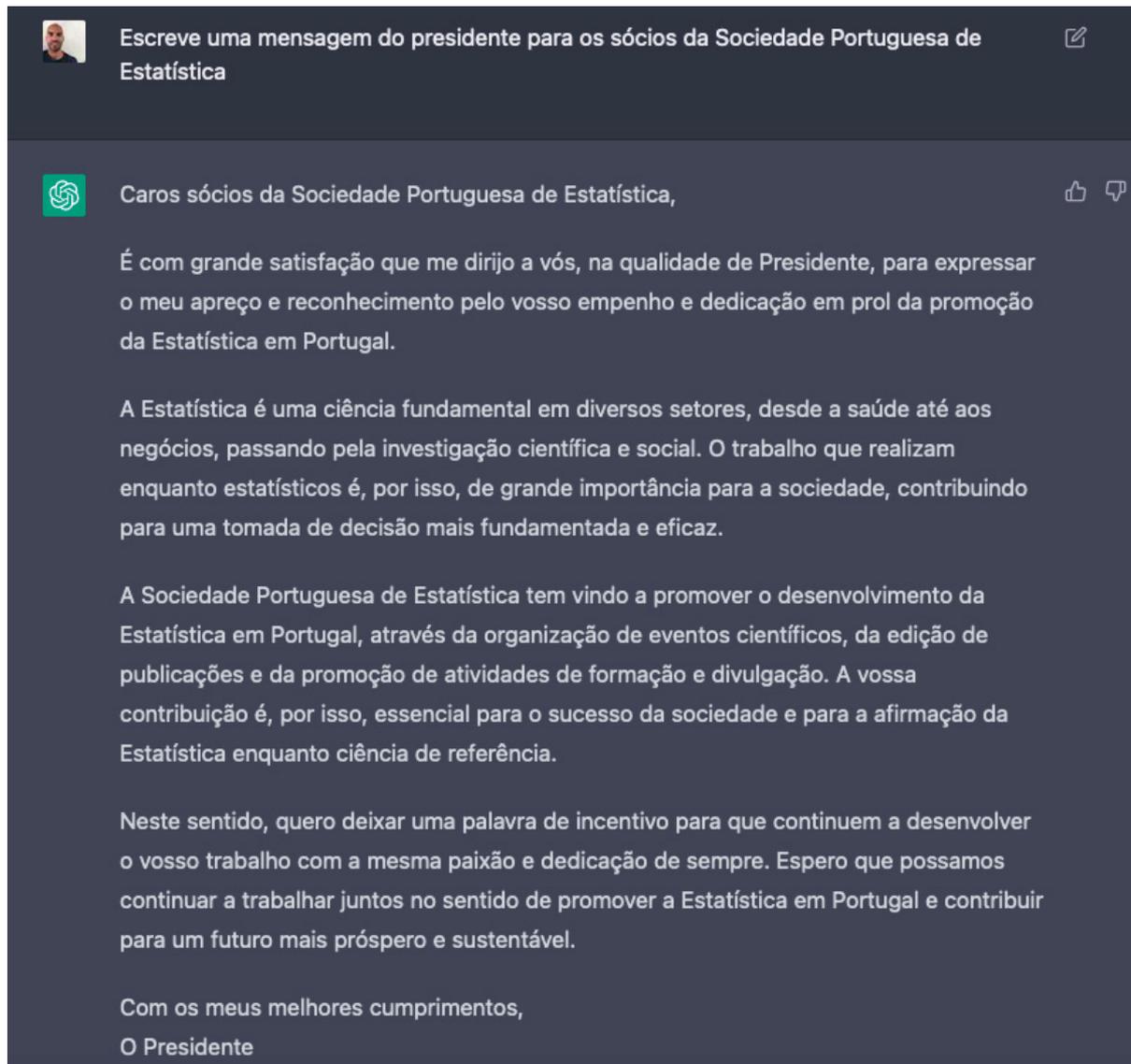


# Mensagem do Presidente

Caros Sócios,

*“É com grande satisfação que me dirijo a vós, na qualidade de Presidente, para expressar o meu apreço e reconhecimento pelo vosso empenho e dedicação em prol da promoção da Estatística em Portugal.”*  
Este Boletim é dedicado à estatística de valores extremos – campo no qual Portugal tem tido uma enorme liderança e protagonismo do ponto de vista internacional. Antes de passar a palavra aos vários ilustres líderes nesta área, quero apenas partilhar convosco algumas palavras ao acaso – umas escritas por um Estatístico, outras escritas pela Estatística.

**‘Palavras ao acaso’:** A *inteligência artificial generativa* é um ramo da inteligência artificial que se dedica ao estudo de algoritmos capazes de gerarem conteúdo original – tais como texto, imagens, música, etc. Uma das ferramentas deste domínio que tem dado que falar é o chatGPT (<https://chat.openai.com/chat>), da OpenAI. Esta ferramenta de inteligência artificial escreveria como mensagem do Presidente o seguinte:

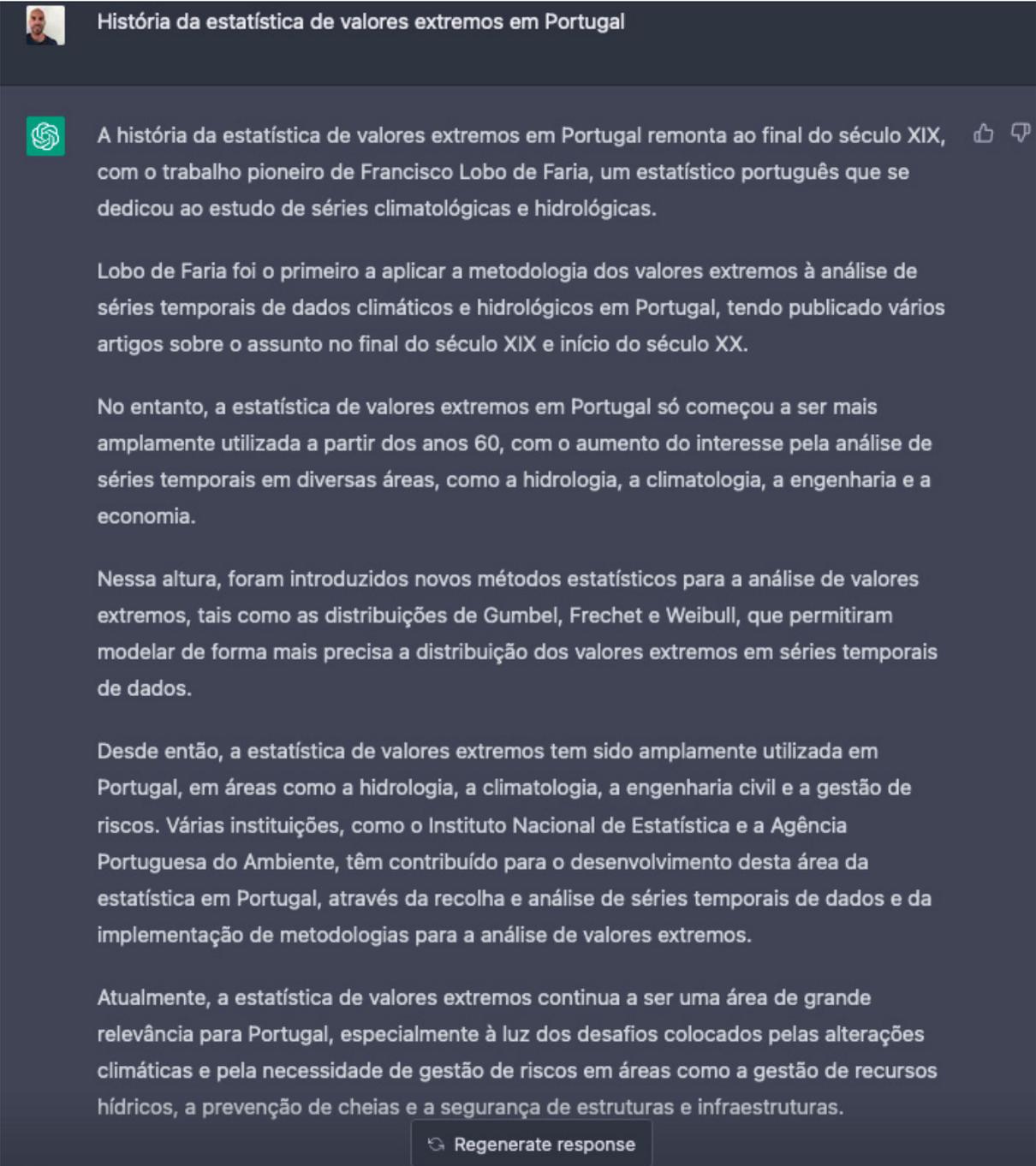


The screenshot shows a chat window with a dark background. At the top, there is a header bar with a profile picture of a man and the text "Escreve uma mensagem do presidente para os sócios da Sociedade Portuguesa de Estatística" next to an edit icon. Below this, the ChatGPT logo is visible on the left, followed by the text "Caros sócios da Sociedade Portuguesa de Estatística," and thumbs up/down icons on the right. The main body of the chat contains a message in white text, which is a reproduction of the text in the document above. At the bottom of the message, it says "Com os meus melhores cumprimentos, O Presidente".

Extraordinário! De modo interessante, há uma série de ideias estatísticas associadas ao funcionamento do chatGPT. Esta plataforma de inteligência artificial é baseada num modelo ‘autoregressivo’ de geração de texto (em que cada palavra é gerada tendo em conta as anteriores), há uma distribuição Exponencial subjacente à aleatorização do processo, e é ainda ajustado um modelo de regressão altamente parametrizado (rede neuronal).<sup>1</sup>

Apesar de se tratar evidentemente de uma ferramenta de trabalho extremamente poderosa, entendo que vários de vós podem também estar neste momento preocupados com potenciais usos indevidos da mesma – por exemplo, em termos de plágio, no contexto do Ensino. Gostaria de aproveitar para referir que foi criada para o efeito a ferramenta [GPTZero](#), a qual permite classificar se um texto foi ou não gerado usando técnicas de inteligência artificial. De acordo com os criadores da plataforma anterior, a classificação do GPTZero tem uma AUC (área sob a curva ROC) de 0.98. Fixando o limiar de classificação em 0.65, o GPTZero classifica corretamente 99% dos artigos escritos por humanos e 85% dos artigos gerados por inteligência artificial.

**PORTSEA – um mar de Extremos em Portugal:** Continuando com a geração de palavras ao acaso, vejamos o que redige o chatGPT acerca da história da estatística de valores extremos em Portugal.



**História da estatística de valores extremos em Portugal**

A história da estatística de valores extremos em Portugal remonta ao final do século XIX, com o trabalho pioneiro de Francisco Lobo de Faria, um estatístico português que se dedicou ao estudo de séries climatológicas e hidrológicas.

Lobo de Faria foi o primeiro a aplicar a metodologia dos valores extremos à análise de séries temporais de dados climáticos e hidrológicos em Portugal, tendo publicado vários artigos sobre o assunto no final do século XIX e início do século XX.

No entanto, a estatística de valores extremos em Portugal só começou a ser mais amplamente utilizada a partir dos anos 60, com o aumento do interesse pela análise de séries temporais em diversas áreas, como a hidrologia, a climatologia, a engenharia e a economia.

Nessa altura, foram introduzidos novos métodos estatísticos para a análise de valores extremos, tais como as distribuições de Gumbel, Frechet e Weibull, que permitiram modelar de forma mais precisa a distribuição dos valores extremos em séries temporais de dados.

Desde então, a estatística de valores extremos tem sido amplamente utilizada em Portugal, em áreas como a hidrologia, a climatologia, a engenharia civil e a gestão de riscos. Várias instituições, como o Instituto Nacional de Estatística e a Agência Portuguesa do Ambiente, têm contribuído para o desenvolvimento desta área da estatística em Portugal, através da recolha e análise de séries temporais de dados e da implementação de metodologias para a análise de valores extremos.

Atualmente, a estatística de valores extremos continua a ser uma área de grande relevância para Portugal, especialmente à luz dos desafios colocados pelas alterações climáticas e pela necessidade de gestão de riscos em áreas como a gestão de recursos hídricos, a prevenção de cheias e a segurança de estruturas e infraestruturas.

[Regenerate response](#)

<sup>1</sup> Para detalhes adicionais recomendo a leitura do seguinte artigo de divulgação redigido pelo CEO da Wolfram:

<https://writings.stephenwolfram.com/2023/02/what-is-chatgpt-doing-and-why-does-it-work/>

Em relação às generalidades, estamos bem. Mas este texto ilustra bem como é necessário estarmos alerta, uma vez que começamos a entrar no domínio das chamadas *alucinações*.<sup>2</sup>

Além disso, a Sociedade Portuguesa de Estatística, que concede a Medalha de Ouro Francisco de Lobo de Faria por excelência em estatística em homenagem a seu nome, é uma das muitas organizações que reconhecem suas contribuições para a estatística.

Francisco Lobo de Faria, ora muito bem, comecemos por aí. A máquina diz que a Sociedade Portuguesa de Estatística até concede uma Medalha de Ouro, Francisco Lobo de Faria.

Claramente trata-se de uma alucinação do algoritmo. Ou por outras palavras, trata-se de uma forma moderna de mentir com a Estatística—uma forma com a qual tenho a certeza que nem Darrell Huff<sup>3</sup> teria imaginado!

Até breve,

Edimburgo, 24 de fevereiro de 2023

Cordais saudações

Miguel de Carvalho



# Notícias

## • XXVI Congresso da Sociedade Portuguesa de Estatística - SPE2023

### Guimarães, 11 a 14 de outubro de 2023

Os Congressos da Sociedade Portuguesa de Estatística (SPE) ocorrem desde algum tempo bianualmente e têm como objetivo promover a área da Estatística, com um foco particular na modelação e na análise de dados provenientes de problemas reais. O Centro de Matemática da Universidade do Minho (CMAT/UMinho) associa-se à Sociedade Portuguesa de Estatística (SPE) na realização do XXVI Congresso da Sociedade Portuguesa de Estatística, a decorrer entre 11 e 14 de outubro de 2023, em Guimarães.

O Congresso da SPE é o principal fórum de discussão da Sociedade Portuguesa de Estatística; é no Congresso da SPE que fazemos avançar a nossa profissão através da discussão, reunião, e socialização com Estatísticos e Profissionais de outras Ciências de Dados de Universidades, Institutos e Laboratórios de Investigação, Empresas, Governo, Estatísticas Oficiais, Reguladores e Simpatizantes. O congresso pretende reunir todos estes profissionais, empresas, entidades e utilizadores de estatística, independentemente da natureza das suas funções e do local onde as exercem, constituindo por isso um local privilegiado de encontros, intercâmbios e de reflexões.

Os congressos da SPE têm como objetivo promover o intercâmbio e debate de ideias entre os participantes, apoiado numa forte interdisciplinaridade, e constituindo uma boa oportunidade para jovens investigadores e investigadores de reconhecida experiência discutirem e partilharem conhecimento em diferentes áreas de aplicação da Estatística.

A participação de estudantes e de jovens investigadores é particularmente encorajada. Salientamos a oportunidade destes se candidatarem a uma Bolsa SPE, assim como ao Prémio SPE concedido pela Sociedade Portuguesa de Estatística para o melhor trabalho de jovem investigador / aluno (até 35 anos) com contribuições nestas áreas. Este prémio, no valor de 1000 Euros, tem como objetivo incentivar a participação dos setores mais jovens nas atividades da Sociedade Portuguesa de Estatística.

O concurso para atribuição do Prémio SPE 2023 está aberto até 15 de Setembro de 2023. A entrega formal do Prémio SPE 2023, com apresentação do trabalho galardoado, terá lugar durante o XXVI Congresso da Sociedade Portuguesa de Estatística—SPE 2023.

([https://w3.math.uminho.pt/SPE2023/img/premio\\_SPE2023.pdf](https://w3.math.uminho.pt/SPE2023/img/premio_SPE2023.pdf))

Os trabalhos submetidos para o Congresso da SPE são apresentados em forma de artigos curtos de uma página, que são revistos pela Comissão Científica do Congresso. Os participantes do Congresso SPE2023 com trabalhos aceites, sejam em comunicação oral ou em formato de poster, poderão posteriormente submeter um artigo original sobre a investigação que apresentaram no Congresso. A Springer publicará os *Proceedings* da SPE2023 no formato de livro. O artigo deve ser escrito em inglês, estará sujeito a revisão por pares.

O programa científico do congresso inclui um minicurso lecionado por Pedro Miranda Afonso (*Erasmus Medical Center Rotterdam*), um dos autores da biblioteca *JMbayes2* do R para a modelação conjunta de dados longitudinais e de sobrevivência. O programa incluirá ainda 4 sessões plenárias, cerca de 100 apresentações orais, algumas sessões temáticas e de pósteres, complementando assim o programa científico.

### Oradores convidados

Jacobo de Uña-Álvarez (Universidade de Vigo, Espanha)

Jorge Caiado (ISEG, Portugal)

Maria Eduarda Silva (Universidade do Porto, Portugal)

Maria Kateri (Aachen University, Alemanha)

### Local do congresso

As sessões do congresso SPE2023 decorrerão no Centro Cultural Vila Flor situado perto do centro histórico da cidade de Guimarães.

### Datas importantes

- Data limite para envio de resumos – **18 de junho de 2023** (sem extensão de prazo)
- Notificação de aceitação para comunicação – **10 de julho de 2023**
- Inscrição a custo reduzido – **15 de julho de 2023**
- Minicurso – **11 de outubro de 2023**
- Conferência – **11 a 14 de outubro de 2023**

A Comissão Organizadora

Informações mais detalhadas do evento podem ser consultadas em

<https://w3.math.uminho.pt/SPE2023>



(CEphoto, Uwe Aranas)

## • Prémio SPE 2022

O Prémio SPE, é promovido pela Sociedade Portuguesa de Estatística e pretende estimular a atividade de estudo e investigação científica em Probabilidades e Estatística entre os jovens.

O Prémio SPE 2022 foi atribuído *ex-aequo* a André Martins Brito e a Henrique Monteiro.

O Júri do Prémio SPE 2022 foi constituído por Conceição Amado da Universidade de Lisboa; Lígia Rodrigues da Universidade de Évora; Vanda Inácio de Carvalho da Universidade de Edimburgo.

A entrega formal do Prémio SPE 2022, com apresentação dos trabalhos galardoados, terá lugar durante o XXVI Congresso da Sociedade Portuguesa de Estatística—SPE 2023.

No final deste Boletim apresenta-se notícia mais desenvolvida sobre os trabalhos premiados.

FR

## • Prémio SPE 2023

Está aberto, até **15 de setembro de 2023**, o concurso para atribuição do **Prémio SPE 2023**.

O Regulamento pode ser consultado no final desta edição do Boletim SPE primavera de 2023 ou no sítio da SPE em <http://www.spestatistica.pt/>.

FR

## • Mestrado em Modelação, Análise de Dados e Sistemas de Apoio à Decisão

A equipa da via EMOS (European Master in Official Statistics) do Mestrado em Modelação, Análise de Dados e Sistemas de Apoio à Decisão (MADSAD) da Faculdade de Economia da Universidade do Porto, formada pelos estudantes Catarina Campos de Melo Sousa, Juliana Machado e Moysés Fontoura participou no European Big Data Hackaton, organizado pelo EUROSTAT que teve lugar durante a conferência NTTS 2023.

Obtiveram o prémio de melhor equipa EMOS e o 6º lugar da classificação geral!

Parabéns!



Foto: A Diretora Geral do EUROSTAT e os premiados Catarina, Juliana e Moysés

ES

## • REVSTAT – Statistical Journal

Publicação científica de referência, de acesso aberto com revisão pelos pares, constituída por artigos de elevado interesse científico que contribuem para o desenvolvimento da Ciência Estatística, focada em teorias inovadoras, métodos e aplicações nas diferentes áreas do conhecimento.

*REVSTAT-Statistical Journal is an Open Access (OA) blind peer-reviewed journal, registered in the Directory of Open Access Journals (DOAJ), and it is published quarterly, in English, by Statistics Portugal.*

*There are NO FEES for publishing accepted manuscripts, with Digital Object Identifier (DOI) permanent article identifier and made available in OA.*

*All published papers are licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC BY 4.0).*

Em 2022, a REVSTAT - Statistical Journal lançou o Volume 20 - Números 5, com os artigos listados abaixo (<https://revstat.ine.pt/index.php/REVSTAT/issue/view/70>).

### **Volume 20, Issue 5:**

- "Comparison of Estimates Using L- and TL-Moments and Other Robust Characteristics of Distributional Shape and Tail Heaviness" by Ivana Malá, áclav Sládek and Filip Habarta
- "Plug-in Estimation of Dependence Characteristics of Archimedean Copula via Bézier Curve" by Selim Orhun Susam and Mahmut Sami Erdogan
- "Estimation in Weibull Distribution Under Progressively Type-I Hybrid Censored Data" by Yasin Asar and Reza Arabi Belaghi
- "The Destructive Zero-Inflated Power Series Cure Rate Models for Carcinogenesis Studies" by Rodrigo R. Pescim, Adriano K. Suzuki, Gauss M. Cordeiro and Edwin M.M. Ortega
- "Single Index Regression Model for Functional Quasi-Associated Time Series Data" by Salim Bouzebda, Ali Laksaci and Mustapha Mohammedi
- "On Analyzing Non-Monotone Failure Data" by Muhammad Mansoor, M.H. Tahir, Gauss M. Cordeiro, Edwin M.M. Ortega and Ayman Alzaatreh

GS



# Enigmística de mefqa

Ь Ъ О В ∇ В І Γ І D ∇ D E

t the

## Enigmas 39 e 40

No Boletim SPE outono de 2022 (p. 13):

† /≡ ≤ † /≡

Enigma 37: teste dos sinais

$2\sqrt{0.2}$  0.312<sup>2</sup>  
0.01, 0.667, 0.909, 0.333, 0.8  
0.911, 0.007, 0.23; 0.4144, 0.001, 4 / 7  
0.408, 0.27, 0.0237, 0.0001, 0.956, 10%  
0.07, 0.888, 0.42, 0.009, 0.9998, 50%, 0.36, 0.91  
22.7%, 0.6018, 0.66, 0.9, 0.8, 20%, 0.365  
log(2) 0.29 0.985, 3%, 0.4  
0.518  
0.743  
1.2 / 4  
0.1414

Enigma 38: árvore de probabilidades

## More data sources, more information, more quality

Sofia Rodrigues, *sofia.rodrigues@ine.pt*

Almiro Moreira, *almiro.moreira@ine.pt*

Paulo Saraiva, *paulo.saraiva@ine.pt*

João Poças, *joao.pocas@ine.pt*

*INE - Statistics Portugal*

Este trabalho foi apresentado na European Conference on Quality in Official Statistics (Q2022), realizada de 8 a 10 de junho de 2022 em Vilnius, Lithuania.

### 1. Data sources

The growing and intensive use of non-statistical information (administrative and other) brings new and important challenges to Statistics Portugal (SP) and to the production processes of official statistics.

Statistics Portugal, in addition to its own infrastructure and extensive experience in data appropriation, has already created a set of quite robust components and procedures: the Datawarehouse System, the Global Survey Management System (SIGINQ), the centralization and standardization of collection processes, of the metadata systems and of statistical methods are some examples. However, the statistics compilation system, namely in terms of data editing and analysis, is still strongly sustained by a bottom-up approach, with emphasis on micro-data. Additionally, data analysis and quality control processes have been more focused on data traditionally collected by Statistics Portugal through surveys than on data from external sources.

The growing availability of new data; the financial but also moral need to reduce costs and the statistical burden, and a pressure from the economic and governmental agents to have quality statistical information available, in less time and with greater detail, are the main factors that lead to the near inevitability of rethinking the statistical production processes.

In the view of the growing availability of various types of data, statistical and non-statistical, collected or not by Statistics Portugal, and the consequent appropriation and use of these data in the production of official statistics, it becomes (even more) urgent to reassess the operating logic of the statistical

production process, in an integrated manner, from data collection, processing and analysis to dissemination. The developments that have occurred at SP in recent years facilitate a possible change in logic.

## **2. National Data Infrastructure**

Exploring new data sources for statistical purposes has become particularly relevant to produce official statistics to reduce costs and the statistical burden on respondents, while seeking to preserve or even improve the quality of official statistics. In the pursuit of the strategy of strengthening statistical production through the appropriation of a wide range of administrative data, Statistics Portugal has developed in the last years several initiatives that aims to respond to this challenge, in which we highlight the strategic objective of the creation of the National Data Infrastructure(IND).

In 2018, began the development of the IND at Statistics Portugal. Its main objective is the adoption of a more intensive and integrated use of administrative data in the production of statistical information, taking advantage of the whole production chain of Portuguese official statistics. This chain ensures the protection and integrity of the data, from the development of platforms, applications and algorithms, data collection and validation to the analysis of the statistical information. In practical terms, it's intended to create a single point of access to the various types of data and make it available to serve multiple purposes or projects, either to produce official statistics by Statistics Portugal or for research purposes.

Covering both businesses and individual data, IND is designed to be a multi-purpose solution to provide statistical data to Statistics Portugal and other stakeholders. The recent developments are the register-based Census, dwellings and geospatial information, electronic receipts (Tax Authority), and monthly income registers (Tax Authority and Social Security).

In the last three years, there are several examples of simplification of questionnaires, by eliminating or changing variables, replacing administrative information for the data collected by SP. In this context, we highlight the use of the Municipal Taxes on Real Estate and Onerous Transactions on Real Estate, from the Tax Authority; the Monthly Remuneration Statements of Social Security; data from the Regulatory Authority for Water and Waste Services; and from the Central Administration of the Health System and the Shared Services of the Ministry of Health, regarding the activity of public hospitals in mainland Portugal. The use of this administrative information has made possible to simplify several surveys, allowing for a significant burden reduction.

Statistics Portugal has made a significant investment in learning new skills, tools, and techniques, to process and analyse (massive) sets of data, to be internally available to produce statistics, in a very short period.

### ***2.1. The Administrative Data Unit***

The adjustments made in the internal organization of the Institute, reinforcing the competences of Methodology and Information Systems Department and the Management and Data Collection Department in the data management and data analysis were an important tool to the exploitation of new data sources. Following the strategy of intensive use of administrative and other data, in March 2020, SP created a new organic unit, devoted exclusively to the collection and analysis of administrative data. The institution now has a unit dedicated to evaluating and testing the use of new data sources, with a view to improving the quality and consistency of statistical production and the replacement of information collected by surveys or censuses, as well as the development of new statistical products, in close articulation with the established production system. The definition of validation models, consistency and coherence analysis and the integration of data from various sources are other of its main tasks. This unit works in close collaboration with Methodology and Information Systems Department and all the other subject matter units.

### **3. The top-down approach**

SP is working to shift from a more generalized bottom-up approach, concerning the analysis and processing of the various types of data, to a top-down logic, where micro-data are checked but with reference to a more aggregated level: if the macro analysis indicates implausible results, the individual data responsible for them will be checked and eventually edited. We expect, on the one hand, an increase in efficiency, allowing for savings in time and resources by reducing the volume of microdata to be analysed and/or edited, and on the other hand, an increase in quality, since the results to be published are one of the aspects to be considered, right from the start.

Although this approach has been used for a few years in some projects, the access to e-invoice data in this context of the creation of the IND has strengthened the appropriation of this logic in a more transversal way.

#### ***3.1. The e-Invoice example***

Under a protocol established between the Tax Authority and SP, monthly data on taxable value, aggregated by issuer and acquirer, invoicing month, and acquirer country, derived from the e-Invoice system, are received since May 2020. A huge amount of data is received every month: around 80 million records.

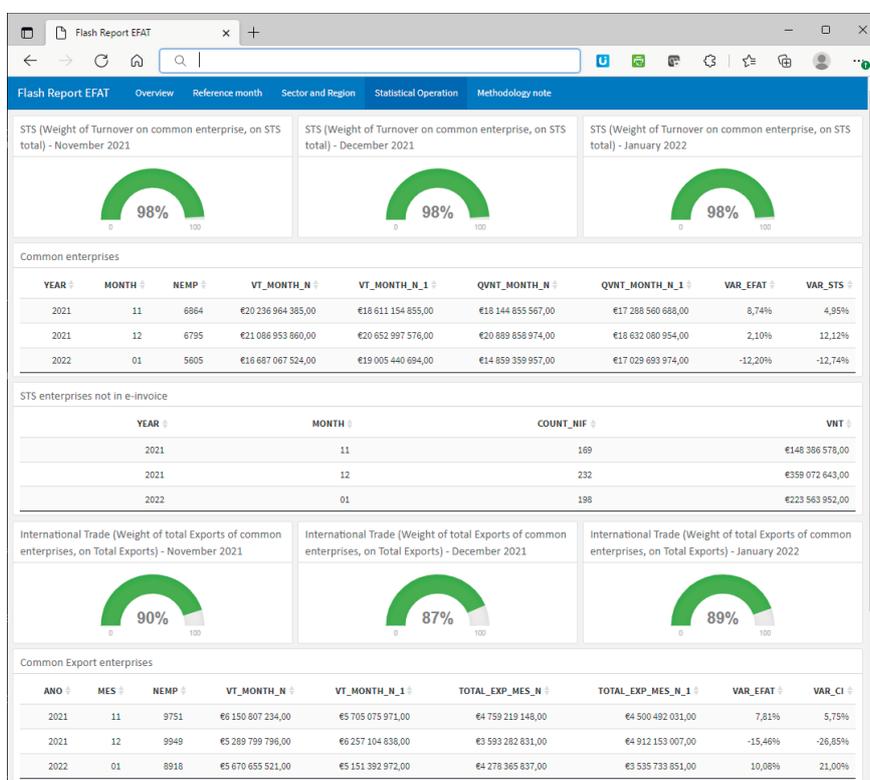
A set of ETL (Extract, Transform, Load) procedures are performed, introducing a set of significant improvements. Additionally, the database is also treated and enriched by the inclusion of new attributes

from other sources, which allow the consistency of the various data sources to be enhanced: inclusion of new characterization attributes; the temporal referencing of characterization data; the creation of new aggregate tables; the identification and imputation of anomalous values and the inclusion of associated metadata. These improvements positively affect both the performance in data exploration and the quality of the data made available. One of the main objectives is to create a consolidated and improved base for use by various users in the various statistical domains.

One of the intended uses of this data source is to replace the direct collection of data for the purpose of compiling Short Term Indicators. In that context, comparative analyses are carried out between the e-Invoice data and the information collected through various statistical operations of SP: such as the monthly surveys Short-term indicators and the International Trade of Goods, as well as with the annual information provided by the Simplified Business Information.

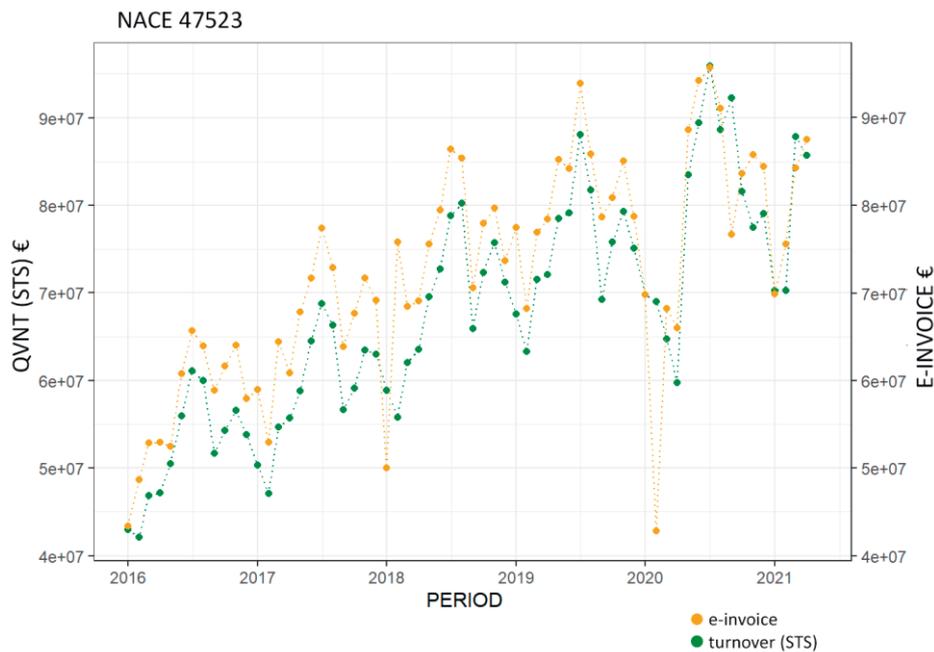
These calculations and analyses always take a top-down approach in first place, i.e., the overall value is determined, considering the layer of analysis. In this case, the total value and value per NACE are determined and compared with the adequate sources of information. A monthly report is produced, using R-markdown language, and the main figures, at an aggregated level are presented.

**Figure 1 – E-invoice monthly flash report**



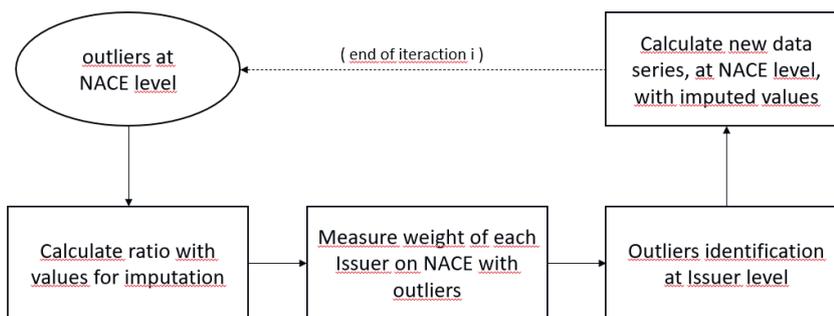
For each NACE level (the most relevant ones), a comparison is done between E-invoice data and the results of STS survey.

**Figure 2 – Comparison between E-invoice and STS survey, for NACE 47523**

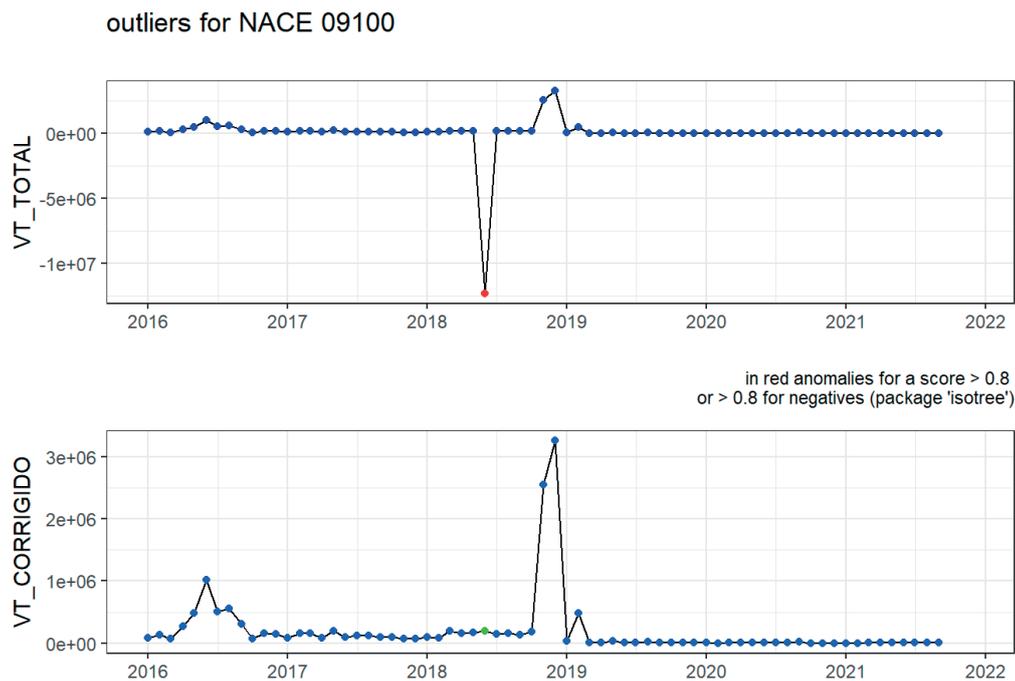


Given the large volume of monthly e-invoice records, the process of analysis and treatment of outliers is carried out in a phased manner. The initial analysis is performed at the NACE level, identifying the records that present outliers: the isolation<sup>o</sup>-Forest method is used, and observations with a score greater than 0.65 were identified as severe outliers. Then, we identify the records at the individual level (issuer level) that are responsible for this outlier value, and we use the Kalman-Smoothing algorithm for the imputation of new values. As can be seen in the scheme of figure 3, this is an iterative process that is executed as many times as necessary to obtain the expected results (i.e NACE data series with severe outliers treated). The example in figure 4 shows the result of the first iteration, and then the process is restarted until no outliers are identified.

**Figure 3 – Outliers treatment**



**Figure 4 – Editing and imputation**



The treatment of the e-invoice data was a very important experience, rapidly making available huge data sets already processed, transformed, and enriched proved to be an important contribution to building and meeting the objectives of the National Data Infrastructure.

The example of the e-invoice data treatment played, once again, an important role in defining a set of procedures that are intended to be followed for all the other sources, namely: production of reports explaining the procedures implemented in data treatment and analysis; production of reports (flash reports), that includes the main results and a list of the main characteristics and - service level agreements (ongoing).

#### **4. Conclusions**

In view of the increasing availability of various types of data, statistical and non-statistical, collected or not for statistical purposes, and the consequent appropriation and use in the production of official statistics, it is (even more) urgent to reassess the operating logic of the statistics production process in an integrated manner, from data collection, cleaning, editing, processing, and analysis to dissemination.

Recent organizational rearrangements at Statistics Portugal facilitate a change of the production chain towards a data-driven perspective. Supported by a strong and centralized infrastructure, the existence of a dedicated unit, which thinks the data in an integrated and transversal way to the several objectives are two of the key elements. The implementation of the top-down approach in the analysis procedures is a natural outcome.

## 5. References

Braaksma, B, (2009), Redesigning a statistical institute: the Dutch case

Braaksma, B. E Buiten, G. (2012), Redesign of the chain of economic Statistics in the Netherlands

Delden, A. E Aelen, F, (2008), Redesigning the chain of economic statistics at Statistics Netherlands: STS-statistics as an example

ESTP, Eurostat (2018), Methods and selected topics

UNECE (2011), The impact of globalization on National Accounts, United Nations, New York and Geneva, Annex 2.2 – A consistency unit at Statistics Netherlands: reducing asymmetries in national accounts and related statistics

UNECE (2015), Guide to Measuring Global production, United Nations, New York and Geneva, Chapter 6 – Large and complex enterprises units

Vennix, Kees (2012), The treatment of large enterprises within Statistics Netherlands

Werkhoven, Thom (2013), Improving cross domain coherency in Dutch business statistics

Zwijnenburg, J (2012), Redesign of the system of economic statistics in the Netherlands



## Nota Editorial

O Tema Central do *Boletim SPE primavera 2023* enquadra-se numa longa história da Estatística em Portugal. Nesta, o tema ora abordado é transversal a muitos autores e perspectivas pelo que, dada a sua importância, facilmente se encontra uma intersecção bem visível em relatos históricos e testemunhos. A opção editorial foi não condicionar as eventuais repetições; todas terão algo que as torna diferentes.

**PORTSEA – um mar de Extremos em Portugal** é a concretização editorial para efeméride de um acontecimento de enorme relevo para a Estatística; que aglomera e faz parte das vidas científicas de muitos estatísticos portugueses.

Neste ano de 2023 em que se comemora o 40º aniversário desse “encontro científico Vimeiro 83”, este Tema Central, através dos seus autores, faz uma nova visita e junta novas contribuições.

Nas Edições SPE, muitos outros textos continuam disponíveis para consulta dos interessados em continuar esta nova visita àquele acontecimento primordial da Estatística em Portugal.

Listamos (alguns):

No *Boletim SPE primavera de 2007 – A “Escola de Extremos em Portugal”*

Andreia Hall - Não há caminhos, há que caminhar (p. 15-19)

Isabel Fraga Alves - Acerca de Testes Estatísticos para Valores Extremos (p. 20-26)

P. de Zea Bermudez, J. Mendes and K. F. Turkman - Models for Spacial Extremes (p. 27-31)

Maria da Graça Temido - Semiestabilidade em Teoria de Extremos (p. 32-36)

Maria Ivette Gomes - Memorial da Escola (p. 37-51)

Disponíveis em <https://www.spestatistica.pt/publicacoes/categoria/boletim-da-spe>

No *Memorial da Sociedade Portuguesa de Estatística*, F. Rosado (ed.), Edições SPE 2005

Bento Murteira - A Estatística em Portugal nos últimos 25 anos (p. 11-21)

M. Ivette Gomes - “Extremistas” num extremo da Europa (p. 37-44)

Disponível em <https://www.spestatistica.pt/publicacoes/publicacao/memorial-da-sociedade-portuguesa-de-estatistica>

Todos estes trabalhos bem como os seus autores ficam, deste modo, também associados à efeméride desse histórico NATO-ASI de 1983. As referências bibliográficas de todos eles são informações relevantes para a construção de um percurso científico e temporal que ajuda a sequenciar o quê e quem investigou e contribuiu para a construção deste mar de Extremos que aqui começa.

No *Boletim SPE outono de 2022 – Prémios na Sociedade Portuguesa de Estatística* foram abordados, em particular, os Prémios SPE.

O Prémio SPE – um estímulo à investigação, é destinado aos jovens investigadores e foi iniciado em 1996. Passaram 25 anos!

Uma breve abordagem da “lista dos nomes galardoados com Prémio SPE” mostra, sem dúvida, que a maior parte são ou foram “membros PORTSEA”. No Boletim referido, alguns participaram como autores. É uma contribuição que podemos indicar para outra nova leitura da história da PORTSEA.

**PORTSEA**

**um mar de extremos em Portugal**



mefqa 2023

Teresa Correia Martins, 2001 (óleo s/ tela, excerto)

## Como comecei e tenho “navegado” neste “mar de extremos”

Manuela Neves, [manela@isa.ulisboa.pt](mailto:manela@isa.ulisboa.pt)

CEAUL & ISA/ ULisboa

Terminado o meu curso de licenciatura em Matemática Aplicada na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, em 1976, entrei no Instituto Superior de Agronomia (ISA) como assistente eventual do 3º Grupo de Disciplinas (Matemática), formalmente em Abril de 1977. Na altura, o responsável por aquele Grupo de Disciplinas era o saudoso Prof. António St. Aubyn. Até 1983 vivi dedicada à preparação/ensino das disciplinas que em cada ano me eram atribuídas, nalgumas das quais houve necessidade de assumir desde logo a responsabilidade da sua regência. Entretanto casei e em três anos já estava com 2 filhos nos braços. Tudo tinha de ir decorrendo contornando as dificuldades que surgiam.

A necessidade de pensar em começar a preparar o terreno da minha investigação levou-me a falar com o Prof. Tiago de Oliveira que tinha sido meu professor em História do Pensamento Matemático. Aceitou de imediato orientar o meu trabalho de investigação para doutoramento e como pontapé de “entrada” na área de Extremos o Prof. Tiago de Oliveira sugeriu-me assistir ao congresso da '*NATO Advanced Statistical Institute on Statistical Extremes and Applications (SEA)*'. Este congresso decorreu no Vimeiro durante 15 dias do mês de setembro de 1983. Tiago de Oliveira, Ivette Gomes e Feridun Turkman foram os organizadores deste congresso de “referência” na história da Estatística de Extremos não só em Portugal, mas além-fronteiras. De facto, a organização deste encontro constitui o marco de lançamento do que a Ivette designou por PORTSEA (do Inglês '*Portuguese School of Extremes and Applications*').

Estava a iniciar-me nesta área e recorro a impressão e a admiração que me provocaram tantas palestras, de que avidamente tentava tirar notas. Só mais tarde constatei a importância e o relevo que tinham na área muitos autores daquelas palestras.

Trinta anos mais tarde, de novo no Vimeiro em setembro de 2013, tive o privilégio de, conjuntamente com a Antónia Turkman e a Isabel Fraga Alves, integrar a Comissão Organizadora do workshop “Extremes in Vimeiro Today (EVT2013)”. Alguns dos grandes nomes que participaram no SEA (1983) estiveram presentes e abrilhantaram uma vez mais este workshop.

Voltando ao início do meu percurso no “mar de extremos”, o Prof. Tiago de Oliveira deu-me a tese de Peter Kubat “*Simplified Estimation Procedures Based on Order Statistics*”(1975), assim como o artigo, também de Kubat, “*Simple Large Sample Estimators Scale and Location Parameters based on Blocks of Order Statistics*” (1982), apresentando-me como sugestão para trabalho investigar o problema da estimação por blocos dos parâmetros da distribuição de Fréchet.

No entanto a investigação, o ensino e a vida familiar eram difíceis de conjugar. Sentia progressos, paragens, até parecia retrocessos, nas várias conversas com o Prof. Tiago de Oliveira. Um dia fui encontrar-me com o Prof. Tiago de Oliveira e esperava-o sentada nas escadas do Observatório na Rua da Escola Politécnica, onde ele tinha o seu gabinete. O cansaço em que andava era muito, aliado a algum desânimo porque sentia que não estava a corresponder ao que o Prof. Tiago esperava que fizesse e comecei a escrever-lhe uma mensagem para lhe deixar sob a porta do gabinete (não havia emails nem SMS na altura). Basicamente dizia que não conseguia dar assistência aos meninos, fazer investigação e ensinar e por isso ia desistir de continuar a preparação do meu doutoramento. Mal tinha começado a escrever apareceu o Prof. Tiago a quem falei nas minhas dificuldades, mas fui logo interrompida dizendo-me “não há problema Manuela, marcamos reuniões de trabalho quando lhe for possível em termos familiares...”. Ficou por escrever o que tinha pensado e lá continuei... tropeçando, levantando-me, mas aprendi algo que me marcou para a vida. Sempre que ia ter com ele para lhe

apresentar os meus “progressos” e as minhas dúvidas (e muitas vezes não eram nenhuns... como se pode ter dúvidas quando não se estuda e trabalham os assuntos? – até é isso que dizemos aos nossos alunos...) o Prof. Tiago dizia-me sempre “muito bem Manuela, vamos a isto, vamos continuar...”. O Prof. Tiago teve sempre uma palavra de encorajamento para o meu trabalho.

Em 1987 estive 1 mês em Berna a trabalhar com o Prof. Juerg Huesler que teve a gentileza de me receber na Universidade de Berna. Foi uma experiência muito interessante e enriquecedora, apesar de apertarem muito as saudades dos meus filhos.

A minha tese de doutoramento intitulou-se “*Estimação por blocos dos parâmetros da distribuição de Fréchet: comparação de métodos expeditos.*” Desenvolvida em contexto paramétrico, associei a alguns resultados metodológicos no estudo da distribuição de Fréchet um intenso trabalho de simulação comparando o desempenho de vários estimadores dos parâmetros. A minha tese foi apresentada e discutida em 1990 na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa e o júri foi constituído pelos professores Tiago de Oliveira, Pedro Braumann, Margarida Brito, Juerg Huesler e Maria de Fátima Fontes de Sousa. Fui a última aluna a terminar doutoramento sob orientação do Prof. Tiago de Oliveira que faleceu prematuramente em 1992. Na altura orientava também as colegas Isabel Barão e Teresa Themido, que terminaram as suas teses de doutoramento sob a orientação da Ivette Gomes.

A minha primeira aluna de doutoramento na área de Teoria dos Valores Extremos foi a minha colega do ISA, M. João Martins, orientada pela Ivette Gomes e por mim, discutiu a sua tese de doutoramento intitulada “*Estimação de Caudas Pesadas - variantes ao estimador de Hill*” na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa em 2001. Em 2008, orientada por mim e pelo Prof. João Tiago Mexia, a Dora Prata Gomes discutiu, na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova, a sua tese de doutoramento intitulada “*Métodos computacionais na estimação pontual e intervalar do índice extremal*”. Depois de algumas orientações de teses de doutoramento noutras áreas laterais à Teoria de Valores Extremos, em 2017, com orientação conjunta minha, da Ivette Gomes e da Sandra Nunes, a Helena Penalva discutiu, no Instituto Superior de Agronomia, a sua tese de doutoramento intitulada “*Contributos Computacionais e Metodológicos na Estimação do índice de Valores Extremos*”. Temos em mãos a continuação de alguns procedimentos deixados em aberto nessa tese.

Sobre a Escola de Extremos em Portugal têm sido recentemente escritos excelentes textos e apresentadas brilhantes palestras pela Ivette Gomes. Muito pouco poderia acrescentar ao que tem sido dito.

Foi meu objetivo deixar o testemunho breve de aspetos mais desconhecidos da minha “navegação” neste “mar”.



# Teoria de Valores Extremos em Sistemas Dinâmicos

Ana Cristina Moreira Freitas \*, *amoreira@fep.up.pt*

Jorge Milhazes Freitas \*\*, *jmfreita@fc.up.pt*

\* *Centro de Matemática & Faculdade de Economia da Universidade do Porto*

\*\* *Centro de Matemática & Faculdade de Ciências da Universidade do Porto*

## 1. INTRODUÇÃO

O estudo de Sistemas Dinâmicos, cuja origem é geralmente associada à obra de Poincaré do final do século XIX sobre mecânica celeste, tem como principal objectivo descrever qualitativamente o comportamento assintótico das trajectórias (ou órbitas) do sistema. Um dos marcos da evolução da área prende-se com o surgimento de sistemas caóticos, decorrentes do trabalho de Lorenz, na década de 60 do século XX, que ao estudar um modelo de correntes de convecção atmosférica, tropeçou num atractor com uma estrutura geométrica complexa responsável pela aparecimento do chamado *efeito borboleta*, que metaforicamente pretende explicar o conceito mais formalmente conhecido como *sensibilidade às condições iniciais*. Com efeito, para estes sistemas, uma pequena perturbação das condições iniciais, que, na famosa metáfora, pode ser tão singela como um bater de asas de uma borboleta no Brasil, pode induzir uma evolução inesperada da trajectória do sistema, que eventualmente se materialize na formação de um tornado no Texas.

A imprevisibilidade do comportamento das órbitas dos sistemas caóticos, trouxe atenção especial para ferramentas de Probabilidade e Estatística para descrever o comportamento errático de tais sistemas. Em particular, a existência de leis limite para o comportamento médio de observações temporais destes sistemas impulsionou o desenvolvimento da Teoria Ergódica nas décadas que se seguiram. No artigo pioneiro [13], Collet introduz a temática de Leis de Valores Extremos no contexto de sistemas dinâmicos. O facto de os sistemas caóticos providenciarem modelos simples para descrever fenómenos meteorológicos despertou também a atenção de investigadores da área de meteorologia, o que motivou o desenvolvimento exponencial do estudo de acontecimentos extremos para dinâmica caótica. Mencionamos, em particular, a seguinte série inicial de artigos sobre o assunto: [23, 24, 58, 29, 30, 36, 39, 31, 32, 41, 17, 18, 49, 44, 3, 15].

Entre estes, destacamos o artigo [29], que estabeleceu uma relação de equivalência entre a existência de Leis de Valores Extremos para o limite distribucional do máximo parcial de processos estocásticos gerados pelos sistemas e a existência de leis limite para estatísticas do tempo entrada em determinadas regiões do espaço de fase. A ideia subjacente prende-se com o facto de que considerando uma função observável avaliada ao longo das órbitas dos sistemas, então a ocorrência de observações extremas correspondem à entrada da órbita na vizinhança do conjunto onde a função observável é maximizada. Esta relação entre o estudo de Leis de Valores Extremos e recorrência quantitativa a pequenas regiões do espaço de fase catapultou o interesse da comunidade de dinamicistas e o consequente desenvolvimento do tema, que está documentado no livro [48], que indicamos como referência principal para uma introdução a esta linha de investigação de extremos em sistemas dinâmicos.

Esta ligação entre Teoria de Valores Extremos e Sistemas Dinâmicos potencia uma efervescente fonte de investigação e alargamento de horizontes, em que, em particular, os processos estocásticos gerados dinamicamente substanciam uma nova classe de exemplos e campo de aplicações para a clássica Teoria de Valores Extremos, assim como a análise do comportamento extremal dos sistemas providencia informação estrutural sobre os próprios sistemas e os atractores que os suportam. Nesta rica panóplia

de conexões, mencionamos, por exemplo, a relação entre a ocorrência de *clustering* de observações extremas e o comportamento periódico (veja-se [31]), sendo que, por exemplo, o índice extremal, um parâmetro que quantifica a intensidade de clustering e para o qual existem vários estimadores já muito estudados em Teoria de Valores Extremos, permite avaliar a dimensão fractal e a compatibilidade dinâmica com conjuntos invariantes (veja-se [27, 8, 9]) ou obter estimativas alternativas para o expoente Lyapunov e entropia dos sistemas, que caracterizam o grau de desordem dos mesmos (veja-se [16, 6]).

O estudo sobre a existência de leis de valores extremos para sistemas dinâmicos caóticos assenta na capacidade de se usar as boas propriedades de mistura dos sistemas, que permitem descrever a perda de memória dos processos estocásticos gerados dinamicamente, restaurando a independência assintótica tão necessária para provar a existência de leis limite. Nesse sentido, foi necessário desenvolver condições especialmente adaptadas ao contexto de sistemas dinâmicos e que permitissem lidar quer com a estrutura de dependência a longo prazo, quer a curto prazo, particularmente na ocorrência de *clustering*. Isto permitiu a aplicação primeira a sistemas uniformemente expansores (sistemas com boas propriedades de mistura) e, posteriormente, usando outro tipo de técnicas, nomeadamente, a construção de sistemas induzidos, alargou-se o âmbito de aplicação a sistemas não-uniformemente expansores.

Neste artigo, faremos uma revisão sobre os desenvolvimentos na área de Leis de Valores Extremos para Sistemas Dinâmicos, focando nas técnicas desenvolvidas para lidar com a informação de mistura advinda de taxas de decaimento de correlações, incorporando a possibilidade de ocorrência de *clustering*, e no alargamento do âmbito de aplicação através da utilização de sistemas induzidos.

## 2. COMPORTAMENTO EXTREMAL DE SISTEMAS CAÓTICOS

O principal objetivo deste trabalho é estudar a convergência de Processos Pontuais de Acontecimentos Raros (PPAR) associados a processos estocásticos estacionários gerados por sistemas dinâmicos caóticos. Ou seja, consideramos um sistema dinâmico determinístico de tempo discreto  $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \mathbb{P}, T)$ , onde  $\mathcal{X}$  é uma variedade compacta,  $\mathcal{B}$  é a sua  $\sigma$ -álgebra de Borel,  $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  é uma aplicação mensurável e  $\mathbb{P}$  é uma medida de probabilidade  $T$ -invariante, *i.e.*,

$$\mathbb{P}(T^{-1}(B)) = \mathbb{P}(B), \quad \text{para todo } B \in \mathcal{B}.$$

Podemos pensar que  $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  é a lei de evolução que estabelece como o tempo actua, determinando as transições de um estado em  $\mathcal{X}$  para outro. Consideremos uma função observável (mensurável)  $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  e definamos o processo estocástico  $X_0, X_1, \dots$  por:

$$X_n = \varphi \circ T^n, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.1)$$

onde  $T^n$  denota a composição  $n$  de  $T$ , com a convenção de que  $T^0$  é a identidade em  $\mathcal{X}$  e  $\mathbb{N}_0$  é o conjunto de inteiros não negativos.

Dizemos que um processo assim definido é um processo estocástico gerado pelo sistema dinâmico  $T$ . Observe-se que o facto de  $\mathbb{P}$  ser  $T$ -invariante implica que o processo  $X_0, X_1, \dots$  definido por (2.1) é estacionário, *i.e.*, a distribuição conjunta de  $X_{i_0}, X_{i_1}, \dots, X_{i_n}$  coincide com a de  $X_{i_1+j}, X_{i_2+j}, \dots, X_{i_n+j}$ , que consiste numa translacção temporal das primeiras variáveis aleatórias, sendo que esta igualdade acontece para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , o conjunto de índices naturais  $i_1 < i_2 < \dots < i_n$ , e para toda a deslocação temporal  $j \in \mathbb{N}$ .

Uma das primeiras questões no estudo de Teoria de Valores Extremos prende-se com a existência de um limite distribucional para o máximo parcial do processo estocástico  $X_0, X_1, \dots$ , *i.e.*,

$$M_n = \max\{X_0, \dots, X_{n-1}\},$$

quando devidamente normalizado por uma sequência de níveis  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  que satisfaz a condição:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\mathbb{P}(X_0 > u_n) = \tau, \quad (2.2)$$

para algum  $\tau > 0$ . Note-se que de acordo com (2.2), a frequência média de excedências do nível  $u_n$  entre as  $n$  primeiras observações é assintoticamente constante igual a  $\tau$ . Observe que isso, em particular, implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \sup\{x \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(X_0 \leq x) < 1\}.$$

Seja  $E = [0, \infty)$ . Dizemos que  $m$  é uma *medida pontual* em  $E$  se  $m = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{x_i}$ , onde  $\delta_{x_i}$  denota a medida de Dirac suportada em  $x_i \in E$ . Dizemos que  $m$  é *simples* se todos os  $x_i$  são distintos e que  $m$  é *Radon* se  $m(K) < \infty$  para todo o compacto  $K \subset E$ . Considere o espaço  $M_p(E)$  de todas as medidas pontuais de Radon definidas em  $E$ , equipado com a topologia vaga. Um *processo pontual* em  $E$  consiste apenas num elemento aleatório em  $M_p(E)$ . Estaremos particularmente interessados no seguinte processo pontual:

$$N_n = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_{\frac{i}{n}} \mathbb{1}_{\{X_i > u_n\}}. \quad (2.3)$$

Observe-se que  $N_n([0, 1))$  conta o número de excedências entre as primeiras  $n$  observações do processo. Além disso, por (2.2), para qualquer intervalo  $J \subset E$ , temos que  $\mathbb{E}(N_n(J)) \rightarrow \tau|J|$ , onde  $|J|$  denota medida de Lebesgue de  $J$ .

Pretendemos estudar a convergência fraca de  $N_n$ . Um processo pontual  $N$  em  $E$  é o limite fraco de  $N_n$  se para qualquer número finito de intervalos da forma  $J_\ell = [a_\ell, b_\ell)$ , com  $\ell = 1, \dots, \varsigma$ , tivermos que o vector aleatório  $(N_n(J_1), \dots, N_n(J_\varsigma))$  converge em distribuição para  $(N(J_1), \dots, N(J_\varsigma))$  (ver [43]).

A ocorrência de *clustering* de excedências é responsável pela aglomeração temporal de observações extremas em grupos designados por *clusters*. A normalização utilizada na definição de  $N_n$  (correspondente à divisão por  $n$ ) provoca uma contracção no tempo responsável por fazer colapsar as excedências em cada *cluster* num único átomo do processo limite, que adquire uma multiplicidade correspondente ao tamanho do respectivo *cluster*. Efectivamente, veremos que sob certas condições o limite fraco de  $N_n$  é um processo de Poisson composto, que pode ser descrito da seguinte forma. Seja  $W_1, W_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (iid), com distribuição exponencial de média  $1/\eta > 0$ , i.e.,  $W_i \sim \text{Exp}(\eta)$ . Seja  $T_i = \sum_{j=1}^i W_j$  e  $D_1, D_2, \dots$  uma sequência de variáveis aleatórias iid tomando apenas valores inteiros positivos, independente de  $T_1, T_2, \dots$ . Então

$$N = \sum_{i=1}^{\infty} D_i \delta_{T_i}.$$

Normalmente,  $T_i$  corresponde ao tempo de aparecimento do  $i$ -ésimo cluster e  $D_i$  o respectivo tamanho. Dizemos que  $N$  é um processo de Poisson composto com intensidade  $\eta$  e distribuição de multiplicidade dada por  $\pi(\kappa) = \mathbb{P}(D_1 = \kappa)$ .

Observe-se que na ausência de *clustering*, que corresponde ao caso em que as excedências aparecem dispersas na linha do tempo, então  $\pi(1) = 1$  e o processo limite é um processo de Poisson homogéneo.

A convergência fraca de  $N_n$  fornece muitas informações sobre o comportamento limite das estatísticas de ordem de uma amostra finita de  $X_0, X_1, \dots$ . Em particular, temos que  $\{M_n \leq u_n\} = \{N_n([0, 1)) = 0\}$ . Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(M_n \leq u_n) = \mathbb{P}(N([0, 1)) = 0).$$

Quando temos um processo de Poisson composto no limite, então  $\mathbb{P}(N([0, 1)) = 0) = \mathbb{P}(W_1 > 1) = e^{-\eta}$ . Como na maioria das situações  $\mathbb{E}(N_n([0, 1))) = \tau$  então  $\eta = \tau/\mathbb{E}(D_1)$ . Isso motiva a seguinte definição.

**Definição 2.1.** Considere uma sequência  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que (2.2) é verificada. Dizemos que temos um Índice Extremal (IE)  $0 \leq \theta \leq 1$  se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(M_n \leq u_n) = e^{-\theta\tau}$ .

Normalmente, temos que  $\theta^{-1} = \mathbb{E}(D_1)$  e o IE é o inverso do tamanho médio dos clusters, podendo então ser interpretado como uma medida da intensidade do clustering, de modo que  $\theta = 1$  significa a ausência de clustering. No entanto, nalguns casos, em que se permite que haja escape de massa, esta identidade pode não valer (veja-se por exemplo [56, 1]).

**2.1. Clustering de eventos raros.** No caso em que  $X_0, X_1, \dots$  é um processo estocástico de variáveis aleatórias iid esperamos que as excedências apareçam espalhadas ao longo da linha do tempo. Quando as variáveis aleatórias do processo não são independentes então pode haver uma tendência das excedências aparecerem concentradas em grupos (clusters). Identificar os clusters torna-se um problema porque às vezes não é claro se uma determinada excedência está suficientemente próxima (no tempo) de outras para ser classificada como pertencente ao mesmo cluster.

Existem dois métodos principais para identificar clusters. Um é chamado de *método dos blocos* e o outro é o *método de observações sucessivas* (veja-se [57, 21]). O método dos blocos divide as  $n$  observações em  $k_n$  (ou  $k_n + 1$ ) blocos de comprimento  $\lfloor n/k_n \rfloor$  e estabelece que quaisquer acontecimentos extremos dentro do mesmo bloco pertencem ao mesmo cluster. O método de observações sucessivas consiste em definir um comprimento de separação,  $q$ , e estabelecer que quaisquer acontecimentos raros separados no máximo por  $q - 1$  observações não extremas devem pertencer ao mesmo cluster, de modo que entre dois clusters distintos deve ocorrer uma série de pelo menos  $q$  observações não extremas sucessivas.

Vamos assumir uma abordagem baseada no método de observações sucessivas e, portanto, vamos considerar que existe  $q \in \mathbb{N}$  fixo que será o tempo máximo de espera entre a ocorrência de dois acontecimentos extremos no mesmo cluster. Nas aplicações, para provar a convergência dos processos pontuais, consideraremos uma condição na estrutura de dependência do processo estocástico chamada  $\mathcal{D}'_q(u_n)^*$  (veja-se a Secção 2.2), que, quando satisfeita, implica que os dois métodos essencialmente produzem a mesma identificação de clusters (veja-se a Nota 2.2).

A escolha do comprimento de separação  $q$  é bastante sensível e retornaremos a este assunto na Secção 2.2 quando introduzirmos e discutirmos a condição  $\mathcal{D}'_q(u_n)^*$ . Entretanto, prosseguimos com a interpretação do valor  $q$ . Em [31], introduzimos o IE no cenário dinâmico e estabelecemos uma relação entre o aparecimento de clustering e a existência de fenómenos periódicos subjacentes na estrutura do processo estocástico. De facto, no contexto dinâmico, conforme observado em [31] e nos artigos subsequentes [4, 5, 22], o clustering está diretamente relacionado com a periodicidade do conjunto maximal  $\mathcal{M}$ , ou seja, o conjunto de pontos onde o observável  $\varphi$  atinge o máximo global. Assim,  $q$  pode ser interpretado como o maior dos períodos dos fenómenos periódicos subjacentes presentes no processo estocástico.

Tendo fixado um comprimento de separação  $q \in \mathbb{N}$ , definimos a sequência de conjuntos encaixados  $(U^{(\kappa)}(u_n))_{\kappa \geq 0}$  de  $\mathcal{B}^{\mathbb{N}_0}$  dada por:

$$\begin{aligned} U^{(0)}(u_n) &= \{X_0 > u_n\} \\ Q_q^{(0)}(u_n) &= \{X_0 > u_n, X_1 \leq u_n, \dots, X_q \leq u_n\} \end{aligned}$$

e para  $\kappa \in \mathbb{N}$ ,

$$U^{(\kappa)}(u_n) = U^{(\kappa-1)}(u_n) \setminus Q_q^{(\kappa-1)}(u_n) \tag{2.4}$$

$$Q_q^{(\kappa)}(u_n) := U^{(\kappa)}(u_n) \cap \bigcap_{i=1}^q T^{-i} ((U^{(\kappa)}(u_n))^c) \tag{2.5}$$

$$U^{(\infty)}(u_n) = \bigcap_{\kappa \geq 0} U^{(\kappa)}(u_n). \tag{2.6}$$

Observe-se que  $U^{(\kappa-1)}(u_n)$  corresponde a observar uma excedência de  $u_n$  no tempo 0 seguida de pelo menos  $\kappa - 1$  excedências separadas entre si no máximo por  $q$  unidades de tempo. O acontecimento

$Q_q^{(\kappa-1)}(u_n) = U^{(\kappa-1)}(u_n) \setminus U^{(\kappa)}(u_n)$  corresponde a observar exactamente  $\kappa$  excedências (incluindo a que ocorre no instante 0), que estão separadas entre si no máximo por  $q$  unidades de tempo. Isso significa, em particular, que a  $(\kappa+1)$ -ésima excedência ocorre pelo menos  $q+1$  iterações após a  $\kappa$ -ésima excedência. O acontecimento  $U^{(\infty)}(u_n)$  corresponde à ocorrência de uma excedência, que é seguida por uma sequência infinita de excedências separadas entre si no máximo por  $q$  unidades de tempo.

**2.2. Convergência de processos pontuais.** Para obter a convergência dos processos pontuais introduzidos acima, usaremos duas condições na estrutura de dependência do processo estocástico original  $X_0, X_1, \dots$ . A primeira condição, introduzida em [32] e motivada pela condição  $D$  de Leadbetter, é uma espécie de condição de mistura especialmente desenhada para aplicação a processos estocásticos gerados dinamicamente.

**Condição  $(\mathbb{D}_q(u_n))^*$ .** Dizemos que  $\mathbb{D}_q(u_n)^*$  se verifica para a sequência  $X_0, X_1, \dots$  se para quaisquer inteiros  $t, \kappa_1, \dots, \kappa_\zeta, n$  e quaisquer intervalos da forma  $I_j = [a_j, b_j)$  com  $a_{j+1} \geq b_j$  para todo  $j = 1, \dots, \zeta - 1$  e tal que  $a_1 \geq t$ ,

$$\left| \mathbb{P} \left( Q_q^{(\kappa_1)}(u_n) \cap \left( \bigcap_{j=2}^{\zeta} N_n(I_j) = \kappa_j \right) \right) - \mathbb{P} \left( Q_q^{(\kappa_1)}(u_n) \right) \mathbb{P} \left( \bigcap_{j=2}^{\zeta} N_n(I_j) = \kappa_j \right) \right| \leq \gamma(q, n, t),$$

onde, para cada  $n$ , temos que  $\gamma(q, n, t)$  é não crescente em  $t$  e  $n\gamma(q, n, t_n) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , para alguma sequência  $t_n = o(n)$ .

A condição  $\mathbb{D}_q(u_n)^*$  pode ser facilmente verificada para sistemas dinâmicos com decaimento suficientemente rápido de correlações (veja-se [35, Seção 5.1]).

Para  $q \in \mathbb{N}_0$  fixo, considere a sequência  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , dada pela condição  $\mathbb{D}_q(u_n)^*$  e seja  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  outra sequência de inteiros tal que

$$k_n \rightarrow \infty \quad \text{e} \quad k_n t_n = o(n). \quad (2.7)$$

**Condição  $(\mathbb{D}'_q(u_n))^*$ .** Dizemos que  $\mathbb{D}'_q(u_n)^*$  se verifica para a sequência  $X_0, X_1, X_2, \dots$  se existir uma sequência  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  que satisfaça (2.7) e tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{j=q+1}^{\lfloor n/k_n \rfloor - 1} \mathbb{P} \left( Q_q^{(0)}(u_n) \cap T^{-j}(U^{(0)}(u_n)) \right) = 0. \quad (2.8)$$

Observe-se que a condição  $\mathbb{D}'_q(u_n)^*$  corresponde à condição  $D^{(q+1)}(u_n)$  na formulação de [12, Equação (1.2)].

*Nota 2.2.* Note-se que a condição  $\mathbb{D}'_q(u_n)^*$  proíbe (ou torna muito improvável) o aparecimento de dois clusters num período de tempo muito curto (ou seja, dentro de um bloco de tamanho  $\lfloor n/k_n \rfloor$ ), o que significa que os dois métodos identificam clusters essencialmente da mesma maneira. Além disso, num certo sentido, podemos dizer que o tempo de separação  $q$  inibe a possibilidade de os fenómenos periódicos subjacentes criarem uma nova excedência que deveria ser classificada como pertencente ao mesmo cluster da excedência anterior.

*Nota 2.3.* Observe-se que se a condição  $\mathbb{D}'_{q_0}(u_n)^*$  se verificar para algum  $q_0 \in \mathbb{N}_0$  particular, então a condição  $\mathbb{D}'_q(u_n)^*$  verifica-se para todo  $q \geq q_0$ . Isso sugere que, ao tentar provar-se a convergência de PPAR, deve-se tentar os valores  $q = q_0$  até encontrar o menor que faça  $\mathbb{D}'_q(u_n)^*$  valer, estabelecendo-se, desta forma, o comprimento de separação. No contexto dinâmico, o seguinte procedimento mostrou-se muito útil para encontrar o valor de  $q$  (veja-se [4]). Seja  $x \in M$  e lembre-se a definição do primeiro tempo de entrada para  $A \in \mathcal{B}$ ,

$$r_A(x) = \min \{ j \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\} : T^j(x) \in A \}. \quad (2.9)$$

A restrição da função  $r_A$  a  $A$  é chamada de função de primeiro tempo de retorno a  $A$ . Definimos o primeiro tempo universal de retorno a  $A$ , que denotamos por  $R(A)$ , como o ínfimo da função de tempo de primeiro retorno a  $A$ , ou seja, o inteiro não negativo

$$R(A) = \inf_{x \in A} r_A(x). \quad (2.10)$$

Suponhamos que existe  $q \in \mathbb{N}_0$  tal que

$$q := \min \left\{ j \in \mathbb{N}_0 : \lim_{n \rightarrow \infty} R(Q_q^{(j)}(u_n)) = \infty \right\}. \quad (2.11)$$

Então tal  $q$  é o candidato natural para tentar mostrar a validade de  $\mathbb{D}'_q(u_n)^*$ .

Vamos definir, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\theta_n = \frac{\mathbb{P}(Q_q^{(0)}(u_n))}{\mathbb{P}(U^{(0)}(u_n))}, \quad (2.12)$$

que mede a proporção de excedências de  $u_n$  que não produzem outra excedência no mesmo cluster. Se existir  $0 \leq \theta \leq 1$  tal que  $\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n$ , então sob as condições  $\mathbb{D}_q(u_n)^*$  e  $\mathbb{D}'_q(u_n)^*$  temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(M_n \leq u_n) = e^{-\theta\tau}$  (veja-se [31, 33]), o que significa que  $\theta$  é o IE. Esta fórmula para o IE apareceu no trabalho de O'Brien [53].

A partir do estudo desenvolvido em [32] podemos enunciar o seguinte resultado que se aplica a processos estocásticos estacionários gerais. Uma prova completa deste resultado pode ser vista em [25].

**Teorema 2.4** ([32, 25]). *Suponha que  $X_0, X_1, \dots$  satisfaz as condições  $\mathbb{D}_q(u_n)^*$  e  $\mathbb{D}'_q(u_n)^*$ , em que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é tal que a condição (2.2) é satisfeita. Assuma que  $\theta = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n$  existe, onde  $\theta_n$  é dado por (2.12) e, para além disso, para cada  $\kappa \in \mathbb{N}$ , o seguinte limite também existe*

$$\pi(\kappa) := \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n(\kappa) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( \mathbb{P}(Q_q^{(\kappa-1)}(u_n)) - \mathbb{P}(Q_q^{(\kappa)}(u_n)) \right)}{\mathbb{P}(Q_q^{(0)}(u_n))}. \quad (2.13)$$

Então o PPAR  $N_n$  converge em distribuição para um processo de Poisson composto com intensidade  $\theta\tau$  e distribuição de multiplicidade  $\pi$  dada por (2.13).

A fórmula (2.13) decorre do [32, Corolário 2.4], como observado em [3, Apêndice B], nomeadamente na [3, fórmula (B.2)]. Veja-se também [37, Theorem 2].

### 2.3. Aplicação a sistema uniformemente expansor com decaimento de correlações exponencial.

Considere-se o sistema dinâmico em tempo discreto  $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  dado por  $T(x) = 2x \pmod{1}$ , equipado com a medida de Lebesgue nos subconjuntos boreleanos de  $[0, 1]$ , onde identificamos os bordos  $0 \sim 1$  de modo que podemos pensar que  $T$  está definida na circunferência.

Seja  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  tal que

$$\varphi(x) = -\log|x - 1/3|.$$

Defina-se  $X_0, X_1, \dots$  por  $X_n = \varphi \circ T^n$ , como em (2.1).

Este exemplo particular foi estudado em [48, Example 4.2.1]. Observe-se que  $\{X_0 > u\} = (1/3 - e^{-u}, 1/3 + e^{-u})$  e  $\zeta = 1/3$  é um ponto periódico repulsor de período 2, pois  $T(\zeta) = 2/3$  e  $T^2(\zeta) = 1/3 = \zeta$ . Isso significa que, se a órbita começar muito perto de  $1/3$ , observaremos uma sequência de excedências separada entre si por duas unidades de tempo, até que a órbita deixe o conjunto  $(1/3 - e^{-u}, 1/3 + e^{-u})$ , de modo que temos que esperar muito tempo (porque estamos assumindo que  $u$  é grande) até que o sistema a traga de volta para aquele conjunto para se observar um novo cluster de excedências. Neste caso, é claro que se deve tomar  $q = 2$ .

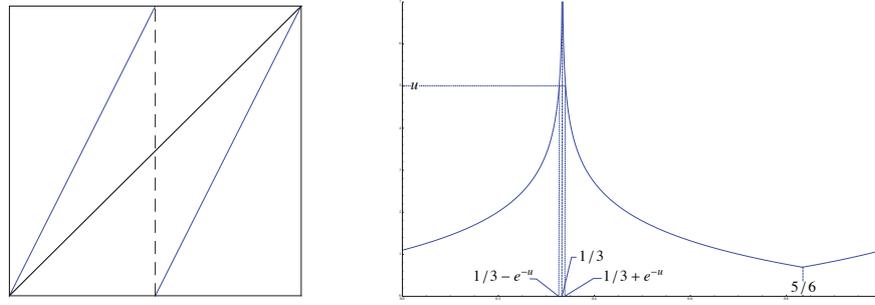


FIGURA 21. Gráficos do sistema  $T(x) = 2x \pmod{1}$  e da identidade (à esquerda) e da função observável  $\varphi$  (à direita).

Tomemos  $u_n = -\log \tau + \log(2n)$  de modo que  $\mu(X_0 > u_n) = \tau/n$ . Observe-se que  $U^{(0)}(u_n) = (1/3 - 1/2n, 1/3 + 1/2n)$  e para  $\kappa \in \mathbb{N}_0$  temos

$$Q_q^{(\kappa)}(u_n) = \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4^\kappa} \frac{\tau}{2n}, \frac{1}{3} - \frac{1}{4^{\kappa+1}} \frac{\tau}{2n} \right) \cup \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4^{\kappa+1}} \frac{\tau}{2n}, \frac{1}{3} + \frac{1}{4^\kappa} \frac{\tau}{2n} \right) \Rightarrow \mu(Q_q^{(\kappa)}(u_n)) = \frac{1}{4^\kappa} \frac{3\tau}{4n}.$$

Segue que

$$\theta_n = \frac{3\tau/4n}{\tau/n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 3/4 = \theta \quad \text{e} \quad \pi_n(\kappa) = \frac{\frac{1}{4^{\kappa-1}} \frac{3\tau}{4n} - \frac{1}{4^\kappa} \frac{3\tau}{4n}}{\frac{3\tau}{4n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4^{\kappa-1}} \frac{3}{4} = \pi(\kappa).$$

Note-se que  $\sum_{\kappa \geq 1} \kappa \pi(\kappa) = 4/3 = \theta^{-1}$ .

A convergência do PPAR para um processo de Poisson composto com distribuição de multiplicidade geométrica é assegurada pela validade das condições  $\mathcal{D}_q(u_n)^*$  e  $\mathcal{D}'_q(u_n)^*$ , que decorre do facto do sistema ter decaimento de correlações contra  $L^1$  (veja-se [48, Capítulo 4] para mais detalhes).

### 3. APLICAÇÕES A SISTEMAS DE MISTURA LENTA E NOVOS DESENVOLVIMENTOS

A aplicação do Teorema 2.4 no contexto de sistemas dinâmicos depende de forma crucial da verificação das condições  $\mathcal{D}_q(u_n)^*$  e  $\mathcal{D}'_q(u_n)^*$ . A condição  $\mathcal{D}_q(u_n)^*$ , que é mais fraca do que as condições semelhantes da teoria clássica, como a condição  $D(u_n)$  de Leadbetter, está especialmente desenhada para ser facilmente verificada a partir de taxas de decaimento de correlações possivelmente lentas (como decaimento polinomial), o que não é possível fazer-se com a condição  $D(u_n)$ . Veja-se a discussão sobre o assunto em [48, Secção 4.4]. Isto significa que há um vasto leque de sistemas e observáveis para os quais é possível verificá-la muito rapidamente. No entanto, a condição  $\mathcal{D}'_q(u_n)^*$  impõe uma análise da dinâmica local perto do conjunto onde o observável é maximizado. Isto significa que, *a priori*, a sua verificação prende-se com uma análise casuística dos sistemas. No entanto, se os sistemas tiverem excelentes propriedades de mistura (decaimento de correlações exponencial contra funções em  $L^1$  – veja-se [2] para uma definição precisa) é possível verificar a condição  $\mathcal{D}'_q(u_n)^*$  de forma bastante universal entre a classe de funções observáveis usadas para definir os processos estocásticos. Porém, isto impõe limitações sérias ao universo de sistemas aos quais se pode aplicar o Teorema 2.4 de forma directa, ficando-se essencialmente reduzido a sistemas uniformemente expansores, que têm excelentes propriedades de mistura.

Existe uma técnica que passa pela construção de sistemas induzidos e que permite alargar drasticamente o espectro de sistemas para os quais se consegue obter a convergência de PPAR. A ideia, introduzida inicialmente em [7], aprimorada em [38] e generalizada para PPAR em [34], passa por se considerar uma região do espaço de fase afastada das possíveis fontes problemáticas (por exemplo, pontos críticos ou pontos singulares) e considerar o sistema induzido consistindo na aplicação de primeiro retorno a esta região “boa” do espaço de fase. Acontece que muitos sistemas não uniformemente expansores

ou hiperbólicos admitem sistemas induzidos que são uniformemente expansores ou hiperbólicos. A estratégia passa então por demonstrar que se para um sistema induzido é possível mostrar a convergência de PPAR então a mesma conclusão pode ser tirada para o sistema original.

Nesta secção, denotamos um sistema dinâmico por  $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ , que admitimos que possui uma medida de probabilidade  $f$ -invariante e ergódica que denotamos por  $\mu$ . Seja  $\varphi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função observável (mensurável).

Considere-se um conjunto mensurável  $Y \subset \mathcal{X}$ , e considere-se o primeiro tempo de entrada em  $Y$ , como anteriormente,  $r_Y: Y \rightarrow \mathbb{N}$ . Defina-se a aplicação de primeiro retorno a  $Y$ , denotada por  $F_Y: Y \rightarrow Y$ , que é tal que:

$$F_Y(x) = f^{r_Y(x)}(x).$$

Observe-se que  $r_Y$  e consequentemente  $F$  podem não estar definidos num conjunto de medida nula de pontos que nunca retornam a  $Y$ . Seja  $\mu_Y(\cdot) = \frac{\mu(\cdot \cap Y)}{\mu(Y)}$  a medida condicional a  $Y$ . Pelo Teorema de Kac,  $\mu_Y$  é  $F_Y$ -invariant.

Definimos o processo estocástico induzido,  $X_0^Y, X_1^Y, \dots$  por:

$$X_i^Y = \varphi \circ F_Y^i.$$

Agora definimos o PPAR induzido como:

$$N_n^Y = \sum_{i=0}^{\infty} \delta_{\frac{i}{\mu(Y)^n}} \mathbb{1}_{\{X_i^Y > u_n\}}.$$

Seja  $\mathcal{S}$  o semi-anel dos intervalos semi-abertos à direita de  $\mathbb{R}_0^+$  e  $\mathcal{R}$  o anel gerado por este. Para  $I \in \mathcal{S}$ , defina-se  $I^\eta := \cup_{s \in I} B_\eta^+(s)$ , onde  $B_\eta^+(s) = (s - \eta, s + \eta) \cap [0, \infty)$ . Para  $J \in \mathcal{R}$  tal que  $J = \cup_{j=1}^\ell I_j$ , defina-se  $J^\eta = \cup_{j=1}^\ell I_j^\eta$ .

**Teorema 3.1.** *Para todo  $J \in \mathcal{R}$ , assumamos que  $N(J^\eta)$  é contínua em  $\eta$ , para todo  $\eta$  pequeno. Isto é o mesmo que dizer que se  $J = \cup_{j=1}^\ell I_j$ , então para todo  $k_1, \dots, k_\ell \in \mathbb{N}_0$ , a aplicação  $\eta \mapsto \mu_Y(N(I_1^\eta) \geq k_1, \dots, N(I_\ell^\eta) \geq k_\ell)$  é contínua para  $\eta \in [0, \eta_0)$ , para algum  $\eta_0 > 0$ . Então*

$$N_n^Y \xrightarrow{\mu_Y} N \text{ as } n \rightarrow \infty \text{ implica que } N_n \xrightarrow{\mu} N \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

A notação  $\xrightarrow{\mu}$  designa convergência fraca sob a lei  $\mu$ .

**3.1. Aplicação a um sistema com perda de memória lenta.** Usando o Teorema 3.1 podemos obter resultados muito gerais sobre a convergência de PPAR para sistemas com decaimento de correlações muito lento. Nomeadamente, vamos considerar a classe de aplicações de *Manneville-Pomeau* com um ponto fixo indiferente, que aprisiona as órbitas por longos períodos de tempo impedindo a renovação e consequente perda de memória rápida. Vamos usar a seguinte forma particular: para  $\alpha > 0$ , definimos

$$f = f_\alpha(x) = \begin{cases} x(1 + 2^\alpha x^\alpha) & \text{for } x \in [0, 1/2) \\ 2x - 1 & \text{for } x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Estas aplicações são também denominadas por aplicações de Liverani-Saussol-Vaianti, tendo sido introduzidas em [46]. Se  $\alpha \in (0, 1)$  então  $f_\alpha$  admite uma medida de probabilidade  $\mu_\alpha$ , absolutamente contínua com respeito à medida de Lebesgue. Vamos restringir-nos a estes caso. Para além disso, como pode ser visto, por exemplo, em [46, 59, 42], para todo  $\alpha \in (0, 1)$ , os sistemas  $([0, 1], f_\alpha, \mu_\alpha)$  têm decaimento polinomial de correlações. Ou seja, sendo  $\mathcal{H}_\beta$  o espaço de funções Hölder contínuas  $\phi$ , com expoente  $\beta$ , equipado com a norma  $\|\phi\|_{\mathcal{H}_\beta} = \|\phi\|_\infty + |\phi|_{\mathcal{H}_\beta}$ , onde

$$|\phi|_{\mathcal{H}_\beta} = \sup_{x \neq y} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{|x - y|^\beta},$$

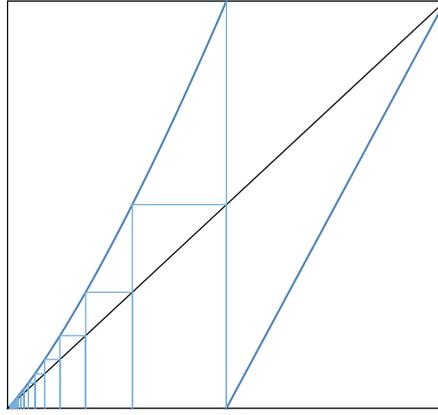


FIGURA 31. Gráfico da função  $f_{1/2}$  a azul, da função identidade a preto e representação da partição  $\mathcal{P}$ , que é constituída pelos pontos inferiores dos segmentos verticais a azul claro.

então existe  $C > 0$  tal que para todo  $\phi \in \mathcal{H}_\beta$ ,  $\psi \in L^\infty$  e todo  $t \in \mathbb{N}$ ,

$$\left| \int \phi \cdot (\psi \circ f^t) d\mu_\alpha - \int \phi d\mu_\alpha \int \psi d\mu_\alpha \right| \leq C \|\phi\|_{\mathcal{H}_\beta} \|\psi\|_\infty \frac{1}{t^{\frac{1}{\alpha}-1}}. \quad (3.1)$$

Seja  $\zeta \in (0, 1]$ , um ponto escolhido no espaço de fase para maximizar a função observável  $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^*$  que definimos como

$$\varphi(x) = -\log |x - \zeta|,$$

onde  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  e  $\varphi(\zeta) = +\infty$ . Observe-se que em vez de tomarmos a função log, poderíamos ter tomado outras funções para compor com a distância a  $\zeta$  (veja-se [48, Secção 4.2.1]).

Defina-se agora o processo estocástico  $X_0, X_1, \dots$ , como em (2.1).

**Teorema 3.2** ([34]). *Dado  $\zeta \in (0, 1]$ , considere-se o PPAR  $N_n$  definido acima. Então, temos necessariamente um dos seguintes casos:*

- (a)  $\zeta$  é não periódico e nesse caso  $N_n$  converge fracamente para um processo de Poisson homogéneo  $N$ , de intensidade  $\tau$ .
- (b)  $\zeta$  é periódico de período  $p$  e nesses caso  $N_n$  converge fracamente para um processo de Poisson composto  $N$  de intensidade  $\theta\tau$ , onde  $\theta = 1 - |D(f^{-p})(\zeta)|$  e a distribuição da multiplicidade  $\pi$  é dada por  $\pi_\kappa = \theta(1 - \theta)^{\kappa-1}$ , para todo  $\kappa \in \mathbb{N}_0$ .

Este teorema resulta do Teorema 3.1. Para isso, considera-se a partição natural  $\tilde{P}_n$  definida indutivamente do seguinte modo:  $Z \in \tilde{P}_n$  se  $Z = [1/2, 1)$  ou  $f(Z) \in \tilde{P}_n$ . Agora, considere-se  $Y \in \tilde{P}_n$  e seja  $F_Y$  a aplicação de primeiro retorno a  $Y$  e  $\mu_Y$  a medida condicional a  $Y$ . Sabe-se que o sistema  $(Y, F_Y, \mu_Y)$  tem decaimento de correlações exponencial contra  $L^1$ , pelo que as condições  $\mathbb{D}_q(u_n)^*$  e  $\mathbb{D}'_q(u_n)^*$  são satisfeitas e consequentemente os PPAR  $N_n^Y$  convergem para os respectivos processos de Poisson (no caso não periódico) e Poisson composto (no caso periódico), como foi demonstrado em [3], de modo que resta apenas utilizar o Teorema 3.1 para obter a mesma convergência para os PPAR  $N_n$  associados à dinâmica original.

**3.2. Novas direcções.** Na apresentação dos resultados e na introdução ao assunto feita acima, fizeram-se opções para ilustrar o grau de desenvolvimento da temática sem a preocupação de se ser exaustivo ou de apresentar os resultados na sua forma mais geral. Nesta secção mencionamos algumas das direcções mais recentes e generalizações já efectuadas.

Em particular, com o intuito de simplificar a apresentação, os processos pontuais acima registam apenas a informação referente ao número de observações extremas. Nos artigos [25, 26, 54], utilizam-se processos pontuais multidimensionais que registam também outras informações como a magnitude das excedências ou a posição relativa das órbitas quando entram numa vizinhança do conjunto onde o observável é maximizado. Estes resultados permitem também o estudo de recordes e da sua distribuição temporal que foi também estudada em [40].

Nos exemplos apresentados, a função observável  $\varphi$  era maximizada num único ponto  $\zeta$  escolhido no espaço de fase. Em [39, 4, 5], consideram-se conjuntos finitos e numeráveis de pontos para conjuntos maximais, enquanto que em [11, 45, 16] considera-se a diagonal de espaços produto. A possibilidade de haver auto-intersecções na órbita do conjunto maximal gera a ocorrência de clustering de observações extremas de modo que o IE, por exemplo, permite obter informações sobre a complexidade da estrutura do conjunto maximal (o conjunto de pontos onde o observável é maximizada) e da sua compatibilidade com a dinâmica. Isto foi observado nos artigos [50, 27, 28]. Salientamos ainda os artigos recentes [37, 10] onde se consideram conjuntos maximais como subvariedades de dimensão inferior à do espaço de fase.

Finalmente, realçamos que muita da investigação fundamental mencionada nos parágrafos anteriores motivou e foi sendo também alimentada por investigação de cariz mais aplicado, em particular, na área de Meteorologia. Referimos os seguintes artigos como tais exemplos: [55, 52, 19, 20, 51, 8, 14, 47].

#### AGRADECIMENTOS

ACMF, JMF são parcialmente suportados pelos projectos FCT com referência: PTDC/MAT-PUR/4048/2021 e 2022.07167.PTDC, e pelo CMUP, que é financiado com fundos nacionais pela FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P., sob a referência de projecto UIDB/00144/2020.

#### REFERÊNCIAS

- [1] M. Abadi, A. C. M. Freitas, and J. M. Freitas. Dynamical counterexamples regarding the extremal index and the mean of the limiting cluster size distribution. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 102(2):670–694, 2020.
- [2] J. F. Alves, J. M. Freitas, S. Luzzatto, and S. Vaienti. From rates of mixing to recurrence times via large deviations. *Adv. Math.*, 228(2):1203–1236, 2011.
- [3] H. Aytac, J. M. Freitas, and S. Vaienti. Laws of rare events for deterministic and random dynamical systems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 367(11):8229–8278, 2015.
- [4] D. Azevedo, A. C. M. Freitas, J. M. Freitas, and F. B. Rodrigues. Clustering of extreme events created by multiple correlated maxima. *Phys. D*, 315:33–48, 2016.
- [5] D. Azevedo, A. C. M. Freitas, J. M. Freitas, and F. B. Rodrigues. Extreme Value Laws for Dynamical Systems with Countable Extremal Sets. *J. Stat. Phys.*, 167(5):1244–1261, 2017.
- [6] V. Barros, L. Liao, and J. Rousseau. On the shortest distance between orbits and the longest common substring problem. *Adv. Math.*, 344:311–339, 2019.
- [7] H. Bruin, B. Saussol, S. Troubetzkoy, and S. Vaienti. Return time statistics via inducing. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 23(4):991–1013, 2003.
- [8] T. Caby, D. Faranda, G. Mantica, S. Vaienti, and P. Yiou. Generalized dimensions, large deviations and the distribution of rare events. *Phys. D*, 400:132143, 15, 2019.
- [9] T. Caby, D. Faranda, S. Vaienti, and P. Yiou. Extreme value distributions of observation recurrences. *Nonlinearity*, 34(1):118–163, 2021.
- [10] M. Carney, M. Holland, and M. Nicol. Extremes and extremal indices for level set observables on hyperbolic systems. *Nonlinearity*, 34(2):1136–1167, 2021.
- [11] J.-R. Chazottes, Z. Coelho, and P. Collet. Poisson processes for subsystems of finite type in symbolic dynamics. *Stoch. Dyn.*, 9(3):393–422, 2009.
- [12] M. R. Chernick, T. Hsing, and W. P. McCormick. Calculating the extremal index for a class of stationary sequences. *Adv. in Appl. Probab.*, 23(4):835–850, 1991.
- [13] P. Collet. Statistics of closest return for some non-uniformly hyperbolic systems. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 21(2):401–420, 2001.

- [14] D. Faranda, M. C. Alvarez-Castro, G. Messori, D. Rodrigues, and P. Yiou. The hammam effect or how a warm ocean enhances large scale atmospheric predictability. *Nature Communications*, 10(1):1316, 2019.
- [15] D. Faranda, J. M. Freitas, V. Lucarini, G. Turchetti, and S. Vaienti. Extreme value statistics for dynamical systems with noise. *Nonlinearity*, 26(9):2597–2622, 2013.
- [16] D. Faranda, H. Ghouidi, P. Guiraud, and S. Vaienti. Extreme value theory for synchronization of coupled map lattices. *Nonlinearity*, 31(7):3326–3358, 2018.
- [17] D. Faranda, V. Lucarini, G. Turchetti, and S. Vaienti. Numerical convergence of the block-maxima approach to the generalized extreme value distribution. *Journal of Statistical Physics*, 145:1156–1180, 2011. 10.1007/s10955-011-0234-7.
- [18] D. Faranda, V. Lucarini, G. Turchetti, and S. Vaienti. Extreme value distribution for singular measures. *Chaos*, 22(2):023135, 2012.
- [19] D. Faranda, G. Messori, M. C. Alvarez-Castro, and P. Yiou. Dynamical properties and extremes of northern hemisphere climate fields over the past 60 years. *Nonlinear Processes in Geophysics*, 24(4):713–725, 2017.
- [20] D. Faranda, Y. Sato, B. Saint-Michel, C. Wiertel, V. Padilla, B. Dubrulle, and F. Daviaud. Stochastic chaos in a turbulent swirling flow. *Phys. Rev. Lett.*, 119:014502, Jul 2017.
- [21] C. A. T. Ferro. *Statistical Methods for Clusters of Extreme Values*. PhD thesis, Lancaster University, 2003.
- [22] A. Freitas, J. Freitas, F. Rodrigues, and J. Soares. Rare events for cantor target sets. Preprint arXiv:1903.07200., 2019.
- [23] A. C. M. Freitas and J. M. Freitas. Extreme values for Benedicks-Carleson quadratic maps. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 28(4):1117–1133, 2008.
- [24] A. C. M. Freitas and J. M. Freitas. On the link between dependence and independence in extreme value theory for dynamical systems. *Statist. Probab. Lett.*, 78(9):1088–1093, 2008.
- [25] A. C. M. Freitas, J. M. Freitas, and M. Magalhães. Convergence of marked point processes of excesses for dynamical systems. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 20(9):2131–2179, 2018.
- [26] A. C. M. Freitas, J. M. Freitas, and M. Magalhães. Complete convergence and records for dynamically generated stochastic processes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 373(1):435–478, 2020.
- [27] A. C. M. Freitas, J. M. Freitas, F. B. Rodrigues, and J. V. Soares. Rare events for Cantor target sets. *Comm. Math. Phys.*, 378(1):75–115, 2020.
- [28] A. C. M. Freitas, J. M. Freitas, and J. V. Soares. Rare events for product fractal sets. *J. Phys. A*, 54(34):Paper No. 345202, 30, 2021.
- [29] A. C. M. Freitas, J. M. Freitas, and M. Todd. Hitting time statistics and extreme value theory. *Probab. Theory Related Fields*, 147(3-4):675–710, 2010.
- [30] A. C. M. Freitas, J. M. Freitas, and M. Todd. Extreme value laws in dynamical systems for non-smooth observations. *J. Stat. Phys.*, 142(1):108–126, 2011.
- [31] A. C. M. Freitas, J. M. Freitas, and M. Todd. The extremal index, hitting time statistics and periodicity. *Adv. Math.*, 231(5):2626–2665, 2012.
- [32] A. C. M. Freitas, J. M. Freitas, and M. Todd. The compound Poisson limit ruling periodic extreme behaviour of non-uniformly hyperbolic dynamics. *Comm. Math. Phys.*, 321(2):483–527, 2013.
- [33] A. C. M. Freitas, J. M. Freitas, and M. Todd. Speed of convergence for laws of rare events and escape rates. *Stochastic Process. Appl.*, 125(4):1653–1687, 2015.
- [34] A. C. M. Freitas, J. M. Freitas, M. Todd, and S. Vaienti. Rare events for the Manneville-Pomeau map. *Stochastic Process. Appl.*, 126(11):3463–3479, 2016.
- [35] J. M. Freitas. Extremal behaviour of chaotic dynamics. *Dyn. Syst.*, 28(3):302–332, 2013.
- [36] C. Gupta, M. Holland, and M. Nicol. Extreme value theory and return time statistics for dispersing billiard maps and flows, Lozi maps and Lorenz-like maps. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 31(5):1363–1390, 2011.
- [37] N. Haydn and S. Vaienti. Limiting entry and return times distribution for arbitrary null sets. *Comm. Math. Phys.*, 378(1):149–184, 2020.
- [38] N. T. A. Haydn, N. Winterberg, and R. Zweimüller. Return-time statistics, hitting-time statistics and inducing. In *Ergodic theory, open dynamics, and coherent structures*, volume 70 of *Springer Proc. Math. Stat.*, pages 217–227. Springer, New York, 2014.
- [39] M. Holland, M. Nicol, and A. Török. Extreme value theory for non-uniformly expanding dynamical systems. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 364(2):661–688, 2012.
- [40] M. Holland and M. Todd. Weak convergence to extremal processes and record events for non-uniformly hyperbolic dynamical systems. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 39(4):980–1001, 2019.
- [41] M. P. Holland, R. Vitolo, P. Rabassa, A. E. Sterk, and H. W. Broer. Extreme value laws in dynamical systems under physical observables. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 241(5):497 – 513, 2012.
- [42] H. Hu. Decay of correlations for piecewise smooth maps with indifferent fixed points. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 24(2):495–524, 2004.

- [43] O. Kallenberg. *Random measures*. Akademie-Verlag, Berlin, fourth edition, 1986.
- [44] G. Keller. Rare events, exponential hitting times and extremal indices via spectral perturbation. *Dyn. Syst.*, 27(1):11–27, 2012.
- [45] G. Keller and C. Liverani. Rare events, escape rates and quasistationarity: some exact formulae. *J. Stat. Phys.*, 135(3):519–534, 2009.
- [46] C. Liverani, B. Saussol, and S. Vaienti. A probabilistic approach to intermittency. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 19(3):671–685, 1999.
- [47] V. Lucarini and T. Bódai. Transitions across melancholia states in a climate model: Reconciling the deterministic and stochastic points of view. *Phys. Rev. Lett.*, 122:158701, Apr 2019.
- [48] V. Lucarini, D. Faranda, A. C. M. Freitas, J. M. Freitas, M. Holland, T. Kuna, M. Nicol, M. Todd, and S. Vaienti. *Extremes and Recurrence in Dynamical Systems*. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, Hoboken, NJ, 2016.
- [49] V. Lucarini, D. Faranda, and J. Wouters. Universal behaviour of extreme value statistics for selected observables of dynamical systems. *J. Stat. Phys.*, 147(1):63–73, 2012.
- [50] G. Mantica and L. Perotti. Extreme value laws for fractal intensity functions in dynamical systems: Minkowski analysis. *J. Phys. A*, 49(37):374001, 21, 2016.
- [51] G. Messori, R. Caballero, F. Bouchet, D. Faranda, R. Grotjahn, N. Harnik, S. Jewson, J. G. Pinto, G. Rivière, T. Woollings, and P. Yiou. An interdisciplinary approach to the study of extreme weather events: Large-scale atmospheric controls and insights from dynamical systems theory and statistical mechanics. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 99(5):ES81–ES85, 2018.
- [52] G. Messori, R. Caballero, and D. Faranda. A dynamical systems approach to studying midlatitude weather extremes. *Geophysical Research Letters*, 44(7):3346–3354, 2017.
- [53] G. L. O’Brien. Extreme values for stationary and Markov sequences. *Ann. Probab.*, 15(1):281–291, 1987.
- [54] F. Pène and B. Saussol. Spatio-temporal Poisson processes for visits to small sets. *Israel J. Math.*, 240(2):625–665, 2020.
- [55] E. W. Saw, D. Kuzzay, D. Faranda, A. Guittonneau, F. Daviaud, C. Wiertel-Gasquet, V. Padilla, and B. Dubrulle. Experimental characterization of extreme events of inertial dissipation in a turbulent swirling flow. *Nature Communications*, 7:12466 EP –, 08 2016.
- [56] R. L. Smith. A counterexample concerning the extremal index. *Adv. in Appl. Probab.*, 20(3):681–683, 1988.
- [57] R. L. Smith and I. Weissman. Estimating the extremal index. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, 56(3):515–528, 1994.
- [58] R. Vitolo, M. P. Holland, and C. A. T. Ferro. Robust extremes in chaotic deterministic systems. *Chaos*, 19(4):043127, 2009.
- [59] L.-S. Young. Recurrence times and rates of mixing. *Israel J. Math.*, 110:153–188, 1999.



# *Mare Nostrum* — Um Mar de Extremos em Portugal\*

Miguel de Carvalho, [Miguel.deCarvalho@ed.ac.uk](mailto:Miguel.deCarvalho@ed.ac.uk)

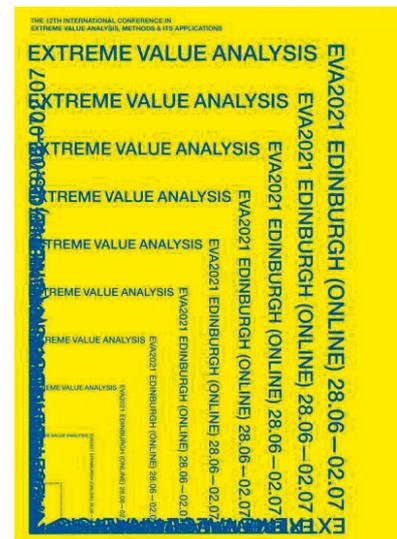
Universidade de Edimburgo, Escócia

## A Nossa Escola

A escola de extremos em Portugal tem desempenhado um papel de *influencer* científico a nível internacional. A título de exemplo, a nossa escola propôs e organizou o célebre encontro do Vimeiro em 1983, o qual desencadeou a criação da conferência internacional EVA (considerada a mais importante na área de estatística de valores extremos).

*Estatística de Valores Extremos.* Eventos extremos, tais como as cheias recentes em Lisboa, o terramoto catastrófico na Turquia, ou o aquecimento global generalizado, desempenham um papel fundamental na sociedade civil. A estatística de valores extremos, mede o risco de ocorrência de tais eventos e permite quantificar a sua regularidade, bem como a sua dinâmica ao longo do tempo. O que torna a estatística de valores extremos desafiante do ponto de vista da inferência é a necessidade de extrapolar para a cauda da distribuição interesse, além dos dados observados. Conforme refere Nassim Taleb, autor do célebre livro *O Cisne Negro*,

*“the fool believes that the tallest mountain in the world will be equal to the tallest one he has observed.”*



Ainda outros exemplos: *i*) o corpo editorial da revista científica *Extremes*, a qual é líder na área, conta com 4 editores academicamente associados ao nosso país (M. de Carvalho, L. de Haan, A. Ferreira e I. Gomes); *ii*) estivemos ainda envolvidos na organização da conferência EVA 2021, em Edimburgo, a qual foi patrocinada pela Sociedade Portuguesa de Estatística.

\* *Mare Nostrum* é uma expressão em latim que significa “o nosso mar”.

Têm sido feitos ao longo dos anos vários levantamentos históricos e reflexões acerca da nossa Escola de extremos, passando por "Extremistas num Extremo da Europa" (in Memorial da SPE, 2005), "Escola de Extremos em Portugal" (in Tema Central do Boletim primavera 2007) ou "Algumas Reflexões Avulsas" (in Boletim primavera 2009).

A minha intenção nesta breve nota é olhar para o amanhã da nossa Escola – para o futuro do *mare nostrum*, para que sejamos ainda mais fortes amanhã – quer lá fora, quer cá dentro. Porque acredito que apesar de toda a história que já escrevemos juntos até agora – e apesar dos vastos desenvolvimentos científicos que já efetuámos – é nosso dever, enquanto líderes intelectuais nesta matéria, fazermos uma reflexão acerca de como podemos continuar a liderar. E para isso, deixo aqui duas notas pessoais, com mais perguntas do que respostas, e deixo um apelo a todos vós para que reflitam e partilhem também com a nossa comunidade os vossos comentários, perspetivas e visões.

*“Porque acredito que apesar de toda a história que já escrevemos juntos até agora—e apesar dos vastos desenvolvimentos científicos que já efetuámos—é nosso dever, enquanto líderes intelectuais nesta matéria, fazermos uma reflexão acerca de como podemos continuar a liderar.”*

## §1) A Estatística de Valores Extremos do amanhã

Em primeiro lugar, refiro o óbvio. Parece-me fundamental que continuemos a fazer um esforço conjunto enquanto comunidade para que através das nossas publicações e software mantenhamos a nossa área apelativa, moderna e relevante. Continuarmos a ser pioneiros implica termos constantemente a coragem de sairmos da nossa zona de conforto e evitarmos circular em torno de assuntos e temas que possam estar praticamente esgotados do ponto de vista científico. Por exemplo, a computação, a visualização e a análise de dados desempenham um papel muito mais importante atualmente do que desempenhavam há 20 anos. E áreas emergentes, tais como a inteligência artificial e a aprendizagem automática, estão definitivamente aí para ficar. Quais são as oportunidades que podemos capitalizar nestes domínios num futuro próximo? Como será a interface entre a estatística de valores extremos e estas áreas nos próximos 10-15 anos?

## §2) O nosso papel na sociedade civil

Em segundo lugar, recordo que a estatística de valores extremos se relaciona naturalmente com aplicações. Parece-me assim extremamente importante que continuemos a reforçar o nosso papel de autoridade e intervenção nesta matéria – quer através de colaborações com cientistas de outras áreas, quer com presença na imprensa. Por exemplo, os recentes episódios de inundações severas em Lisboa levaram diversos agentes políticos a afirmar que as alterações climáticas foram certamente o motivo da severidade das cheias – enquanto alguns analistas argumentaram que a origem do problema foi a falta de prevenção e infraestrutura. Será que a magnitude e intensidade da precipitação extrema em Lisboa pode ter aumentado apenas moderadamente nas últimas décadas – questionando assim se as alterações climáticas são realmente as responsáveis pelos recentes episódios de inundação? Que eu tenha conhecimento, ninguém da nossa comunidade falou, nem a favor nem de uma opinião nem de outra. E como quem cala consente, a nossa existência enquanto comunidade passou completamente despercebida do grande público. Faço também o *mea culpa* enquanto atual presidente desta Sociedade. Mas certamente não sou o único a sentir que se trata de algo que podemos mudar juntos.

É irónico que internacionalmente sejamos tão influentes na avaliação do risco de eventos extremos e que o grande público em Portugal não tenha ainda conhecimento do nosso papel de liderança. A SPE pode ajudar, mas o primeiro passo passa por cada um de nós. E essa falta de conhecimento por parte do grande público, tem consequência também a noutros níveis tais como, por exemplo, em termos de fundos de investigação. Por exemplo, um maior protagonismo da comunidade de valores extremos perto do grande público permitiria que aumentássemos a nossa capacidade de *lobbying* e influência em termos de

financiamentos para investigação. E maior acesso a financiamento, significa, por exemplo, maior acesso a alunos de doutoramento – os líderes do amanhã.

*“É irónico que internacionalmente sejamos tão influentes na avaliação do risco de eventos extremos e que o grande público em Portugal não tenha ainda conhecimento do nosso papel de liderança. A SPE pode ajudar, mas o primeiro passo passa por cada um de nós.”*

## **Referências**

- Taleb, N. (2012), Antifragile: Things that Gain from Disorder, New York: Random House.



# Alguns Detalhes sobre a PORTSEA – Escola de Extremos e Aplicações em Portugal

M. Ivette Gomes, [ivette.gomes@fc.ul.pt](mailto:ivette.gomes@fc.ul.pt)

*Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, Centro de Estatística e Aplicações,  
Universidade de Lisboa, Academia das Ciências de Lisboa*

## 0. Síntese

Após algumas notas soltas sobre o início da minha carreira na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, como aluna de Matemática Pura e como docente da Secção de Matemática Aplicada, avanço com as ideias básicas que associo à formação da ‘*Escola de Extremos*’ em Portugal, atualmente reconhecida pela comunidade científica internacional. No meu entender, o seu desenvolvimento teve sem dúvida como grande responsável a obra científica de Tiago de Oliveira, nesta área, mas não posso ainda deixar de mencionar a investigação desenvolvida por mim e por Feridun Turkman, aquando da nossa estadia, em Sheffield, Reino Unido, e a organização do ‘*NATO Advanced Statistical Institute (ASI) on Statistical Extremes and Applications (SEA)*’, que decorreu no Vimeiro, no Verão de 1983. E atrevo-me a dizer novamente que a organização deste encontro constitui na realidade o marco de lançamento daquilo que penso poder hoje considerar-se a PORTSEA, do inglês, ‘*Portuguese School of Extremes and Applications*’. Laurens de Haan, um dos gigantes da área, veio trabalhar para Portugal em 1999, inserindo-se no Centro de Estatística e Aplicações e reforçando a PORTSEA de forma indiscutível. Até à data, a dinâmica de publicação tem sido bastante elevada e diversificada. E realço mais uma vez que o dinamismo do Grupo tem conseguido um crescimento salutar da área, com um elevado reconhecimento internacional da ‘*Escola de Extremos*’ em Portugal, um país de ‘*bons extremistas*’ no extremo ocidental da Europa.

## 1. Notas Soltas sobre o meu Início de Carreira

Face ao que escrevi em 2014 (Gomes, 2014a), aquando do centenário do Professor Sebastião e Silva, começo por vagamente recordar os tempos em que fui aluna na *Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa* (FCUL), entre 1965 e 1970, agora quando até já deixei há mais de dez anos de ser professora. Esses tempos dão-me uma nostálgica saudade de uma idade de ouro, em que tudo parecia estar bem, apesar do terrível regime político ditatorial em que vivíamos.

Depois dos seis semestres iniciais que nos conferiam uma sólida formação de base, os cursos levantavam voo, e nos últimos quatro semestres era cada vez mais visível o envolvimento, direi mesmo encantamento, que os professores tinham pelas matérias que ensinavam. Apesar de ter amplamente apreciado a cadeira de *Introdução às Probabilidades e Estatística*, ministrada pelo Professor Tiago de Oliveira e onde me apercebi que não só o sonho, mas também o acaso, são constantes da vida, escolhi a opção de *Matemática Pura* (versus *Matemática Aplicada*, escolhida pela grande maioria das minhas colegas e amigas, num curso em que o número de mulheres era francamente superior ao número de homens).

O rigor das cadeiras que tive com os Professores Almeida e Costa, Dias Agudo, Dionísio, Luísa Galvão, entre tantos outros, preparou-me para as aulas do Professor Sebastião e Silva e do seu discípulo direto, Professor Santos Guerreiro, com quem era mais visível a *Matemática* a ser construída. Foi nas cadeiras

em que foram meus mestres que me deslumbrei com o espírito da Matemática, porque melhor me apercebi que em *Matemática* a criatividade e a imaginação convivem com o rigor de teorias completas e elegantes. Não só essas cadeiras, mais avançadas, se prestavam melhor a apresentar essas facetas, como o trabalho preparatório apoiado por todos os meus anteriores professores me tinha preparado para apreciar o papel da hipótese em *Matemática*, e por isso o papel da intuição guiada que ajuda os matemáticos a desbravar novos horizontes.

Num dos dois cursos de *Análise Superior* que tive com o Professor Sebastião e Silva era, naturalmente, abordada a *Teoria das Distribuições*. A exposição era fascinante, e sem qualquer esforço a abstração da *Matemática* ficava indelevelmente associada às aplicações. Isso selou o meu destino, porque até então eu tinha sido muito puxada para a *Álgebra*, e de repente fiquei fascinada com a aplicabilidade da Matemática na compreensão de fenómenos concretos. E a escolha das cadeiras opcionais de *Processos Estocásticos*, ministrada pelo Professor Tiago de Oliveira e de *Probabilidade*, ministrada pelo Professor Pedro Braumann, juntamente com a leitura do ‘super-barato’ livro de Gnedenko (Gnedenko, 1969), levaram-me a decidir enveredar pela opção de *Matemática Aplicada*, mesmo que para isso tivesse a necessidade de ir simultaneamente trabalhar como professora, num colégio, em Lisboa, gerido por um familiar.

Não tenho dúvidas que o mérito excepcional de alguns dos Professores que tive na FCUL está na génese do sucesso profissional que consegui. Entre muitos outros, que não vou aqui referir, menciono apenas os três professores que me puxaram para a investigação: o Professor Sebastião e Silva, o Professor Almeida e Costa e o Professor Tiago de Oliveira.

O Professor Sebastião e Silva, que considero ter sido um dos mais influentes Matemáticos Portugueses do século XX, foi um dos grandes responsáveis pelo desenvolvimento da minha autonomia mental e do meu sentido crítico. O Professor Almeida e Costa, que me considerava ‘*uma das meninas que até parecia homem*’, estimulou uma breve passagem por estudos mais aprofundados de *Álgebra*, e foi um Professor de quem muito gostei e que decerto desiludi, porque recusei um seu convite para ir para os Estados Unidos, com uma bolsa de Doutoramento da Fundação Calouste Gulbenkian, e aceitei um outro convite do Professor Tiago de Oliveira (de ora em diante, muitas vezes referido só por Tiago de Oliveira) para ingressar no corpo docente da *Matemática Aplicada*, naquela fase feliz de expansão das universidades que Veiga Simão, Ministro da Educação Nacional entre 1970 e 1974, acarinhou, e onde tive logo de preparar cadeiras de *Simulação* (sem nunca ter previamente usado um computador...), de *Processos Estocásticos* e de *Teoria da Probabilidade*.

Tal como referi recentemente, em 27 de Janeiro de 2021, numa entrevista feita pela ex-aluna e colega do Departamento de Matemática, *Faculdade de Ciências e Tecnologia* (FCT), *Universidade Nova de Lisboa* (UNL), Isabel Natário, para uma reedição (on-line) do seminário ‘*Legado Matemático—Mulheres na Estatística*’, penso que posso na realidade ter inspirado outras mulheres a escolher esta área, mas a verdade é que o curso de *Matemática* em Lisboa, e penso que também em Coimbra e no Porto, tinha (e ainda tem hoje) um número bastante elevado de mulheres. E quando o Professor Tiago de Oliveira me convidou para ingressar no corpo docente da Secção de *Matemática Aplicada*, em 1970, entraram também as minhas colegas e amigas Helena Barroso, que não chegou a concluir o seu Doutoramento, e a Eugénia Graça Martins. E se não me falha a memória, no ano seguinte, foram convidados a entrar na Secção de *Matemática Aplicada*, a Antónia Amaral (agora, Antónia Amaral-Turkman), a Lucília Carvalho e o Daniel Müller, que infelizmente já não se encontra entre nós. Recordo também com alguma saudade, o longo período em que, com o apoio e o incentivo do Professor Tiago de Oliveira, desbravámos os três volumes do Kendall, a chamada ‘*Bíblia da Estatística*’, segundo Tiago de Oliveira...

Mas nessa altura existiam muito poucos doutorados a trabalhar em *Estatística*. Se bem me recordo, a única mulher era a Professora Fátima Fontes de Sousa. E homens também eram poucos. Sem conseguir certamente ser exaustiva, lembro-me dos Professores Murta, em Coimbra, e dos Professores Pedro Braumann, Bento Murteira e Tiago de Oliveira, em Lisboa. Já havia pois 20% de mulheres doutoradas em *Estatística* em Portugal..., uma percentagem bastante elevada relativamente a outros países da

Europa e aos Estados Unidos. Mas os jovens dessa altura, entre os quais um número francamente maioritário de mulheres, foram todos apanhados por aquela fase feliz de expansão das universidades devida a Veiga Simão, e alguns tiveram a possibilidade de avançar com a sua investigação nos melhores centros estrangeiros do momento.

Em Julho de 1970, terminei a minha licenciatura em *Matemática Pura*, especialidade de *Álgebra*, na FCUL. Como já referi, decidi enveredar pela área das *Probabilidades, Estatística e Processos Estocásticos*, e comecei por trabalhar em *Testes de Aleatoriedade e Metodologias Não-Paramétricas*, sob a orientação do Professor J. Tiago de Oliveira, já na altura referência internacional na área da *Estatística de Extremos*, com vários artigos publicados neste campo desde 1959, mas que também começou em *Álgebra*, tal como eu, talvez também por mero acaso. Durante os cinco anos que permaneci em Portugal como assistente (1970-1975), iniciei a minha investigação, primeiro no *Centro de Matemática Aplicada*, e em seguida no *Centro de Estatística e Aplicações da Universidade de Lisboa* (CEAUL), um centro de investigação fundado por Tiago de Oliveira, em 1975, e que ainda é hoje o polo principal de investigação em *Estatística*, em Portugal. Apesar de não ter na altura trabalhado diretamente na área de *Extremos* (veja-se, [Amaral et al., 1974](#); [Gomes et al., 1975](#)), apercebi-me de algumas das potencialidades e beleza da *Teoria de Valores Extremos*.

Tal como já referi anteriormente, a política de investimento no Ensino Superior, que Veiga Simão inspirou, abriu grandes perspectivas de investigadores considerados promissores serem enviados para grandes centros de cultura no estrangeiro, tendo eu, e o Dinis Pestana, meu marido, conseguido bolsas de doutoramento da Fundação Calouste Gulbenkian, e sido aceites na Universidade de Sheffield (Reino Unido), onde Joe Gani tinha criado o *'Applied Probability Trust'*, ainda hoje responsável pela publicação de duas das principais revistas de Probabilidade, *'Journal of Applied Probability'* e *'Advances in Applied Probability'*. Tomada a decisão de ir trabalhar para Doutoramento em Inglaterra, em *Metodologias Não Paramétricas*, possivelmente sob a orientação de Joe Gani, proporcionou o acaso ser professor em Sheffield, Clive Anderson, o qual conhecia bem Tiago de Oliveira, uma vez que tinha defendido a sua tese de Doutoramento em 1971, na área de *Valores Extremos*. Por outro lado, Joe Gani, que só tive o prazer de conhecer em 2005, aquando da minha participação na *'55th Session of the International Statistical Institute'*, em Sidney, tinha acabado de sair para a Austrália, a sua terra natal.

Clive Anderson, que se tinha doutorado em *Extremos de Variáveis Discretas* no Imperial College, Londres, veio a ser o meu orientador de doutoramento, levando-me a investigar sobre estatísticas ordinais de topo, recordes, velocidades de convergência para leis limites, concomitantes de estatísticas ordinais—enfim, o 'circo' do que era então a investigação em *Extremos*—temas que serviram de base para a escrita da minha tese de doutoramento. Foi pois assim que acabei por enveredar, quase em *'full-time'*, na área de *Extremos*. Terminei a minha tese de Doutoramento em 1978 ([Gomes, 1978](#)), tal como o Dinis Pestana, mas na área de modelos estáveis para somas, sob a orientação de DN Shanbahg. A trabalhar em Sheffield para Doutoramento, também numa área muito próxima, mas sob a orientação de Morris Walker, encontrava-se na altura Feridun Turkman, que terminou a sua tese de Doutoramento em 1980 ([Turkman, 1980](#)), sobre *Extremos em Processos Estocásticos*, e a Antónia Amaral (agora Antónia Amaral Turkman), uma colega e amiga da FCUL, que começou a trabalhar para doutoramento nos finais de 1977, também em Sheffield, na área de Estatística Bayesiana, sob a supervisão de Ian Dunsmore.

A área de *Extremos* era então (e ainda é hoje...) considerada como uma das áreas relevantes no campo das *Probabilidades e Estatística*, com uma grande variedade de tópicos a serem explorados. Nas primeiras décadas do século XX, sob o poderoso influxo de Paul Lévy, a *Teoria da Probabilidade* ocupou-se sobretudo das generalizações do *Teorema Limite Central* (TLC) como comportamento assintótico de somas—um problema de grande relevo, uma vez que médias e variâncias são funções simples de somas. Fréchet teve a interessante ideia de usar um símile da equação de estabilidade de Lévy, usando potências de funções de distribuição em vez de potências de funções características, isto é, tratou um problema análogo ao das somas, mas para máximos de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com base na ideia simples de que o máximo de máximos é ainda um máximo. *'Inventou'* assim a primeira *lei de extremos*, justamente denominada distribuição de Fréchet ([Fréchet, 1927](#)). Na mesma época, Fisher e Tippett ([Fisher & Tippett, 1928](#)) descobriram os três tipos de soluções a

que a equação de estabilidade pode levar, e von Mises (von Mises, 1936) ocupou-se também do problema do comportamento limite de extremos linearmente normalizados, e propôs uma expressão que engloba essas três leis. Atualmente, esses resultados estão unificados numa teoria geral (Gnedenko, 1943; de Haam, 1970), reconhecendo-se que o *Teorema Limite Extremal* é uma referência para o estudo de estatísticas ordinais extremas, enquanto o TLC tem que ver com as estatísticas ordinais centrais. Um pouco mais tarde, começou a desenvolver-se a *Estatística de Extremos*, sob o impulso vigoroso de Emil Julius Gumbel (Gumbel, 1958; 2004), com quem o Professor J. Tiago de Oliveira trabalhou na Universidade de Columbia.

De regresso a Lisboa, em Dezembro de 1978, fui encarregue pelo Professor Tiago de Oliveira de lançar no grupo de Lisboa uma área então emergente, a *Estatística Computacional*, área atualmente bem estabelecida no *Departamento de Estatística e Investigação Operacional* (DEIO), FCUL. Para reforçar a licenciatura em *Matemática Aplicada*, fui também regente de *Inferência Estatística, Probabilidades e Processos Estocásticos*. No ano letivo de 1980/1981, juntou-se a nós, na FCUL e também no CEAUL, polo principal do desenvolvimento da área de *Extremos* em Portugal, o Feridun Turkman.

Na altura, quando, em 1981, enveredámos pela instituição do *Departamento de Estatística, Investigação Operacional e Computação* (DEIOC), agora DEIO, éramos muito poucos (mas penso que entre os 8 doutorados, 50% eram mulheres). Além disso, para se instituir o Mestrado em *Probabilidades e Estatística*, ensinei *Análise Preliminar de Dados, Controlo da Qualidade, Estatística Não Paramétrica, Estatísticas Ordinais, Simulação, ...* E esta diversidade de áreas de docência abriu-me sem dúvida novas perspectivas de investigação, e permitiu-me encontrar alunos de elevada qualidade, tais como a Teresa Alpuim, a Isabel Fraga Alves e a Luísa Canto e Castro, as minhas três primeiras alunas de doutoramento, todas mulheres, por mero acaso. E as primeiras alunas de doutoramento, quer de Tiago de Oliveira, quer de Feridun Turkman, foram também mulheres, a Manuela Neves e a Fernanda Oliveira, respetivamente.

Todos esses alunos de Doutoramento, que referirei mais adiante, na **Secção 3.1**, de forma abreviada, têm sido sem dúvida a base para a formação e reconhecimento de um grupo em Portugal na área de *Extremos e Aplicações*, que intitularei PORTSEA, do inglês, '*Portuguese School of Extremes and Applications*', de cujo lançamento vou falar na **Secção 2**. Na **Secção 3** avançaremos com vários detalhes sobre o crescimento da PORTSEA. A **Secção 4** é dedicada àquilo que considero ser o coração da PORTSEA.

## 2. O Lançamento da PORTSEA

A *Escola de Extremos (e Avaliação de Risco)* em Portugal, que, como já referi atrás, intitularei PORTSEA, é atualmente reconhecida pela comunidade científica internacional, e o seu desenvolvimento teve sem dúvida como grande responsável a obra científica de Tiago de Oliveira, Membro Efetivo da *Academia das Ciências de Lisboa* (ACL) desde 1985 até à sua morte prematura em 1992, e apresentado na **Figura 1**, com o seu famoso cachimbo.



**Figura 1.** José Tiago da Fonseca Oliveira (1928-1992), com o seu famoso cachimbo

Não posso ainda deixar de mencionar a investigação desenvolvida por mim e por Feridun Turkman, aquando da nossa estadia, em Sheffield, Reino Unido, para preparação dos nossos doutoramentos, no fim dos anos 70 — início dos anos 80. E embora nunca se tenham assumido como elementos nesta área, considero que o Dinis Pestana, meu marido, e a Antónia Amaral Turkman, casada com o Feridun, com doutoramentos obtidos também em Sheffield, respetivamente em 1978 e 1980, têm tido um papel de relevo na construção deste grupo, com a coautoria de vários artigos relevantes na área.

Em meados de 1981, após a instituição do DEIOC, enveredámos pela organização do ‘NATO *Advanced Statistical Institute (ASI) on Statistical Extremes and Applications (SEA)*’, que decorreu no Vimeiro, no Verão de 1983, um evento atualmente reconhecido como um marco na afirmação desta área da *Estatística*. Na realidade, este NATO ASI, o ‘SEA 1983’, que ocorreu desde 31 de Agosto até 14 de Setembro, teve dois ‘organizadores-sombra’, a Antónia e o Dinis, que pessoalmente considero como membros da PORTSEA. Vieram a esse encontro nomes sonantes na área de *Análise de Valores Extremos (AVE, ou preferencialmente, EVA, do inglês ‘Extreme Value Analysis’)*, alguns dos quais presentes na foto seguinte (**Figura 2**).



**Figura 2.** Foto de participantes no NATO ASI—Vimeiro (SEA 1983)

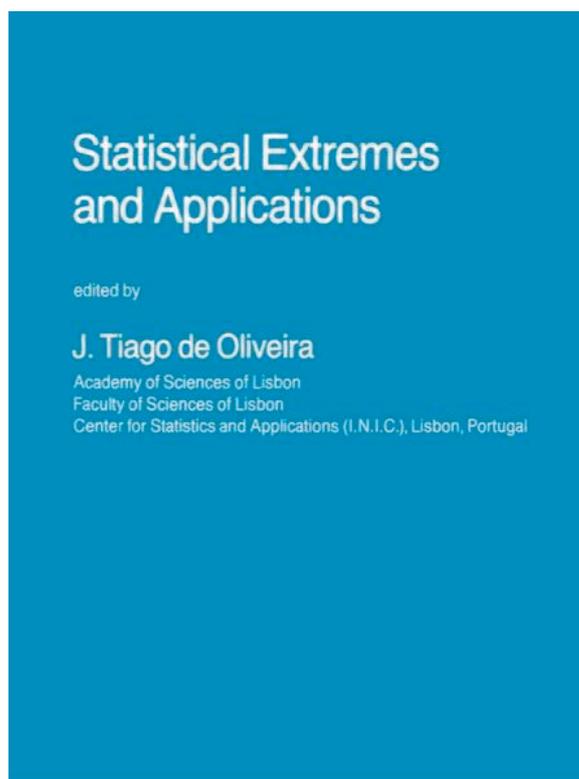
Começo por mencionar os convidados estrangeiros: Clive Anderson (Sheffield University, UK), Paul Deheuvels (Université Paris VI, France), Benjamin Epstein (Technion, Israel), Arne Fransén (National Defence Research Institute, Sweden), Janos Galambos (Temple University, USA), Laurens de Haan (Erasmus University of Rotterdam, The Netherlands), A.M. Hasofer (University of New South Wales, Australia), Leon Herbach (Polytechnic Institute of New York, USA), Ross Leadbetter (University of North Carolina, USA), Georg Lindgren (University of Lund, Sweden), Nancy Mann (Department of Biomathematics, UCLA, USA), B. Marcus (Texas A&M University, USA), Yashaswini Mittal (Virginia Polytechnic Institute and State University, USA), James Pickands III (University of Pennsylvania, USA), Sid Resnick (Colorado State University, USA), Holger Rootzén (University of Copenhagen and UNC, Chapel Hill, USA), G.A. Schueller (Institut für Mechanik, Universität Innsbruck, Austria), Masaaki Sibuya (Keio University, Japan), R. Sneyers (Royal Meteorological Institute, Brussels), Jef Teugels (Katholieke Universiteit Leuven, Belgium), Ishay Weissman (Technion, Israel), Vujica Yevjevich (International Water Resources Institute, George Washington University, USA).

Mas tiveram também a oportunidade de participar neste ASI alguns alunos do primeiro Mestrado em *Probabilidades e Estatística* ministrado pelo então DEIOC, a Teresa Alpuim, a Emília Athayde, a Isabel Barão e a Fátima Miguéns. Também estiveram presentes a Manuela Neves e o Fernando Rosado, alunos de Doutoramento de Tiago de Oliveira, e duas alunas de Doutoramento do Dinis Pestana, a Eugénia Graça Martins e a Helena Iglésias Pereira, que já não está infelizmente entre nós. E na lista de autores de artigos contribuídos podemos encontrar nomes de gigantes na área, tais como Richard Davis, Anthony Davison, Juerg Hüsler, Rolf Dieter-Reiss, Richard Smith...

E tal como referi recentemente na entrevista feita pela Isabel Natário, e ainda mais recentemente numa entrevista feita pela Vanda Lourenço, igualmente colega do Departamento de Matemática, FCT/UNL, e representante de Portugal na *Caucus for Women in Statistics* (Lourenço, 2022), penso que, apesar de não ser ‘feminista’, foi muita devido à minha influência que conseguimos ter entre os 24 convidados, 3 mulheres, eu própria, de Portugal, e duas dos Estados Unidos, a Nancy Mann e a Yashaswini Mittal. Na realidade, não foi fácil na altura encontrar ‘*extremistas*’ no universo, muito reduzido, das mulheres em *Estatística*. Mas, se não contei mal, 12.5% dos convidados da SEA 1983 eram mulheres. E entre os 40 participantes no encontro, 10 eram mulheres, ou seja, 25% dos participantes..., sete das quais vieram a ser (ou eram) nossas alunas de doutoramento. No meu entender, esta conferência constitui na realidade o marco de lançamento daquilo que penso poder hoje considerar-se a “*Escola de Extremos e Aplicações*” em Portugal, ou a PORTSEA, já atrás referida, com uma vida ativa de quase 40 anos, e com um número de mulheres bastante superior ao número de homens, mas a que todos os homens são muito bem-vindos.

No Prefácio do livro associado a este NATO ASI, editado por Tiago de Oliveira (Tiago de Oliveira, Ed., 1984a) e dedicado à memória de Emil Julius Gumbel, um dos pioneiros em *Estatística de Extremos*, e cientista com quem Tiago de Oliveira colaborou nos anos sessenta, tal como foi atrás mencionado, podem-se encontrar artigos desses investigadores, que não vou referir, por serem em número razoavelmente elevado. Limito-me a referir os seis artigos com coautoria dos organizadores (Fransén & Tiago de Oliveira, 1984; Gomes, 1984a; Tiago de Oliveira, 1984b,c; Tiago de Oliveira & Gomes, 1984; Turkman, 1984).

Nesse Prefácio pode-se ainda ler: ‘... *the narrow and shallow stream (of extremes) gained momentum and is now a huge river, enlarging at every moment and flooding the margins*’. E Tiago de Oliveira termina o Prefácio com agradecimentos aos elementos do recém formado DEIOC da FCUL, agora DEIO, dizendo: ‘...*it is a very good group that crossed the desert during the organization time and continues to work on ...*’



A ânsia de publicação era então reduzida. Na realidade, dois dos resultados mais relevantes contidos na minha tese de 1978,

- a determinação da distribuição conjunta das estatísticas ordinais de topo e seus concomitantes
- e o estudo da velocidade de convergência e comportamento pré-assintótico de sucessões de extremos,

só foram publicados em 1981 e 1984 (Gomes, 1981; 1984b), respetivamente. Este segundo resultado esclareceu uma questão levantada por Sir Ronald Fisher, no seu trabalho seminal com Tippett, de 1928. E esclarecer uma questão que ao longo de 50 anos tinha sido abordada com êxito limitado por vários especialistas, colocou-me no radar de atenção de alguns dos gurus na área, nomeadamente Herbert David, Janos Galambos, Laurens de Haan, Ross Leadbetter, todos participantes da SEA 1983. E é verdade que essa questão continuou e ainda continua a dar frutos, com aplicações recentes à fiabilidade de sistemas coerentes de dimensão elevada (veja-se Reis *et al.*, 2015, e Gomes, 2020, entre outros). Contudo, tal como se pode ver em Gomes (2021), no período de 10 anos, desde 1975 até 1984, e incluindo ‘quase todo’ o material publicado na área de *Extremos*, e escrito por membros da comunidade portuguesa, contei 43 publicações, que não irei aqui referir. Mas 20 dessas publicações (ou seja, cerca de 47%) são da coautoria de Tiago de Oliveira.

Na altura, nesse já distante 1983, a comunidade de ‘*extremistas*’ apenas despontava. Foram quinze dias de intenso intercâmbio de ideias, que renovaram o meu enorme entusiasmo pela *Teoria de Valores Extremos e Aplicações*. E a *Teoria dos Valores Extremos* (EVT, do Inglês ‘*Extreme Value Theory*’) tem-se desenvolvido rapidamente nas últimas décadas devido à sua importância na avaliação de riscos catastróficos nas mais variadas atividades humanas, de entre as quais menciono, *Dinâmica de Populações, Economia, Finanças, Indústria, Saúde e Seguros*. A EVT é essencial para a construção de grandes estruturas em que é necessário avaliar níveis de excedência por exemplo de velocidades de ventos ou de caudais de rios durante cheias. E invadiu quase todos os campos da esfera das ciências e tecnologias de que depende a sobrevivência coletiva, e em que são relevantes quaisquer parâmetros de acontecimentos raros. Por isso congratulamo-nos com o importante impacto internacional do ‘*extremismo*’ português, cujo sucesso espero que seja cada vez mais visível.

Nesse já longínquo 1983, a investigação em *Matemática* era habitualmente mais solitária do que atualmente. Ainda não estava instituída a moda de colaborações internacionais. De qualquer modo a publicação de trabalhos conjuntamente com Martin van Montfort (van Montfort & Gomes, 1985; Gomes & van Montfort, 1986), da Universidade de Wageningen, e a minha colaboração com Laurens de Haan, da Universidade Erasmus de Roterdão, foram decerto consequências auspiciosas desse longo congresso. Relativamente a publicações conjuntas com Laurens de Haan, limito-me a referir as edições de livros de resumos alargados de conferências internacionais por nós organizadas (Gomes *et al.*, Eds., 2003; Fraga Alves *et al.*, Eds., 2007b, 2011) e os artigos em revistas internacionais (Gomes & de Haan, 1999; Gomes *et al.*, 2002, 2004, 2006b, 2008b; Fraga Alves *et al.*, 2003, 2007a, 2009).

Atrevo-me a dizer novamente (veja-se, Gomes, 2005, 2007, 2013b, 2017, 2021) que a organização da SEA 1983, com duas quartas-feiras à tarde e dois fins de semana incluídos e repletos de programa social, de que fui responsável, embora me tivesse ‘traumatizado’ de tal modo que só a partir de 1999 me atrevi a avançar com a organização de conferências em Portugal, constitui na realidade o marco de lançamento daquilo que penso poder hoje considerar-se a PORTSEA, com uma vida ativa de quase 40 anos. E repetindo o que já disse em várias situações (veja-se, por exemplo, Fraga Alves & De Carvalho, 2015; Freitas ACM & Freitas JM, 2018; Lourenço, 2022), é verdade que quando Richard Davis, um dos organizadores do EVA 2009, que decorreu no Colorado, USA, falou sobre a conferência do Vimeiro como EVA-0, e quando li na página do EVA 2013: ‘*It has been 30 years since the so-called zero-th EVA conference took place in 1983 in Vimeiro, a small town near the beach in Portugal*’ ... senti na realidade alguma ‘Nostalgia’ ...

No lançamento da PORTSEA, não posso também de forma alguma esquecer o papel da Margarida Brito (Universidade do Porto), com tese de Doutoramento defendida na Universidade de Paris VI, em 1987

(Brito, 1987), sob a orientação de Paul Deheuvels, outro eminente investigador na área de Extremos. E a partir do início dos anos 80, o investimento inspirado pela reforma de Veiga Simão começou a frutificar em Portugal, no sentido em que se criaram grupos com a massa crítica que permitiu que a par de Doutoramentos nos melhores centros estrangeiros, começasse a ser ‘banal’ orientar Doutoramentos em Portugal. A primeira doutorada em *Extremos* em Portugal, a Teresa Alpuim (Alpuim, 1989), foi orientada por mim, na FCUL, seguindo-se pouco tempo depois a Manuela Neves (Neves MM, 1990), do *Instituto Superior de Agronomia, Universidade Técnica de Lisboa*, agora ULisboa, orientada por Tiago de Oliveira, na UNL. Doutoraram-se em seguida, na FCUL, a Luísa Canto e Castro (Canto e Castro, 1992) e a Isabel Fraga Alves (Fraga Alves, 1992), sob minha orientação, e a Fernanda Oliveira (Oliveira F, 1992), sob orientação de Feridun Turkman. Dois outros alunos de Tiago de Oliveira, membros da FCUL, a Isabel Barão e a Teresa Themido Pereira, terminaram as suas teses já sob minha orientação (Barão, 1993; Themido Pereira, 1994). Doutoraram-se em seguida, a Emília Athayde (Athayde, 1994), também na FCUL, e a Helena Ferreira (Ferreira H, 1994), na Universidade de Coimbra, ambas sob minha orientação.

Este foi o começo do ‘extremismo’ português. Sob orientação direta de alguns dos investigadores atrás citados, já com ‘netos’, ‘bisnetos’ e ‘trinotos científicos’, criou-se uma *Escola de Extremos em Portugal*, reconhecida internacionalmente, cujos membros estão espalhados por todas as universidades portuguesas, e mesmo pelo mundo. Para alguns, a passagem pelo universo dos *Extremos* foi fugaz, orientando os seus interesses para outras áreas, mas a maioria dos doutorados na área continuaram a publicar firmemente no vasto leque de *Extremos e Aplicações*, e muitos outros cuja atividade habitual se centra em outras áreas têm ocasionalmente produzido trabalho em *Extremos*.

### 3. O Crescimento da PORTSEA

Gostaria de começar por referir que Laurens de Haan, um dos gigantes da área, veio trabalhar para Portugal em 1999, inserindo-se no CEAUL. Face à elevada cooperação científica entre Laurens e membros da comunidade Estatística em Portugal, o DEIO propôs que lhe fosse concedido o título de ‘*Doutor Honoris Causa*’ da ULisboa. Foi-lhe conferido esse título em 2000, e em 2013 também outro gigante dos Extremos, Ross Leadbetter, honrou a ULisboa ao aceitar a mesma distinção, pois sem dúvida, e tal como escrevi em 2013 (Gomes, 2013a) na Info-Ciências Digital, ‘... quando a universidade honra investigadores desta importância está também a honrar-se’. O Grupo tem, pois, dois dos ‘*Doutor Honoris Causa*’ da ULisboa, um dos quais, Ross Leadbetter, faleceu em Fevereiro de 2022 (veja-se Gomes, 2022a, b; Gomes & Turkman, 2022), com 90 anos de idade.

E voltando novamente atrás no tempo: após o meu regresso de Sheffield em fins de 1978, e excetuando alguns detalhes relacionados com a orientação de alguns dos meus alunos de Doutoramento, a minha investigação na área de *Estatística de Extremos* estava essencialmente centrada em modelos probabilísticos e modelos estatísticos de índole paramétrica. A inflexão feita na minha carreira, para a área de inferência semi-paramétrica, foi essencialmente devida a um convite de Laurens de Haan, para proferir um Seminário em Roterdão, em finais de 1998. Andava na altura interessada na metodologia Jackknife e sua possível aplicação em extremos, e pensei que um desafio interessante seria abordar a referida metodologia em âmbito semi-paramétrico, tão querido à ‘*Escola de Extremos*’ da Holanda, liderada por Laurens de Haan. Assim fiz, tendo conseguido um primeiro artigo relevante publicado na *Revista de Estatística* (Gomes, 1999), e tendo-me mantido desde essa altura na área, em estreita colaboração com Laurens de Haan durante vários anos.

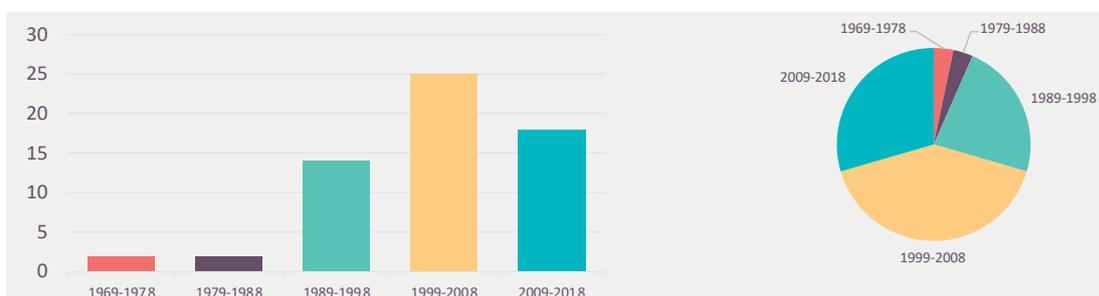
#### 3.1. Doutoramentos

Desde o início de 1994 até ao fim de 2003, num período de 10 anos, o número de Doutoramentos em Portugal cresceu a bom ritmo. Incluindo as duas teses de Doutoramento de alunos estrangeiros (Gerritt Draisma e Tao Lin) co-orientadas por Laurens de Haan desde 1999 até 2003, contabilizei em Gomes (2021), 21 teses de Doutoramento, que não vou mencionar em detalhe. Depois de 2004 e até ao fim de

2018, num período de 15 anos, e mesmo incluindo as três teses de Doutoramento, de Deyuan Li, Chen Zhou and Juan-Juan Cai, orientadas por Laurens de Haan, a taxa de crescimento dos doutoramentos decresceu. Foram, no entanto, **29** as teses de Doutoramento referenciadas em [Gomes \(2021\)](#) durante esse período.

Na realidade, tendo como base um núcleo vasto de investigadores, este grupo de investigação em *Extremos* tem-se desenvolvido de uma forma salutar. Incluindo a minha tese e a de Feridun Turkman, contabilizei até ao fim de 2003 ([Gomes, 2005](#)), **28** teses de Doutoramento na área (**13** das quais no período 1999-2003, com uma taxa elevada de 2.6 teses/ano), escritas por investigadores portugueses. Incluindo agora a tese de Laurens de Haan ([de Haan, 1970](#)) e as duas teses por ele supervisionadas, concluídas em 2001 e 2002 e já atrás referidas, contei em [Gomes \(2021\)](#), **31** teses de Doutoramento na área e nesse mesmo período (**15** das quais no período 1999-2003, com uma taxa de 3 teses/ano).

E essa taxa cresceu para 3.4 no período de 5-anos que terminou em 2005. Houve então um leve decréscimo dessa taxa, com cerca de 1.6 teses/ano nos períodos de 5-anos seguintes. Mas como ‘*um gráfico vale mil palavras*’, apresento a **Figura 3**.



**Figura 3.** Número de teses de Doutoramento (*esquerda*) e percentagens (*direita*), ao longo de períodos de 10 anos, com começo em 1969 e até finais de 2018

O número de Agregações não tem sido tão elevado como seria de esperar. Para além dos **5** membros iniciais do grupo, consegui contabilizar só **11** Agregações (Teresa Alpuim, 2002; Manuela Neves, 2003; Isabel Fraga Alves, 2003; Helena Ferreira, 2004; Luísa Pereira, 2008; Manuel Scotto, 2012; Jorge Milhazes de Freitas, 2014; Ana Cristina Moreira Freitas, 2014; Fátima Brilhante, 2015; Ana Ferreira, 2016; Miguel De Carvalho, 2018). Mas posso ter esquecido alguém e acredito que alguns dos membros da PORTSEA obterão em breve esse grau.

### 3.2. Organização de Conferências

Depois da organização do NATO ASI (SEA 1983), Feridun Turkman e Vic Barnett, então na Universidade de Sheffield, organizaram em 1993, e em Lisboa, um Encontro SPRUCE em ‘*Statistics for the Environment*’, onde a área de *Extremos* gozou de papel relevante (veja-se, [Barnett & Turkman, Eds., 1993](#)). E durante os anos seguintes, e até 1999, vários encontros SPRUCE foram coorganizados por Feridun Turkman, e vários elementos da PORTSEA participaram na organização de várias conferências, mas todas fora de Portugal.

Podemos, no entanto, dizer que, depois de um longo interregno de 15 anos, estas duas últimas décadas têm sido frutuosas na organização de conferências internacionais em Portugal na área de *Extremos*, com inclusão da área de *Análise do Risco*, onde os extremos são sem dúvida relevantes. As **5** organizações referidas em [Gomes \(2007\)](#) são **14** em [Gomes \(2021\)](#).

E não posso deixar de voltar à entrevista feita pela Isabel Natário, para realçar a diferença, que é recentemente menos significativa, entre o que se passava em Portugal e no estrangeiro anteriormente ao

ano 2000, relativamente ao número de mulheres e homens. O primeiro encontro internacional de extremos para que fui convidada, a *Conference on Extremewertheorie*, que ocorreu em 1987, em Oberwolfach, Alemanha, tinha unicamente 2 mulheres, a Ursula Gather e eu própria, entre os cerca de 50 convidados, ou seja, 5% de mulheres, tal como se pode depreender da **Figura 4**.



**Figura 4.** Foto de participantes na *Conference on Extremewertheorie*, Oberwolfach, 1987

Este número diminuto de mulheres deixou-me um pouco ‘traumatizada’, pois nessa altura, em Lisboa, o Professor Tiago de Oliveira tinha quatro alunas de doutoramento na área, eu tinha três, o Dinis tinha duas, uma das quais a trabalhar parcialmente na área de *Extremos*, e o Feridun tinha uma, também na área de *Extremos*.

Mas a EVT 2013 (*Extremes in Vimeiro Today*), organizada pelas minhas colegas e grandes amigas, Antónia Amaral Turkman, Isabel Fraga Alves e Manuela Neves, para recordar os trinta anos do encontro do Vimeiro em 1983, é outro dos grandes marcos da PORTSEA (veja-se, [Fraga Alves & Neves MM, Eds., 2013](#)), e ‘destraumatizou-me’.



**Figura 5.** Foto de participantes na EVT 2013 (*Extremes in Vimeiro Today*)

Na realidade, não posso deixar de referir que:

1. Dos quarenta participantes no SEA 1983, 30% eram jovens, mas só dez (25%) eram mulheres, sete das quais vieram a ser (ou eram) alunas de Doutoramento em Portugal.
2. E dos oitenta e um participantes no EVT 2013, mais de 50% eram mulheres, sendo superior a 40% o número de jovens, algo que vi como muito promissor para o futuro da área ...

Foi para mim muito gratificante ver tantas mulheres e ainda mais entusiasmante ver tanta gente jovem entre ‘*extremistas*’, não só portugueses, mas mundiais ... Penso que isto significa que área está bem viva e é muito promissora.

Também não posso deixar de mencionar:

- A III *International Conference on Extreme Value Analysis* (EVA 2004), que se realizou em Aveiro e em que os ‘*extremistas*’ e membros da PORTSEA Andreia Hall e Manuel Scotto tiveram papel de relevo (Hall *et al.*, Eds., 2004a).
- A 5th *International Conference on Risk Assessment* (ICRA5), que ocorreu em 2013, em Tomar, após 4 encontros organizados pelo ‘*Committee on Risk Analysis*’ (CRA) do ‘*International Statistical Institute*’ (ISI), de que fui Vice-Presidente desde 2015 até 2017. A ICRA5 foi organizada como parte das *Celebrações do Ano Internacional da Estatística*, e realço aqui o papel relevante da Teresa Oliveira, atualmente ‘*Chair*’ do ISI-CRA, e que também considero membro da PORTSEA (Oliveira T *et al.*, Eds., 2013). Veja-se também a edição do livro, Kitsos *et al.* (2015), e os artigos de membros da PORTSEA nele incluídos (Caeiro & Prata Gomes; Figueiredo & Gomes; Fraga Alves & Rosário; Gomes *et al.*; Mendonça *et al.*; Prata Gomes & Neves M, 2015).
- Finalmente, a última conferência internacional realizada em Portugal na área, o ‘*Workshop on New Frontiers in Statistics of Extremes* (WNFSE 2020)’, organizado pelos ‘*extremistas*’ Patrícia de Zea Bermudez e Miguel de Carvalho, actual Presidente da *Sociedade Portuguesa de Estatística* (SPE), decorreu em Fevereiro de 2020, em Lisboa, pouco antes de entrarmos em confinamento, devido à COVID-19, e deixou-me extremamente satisfeita e grata, ao ver que a PORTSEA continua bem viva, e com colaboração muito ativa de vários investigadores do Banco de Portugal.

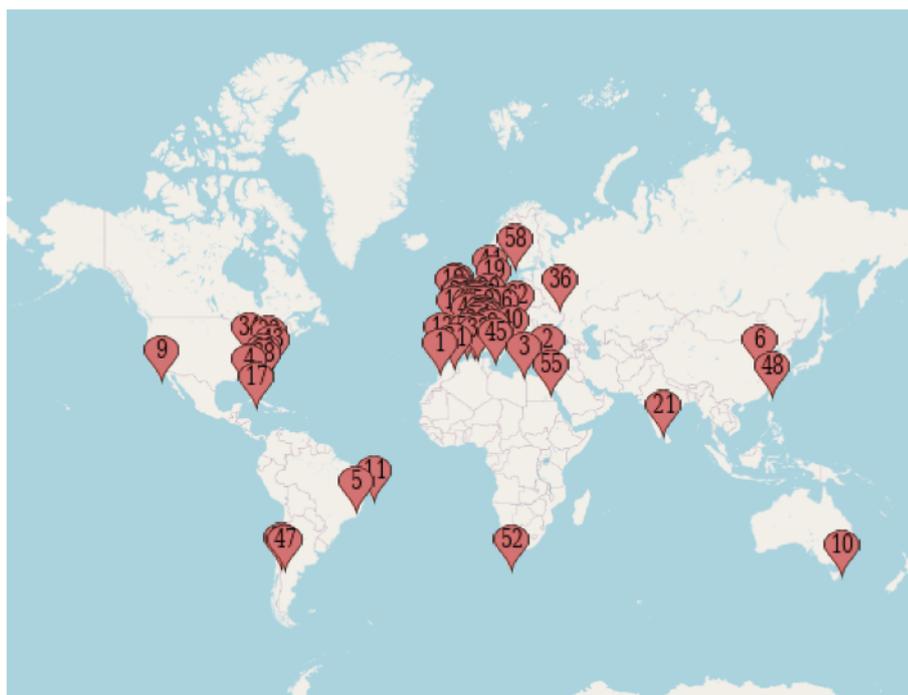
Internacionalmente, refiro unicamente o seguinte:

- Todas as conferências EVA, organizadas desde 1998, têm tido membros da nossa PORTSEA nas suas Comissões Científicas. E o mesmo aconteceu com a EVA 2021, que decorreu virtualmente em Edimburgo, em Junho, e que adicionalmente teve dois elementos da PORTSEA, o Miguel de Carvalho e a Cláudia Neves, na Comissão Organizadora.
- A ‘*CIRM International Conference on Extreme Value Theory and Laws of Rare Events*’, que ocorreu em 2012, em Marselha, teve na Comissão Organizadora dois outros elementos da PORTSEA, ambos da Universidade do Porto, a Ana Cristina Moreira Freitas e o Jorge Milhazes Freitas, considerado por muitos, e também por mim, um dos fundadores dos *Extremos em Sistemas Dinâmicos*, e Membro Correspondente da ACL desde Janeiro de 2020.
- A ‘*7th International Conference on Risk Analysis* (ICRA7)’, ocorreu em Chicago, em Maio de 2017, em minha homenagem, com a Teresa Oliveira na Comissão Executiva. E como a *Análise do Risco* não é o meu tema principal de investigação, esta homenagem internacional teve um sabor especial, pois pareceu-me mais um reconhecimento global da minha contribuição para a *Probabilidade e a Estatística*.

#### 4. O Coração da PORTSEA

A excelência dos alunos de Doutoramento que temos tido é na realidade o que mais tem contribuído para a internacionalização da ‘*Escola de Extremos*’ em Portugal. Mas não posso, no entanto, deixar de referir a importância da coorientação de uma grande diversidade de alunos estrangeiros pós-graduados, de diferentes Universidades: Charles University Prague, Fudan University of Xanghai, KULeuven, Marne-la-Vallée, Montpellier, Pierre-et-Marie-Curie, Siegen, entre outras. Com o passar dos anos, e o avolumar

de publicações, a colaboração com investigadores de outros países tem tido um grande incremento, como se pode ver na **Figura 6**, onde representei **65** universidades a que pertencem coautores de elementos da PORTSEA, em artigos publicados em revistas científicas de prestígio elevado.



**Figura 6.** Universidades de coautores de elementos da PORTSEA

O envolvimento de vários elementos da PORTSEA na edição de revistas científicas é uma outra fonte de satisfação. De entre o vasto leque de revistas onde membros da PORTSEA têm tido papel de relevo, realço unicamente:

- O facto de três desses membros, a Ana Ferreira, o Laurens de Haan e eu própria, estarem no corpo de Editores Associados da *Extremes*, a mais prestigiada revista da área.
- E o facto de ter sido Editor-Chefe da *Revstat—Statistical Journal*, desde 2003 até final de 2018 (cargo atualmente ocupado por outro elemento da PORTSEA, a Isabel Fraga Alves), tendo conseguido colocar esta revista, editada pelo *Instituto Nacional de Estatística* (INE), com quem temos tido elevada colaboração, entre as revistas prestigiadas de *Estatística*, com fator de impacto no ‘ISI Web of Knowledge’ desde 2007.

Pensando só nas duas revistas científicas atrás referidas, *Extremes* e *Revstat—Statistical Journal*, gostaria de voltar a mencionar o que já foi dito em [Gomes \(2021\)](#), datado até finais de 2020:

- Encontrei **42** artigos com a co-autoria de membros da PORTSEA, publicados na revista *Extremes* (Beirlant *et al.*, 2016; Caeiro & Gomes, 2006a; Caeiro *et al.*, 2016; Cai *et al.*, 2013, 2020; Canto e Castro & Dias, 2011; Dietrich *et al.*, 2002; Draisma *et al.*, 1999; Drees *et al.*, 2018; Einmahl *et al.*, 2013; Ferreira A & Huang, 2018; Ferreira H, 2000; Ferreira M & Canto e Castro, 2008; Fraga Alves, 2001; Fraga Alves & De Carvalho, 2015; Fraga Alves *et al.*, 2009, 2017; Gomes & de Haan, 1999; Gomes & Henriques-Rodrigues, 2008; Gomes & Martins, 2002; Gomes & Oliveira, 2001; Gomes *et al.*, 2000, 2002, 2008a, 2012; de Haan, 2006; de Haan *et al.*, 2009, 2015; Hall, 2001, 2003; Hall *et al.*, 2004b; Leng *et al.*, 2019; Pereira ML *et al.*, 2017; Ramos & Ledford, 2005; Turkman *et al.*, 2010; Valente de Freitas & Huesler, 2003; Veltohen *et al.*, 2019; de Vries & Zhou, 2006; de Zea Bermudez *et al.*, 2001; Zhou, 2008, 2017, 2018).
- No que concerne a *Revstat*, menciono as edições dos volumes **6:1** (Beirlant *et al.*, Eds., 2008), **10:1** (De Carvalho & Davison, 2012) e **14:2** (Kitsos *et al.*, Eds., 2016), bem como coautoria de **39** artigos (Araújo Santos *et al.*, 2006; Beirlant *et al.*, 2012; Brilhante, 2004; Brilhante *et al.*, 2019; Caeiro & Gomes, 2008a; Caeiro *et al.*, 2005; Caetano & de Zea Bermudez, 2019; Cordeiro & Neves MM, 2009;

De Carvalho & Ramos, 2012; Ferreira H, 2006; Ferreira H & Ferreira M, 2020; Ferreira H & Martins AP, 2003; Ferreira M, 2010, 2013, 2018; Ferreira M *et al.*, 2012; Figueiredo & Gomes, 2013; Figueiredo *et al.*, 2017; Fraga Alves *et al.*, 2007a; Gomes *et al.*, 2007, 2016; de Haan & Zhou, 2008; Hall and Scotto, 2006, 2008; Henriques-Rodrigues & Gomes, 2009b; Henriques-Rodrigues, 2011, 2014; Neves C & Fraga Alves, 2008; Oliveira A *et al.*, 2016; Oliveira O *et al.*, 2006; Penalva *et al.*, 2016, 2019, 2020; Pereira ML, 2004; Pereira S *et al.*, 2018; Reis & Canto e Castro, 2009; Scotto, 2007; Silva I & Silva ME, 2009; Turkman, 2014).

A PORTSEA tem atualmente vários nomes sonantes internacionalmente. Contabilizei mais de cinquenta teses de Doutorado na área ou em áreas muito afins, escritas por investigadores portugueses, e associadas a graus obtidos em Portugal e no estrangeiro. E o número atual de alunos de Doutorado e Mestrado na área, embora não tão elevado como uma década atrás, promete ainda o alargamento do grupo num futuro próximo. O número de Agregações não tem sido tão elevado quanto eu esperava. Para além dos cinco membros iniciais do Grupo, consegui contabilizar unicamente os onze investigadores com Agregação atrás referidos. Mas estou convicta que esse número aumentará em breve.

A dinâmica de publicação tem sido bastante elevada, nitidamente acima dos padrões médios internacionais, com mais de quinhentos artigos publicados em revistas internacionais de prestígio. Tal como descrito exaustivamente em Gomes (2021), limito-me a referir que foram oitenta e cinco os artigos publicados nos últimos dez anos (2011-2020), mais uma vez com a co-autoria de unicamente três dos membros da PORTSEA, dois dos três pioneiros da área em Portugal (face ao falecimento de Tiago de Oliveira em 1992), e com a inclusão de Laurens de Haan, membro da PORTSEA, ainda ativo, e ‘*Doutor Honoris Causa* da ULisboa’. E desta vez sou coautora em 54 desses artigos (cerca de 64%). Realço ainda que até ao fim de 2006, e em Gomes (2007), tinha contabilizado 109 artigos em 40 revistas internacionais. Para superar esse número de publicações, só é necessário agora considerar as três revistas com maior número de artigos, *Extremes*, *Revstat—Statist. J* e *Statist. & Probab. Letters*.

Convém ainda registar que a nossa Escola de Extremos, apesar da elevada contribuição a nível internacional, não tem descurado a publicação a nível nacional. Esse contributo pode ser atestado pelas publicações de artigos em português, nas diferentes coletâneas de texto associadas a Congressos da SPE e editadas pela SPE desde 1992, onde a produção na área de *Extremos* foi, em média, de 17% por volume, até 2014. Devido a dificuldades em obter informação geral, limito-me a referir os 52 artigos em que sou coautora, com um total de 21 coautores e publicados (ou aceites) nas 25 ‘*Actas*’/Livros, associadas aos Congressos da SPE (Anuais, até 2013), quatro das/dos quais foram publicados em Inglês, pela Springer (Araújo Santos *et al.*, 2007; Brilhante *et al.*, 2014; Cabral *et al.*, 2016, 2020, 2021; Caeiro & Gomes, 2003, 2004, 2005, 2006b, 2007, 2008b, 2013a,b, 2014, 2022; Caeiro *et al.*, 2009, 2022; Ferreira H *et al.*, 2006; Figueiredo & Gomes, 2005; Figueiredo *et al.*, 2007; Fraga Alves & Gomes, 1995; Gomes, 1993a,b, 1995, 1996, 2002, 2014b; Gomes & Figueiredo, 2004; Gomes & Henriques-Rodrigues, 2005, 2007, 2013; Gomes & Miranda, 2003; Gomes & Neves C, 2007; Gomes & Pestana, 2009; Gomes *et al.*, 2006a, 2013a,b, 2021; Henriques-Rodrigues & Gomes, 2009a, 2013, 2014; Martins *et al.*, 1998, 2004; Miranda & Gomes, 2007, 2009; Miranda *et al.*, 2004; Neves MM *et al.*, 2000; Oliveira O & Gomes, 2004; Temido *et al.*, 2000; Souto de Miranda *et al.*, 2022; Viseu & Gomes, 2006, 2007).

Também não posso deixar de referir cinco livros relevantes, com membros da PORTSEA entre os coautores: um livro genérico da autoria de Laurens de Haan e Ana Ferreira (de Haan & Ferreira, 2006), com mais de 2500 citações, e publicado pela Springer; um livro em Português (Gomes *et al.*, 2013c), com a coautoria de Ivette Gomes, Isabel Fraga Alves e Cláudia Neves, também genérico e associado a curso breve ministrado no XXI Congresso Anual da SPE; um livro sobre *Extremos de Séries Temporais Não Lineares* (Turkman *et al.*, 2014), com a coautoria de Feridun Turkman, Manuel Scotto e Patrícia de Zea Bermudez, editado pela Springer; um outro sobre *Extremos em Sistemas Dinâmicos* (Lucarini *et al.*, 2016), editado pela Wiley, em que a Ana Cristina Moreira Freitas e o Jorge Milhazes Freitas são coautores; e

um último sobre *Avaliação de Risco e Extremos* (Jacob *et al.*, 2020), editado pela Springer, em que a Cláudia Neves é coautora.

Os campos da *Teoria de Valores Extremos*, em que a contribuição da PORTSEA tem sido importante, são muito diversificados. Para além de um vasto grupo com trabalho inovador na área de *Estimação Paramétrica, Semi-Paramétrica e Não-Paramétrica de Diversos Parâmetros de Acontecimentos Extremos*, a PORTSEA tem grupos fortes nas áreas de

- *Comportamento Probabilístico de Estatísticas Ordinárias e Recordes*,
- *Comportamento Pré-assintótico e Velocidade de Convergência em Teoria de Valores Extremos*,
- *Escolha Estatística em Modelos Extremos*,
- *Estatística de Extremos Multivariados*,
- *Estatística de Extremos Univariados com Base em Modelos Multivariados, Multidimensionais e outros Modelos não clássicos*,
- *Extensões da Classe de Modelos Max-estáveis*,
- *Extremos e Ambiente*,
- *Extremos e Controlo Estatístico da Qualidade*,
- *Extremos e Modelação de Risco*,
- *Extremos em Processos Estocásticos*,
- *Extremos em Sistemas Dinâmicos*,
- *Extremos em Sucessões Dependentes*,
- *Extremos Espaciais*,
- *Métodos Bayesianos em Estatística de Extremos*,
- *Métodos Diversos de Estimação Semi-paramétrica de Viés Reduzido*,
- *Papel das Metodologias Jackknife e Bootstrap em Estatística de Extremos*.

E, a título de previsão, espero que surja em breve um grupo de *Extremos em Genética* e outro de *Extremos em Situações Epidémicas*.

Face aos resultados apurados sou levada a crer que a nossa ‘*Escola de Extremos e Aplicações*’ tem na realidade conseguido um crescimento salutar da área. O dinamismo do Grupo tem permitido um elevado reconhecimento internacional da Escola de Extremos em Portugal, um país de ‘*bons extremistas*’ num extremo da Europa.

**Agradecimentos.** Investigação parcialmente financiada através de fundos nacionais, FCT—Fundação para a Ciência e a Tecnologia, projeto UID/MAT/00006/2020 (CEA/UL).

## Referências

- [1] Alpuim MT (1989). *Contribuições à Teoria de Extremos em Sucessões Dependentes*. Tese de Doutoramento, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa.
- [2] Amaral MA, Barroso HM, Carvalho ML, Gomes MI, Mueller D & Veiga de Oliveira MF (1974). Um processo de gerar números pseudo-aleatórios e seus testes—fundamentos e resultados. *Gazeta de Matemática* **129-132**, 21-46.
- [3] Araújo Santos P, Fraga Alves MI & Gomes MI (2006). Peaks over random threshold methodology for tail index and quantile estimation. *Revstat—Statist. J.* **4:3**, 227-247.
- [4] Araújo Santos P, Fraga Alves MI & Gomes MI (2007). Comparação do desempenho de diferentes níveis aleatórios na metodologia PORT. Em Ferrão ME, Nunes C & Braumann CA (eds.), *Estatística—Ciência Interdisciplinar*, Edições S.P.E., 607-618.
- [5] Athayde ME (1994). *Estudo de algumas Sucessões Markovianas com Relevo para a Teoria de Extremos*. Tese de Doutoramento, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa.
- [6] Barão MI (1993). *Comparação de Populações de Gumbel*. Tese de Doutoramento, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa.

- [7] Barnett V & Turkman KF, Eds. (1993). *Statistics for the Environment*. J. Wiley and Sons, Chichester.
- [8] Beirlant J, Fraga Alves MI & Leadbetter R, Eds. (2008). Special Issue on ‘Statistics of Extremes and Related Fields’. *Revstat—Statistical Journal* 6:1, Instituto Nacional de Estatística.
- [9] Beirlant J, Caeiro F & Gomes MI (2012). An overview and open research topics in the field of statistics of univariate extremes. *Revstat—Statist. J.* 10:1, 1-31
- [10] Beirlant J, Fraga Alves MI & Gomes MI (2016). Tail fitting for truncated and non-truncated Pareto-type distributions. *Extremes* 19:3, 429-462.
- [11] Brillhante MF (2004). Exponential versus generalized Pareto -- a resistant and robust test. *Revstat—Statist. J.* 2:1, 1-13.
- [12] Brillhante MF, Gomes MI & Pestana DD (2014). The mean-of-order  $p$  extreme value index estimator revisited. In Pacheco A, Oliveira MR, Santos R & Paulino CD (eds.), *New Advances in Statistical Modeling and Application*. Studies in Theoretical and Applied Statistics, Selected Papers of the Statistical Societies, Springer-Verlag, Berlin, and Heidelberg, 163-175.
- [13] Brillhante MF, Gomes MI & Pestana DD. (2019). Modelling risk of extreme events in generalized Verhulst models. *Revstat—Statist. J.* 17:2, 145-162.
- [14] Brito M (1987). *Encadrement Presque Sûr des Statistiques d'Ordre*. Université de Paris VI.
- [15] Cabral I, Caeiro F & Gomes MI (2016). Redução do viés do estimador de Hill: uma nova abordagem. Em Cordeiro C, Ribeiro C, Sousa C, Gonçalves MH, Antunes N & Silva ME (eds.), *Estatística: Progressos e Aplicações*, Atas do XXII Congresso da Sociedade Portuguesa de Estatística, Edições UAIG e SPE, 73-84.
- [16] Cabral I, Caeiro F & Gomes MI (2020). Generalização do estimador de Hill, baseada na média de Lehmer: Resultados adicionais. Em Salgueiro MF, Vicente P, Calapez T, Marques C & Silva ME (eds.), *Atas do XXIII Congresso da Sociedade Portuguesa de Estatística*, Edições SPE, ISBN: 978-972-8890-46-9, pp.129-144.
- [17] Cabral I, Caeiro F & Gomes MI (2021). Comparação assintótica de duas classes de estimadores de um parâmetro de forma de segunda-ordem. Em P. Milheiro, A Pacheco, B de Sousa, I Fraga Alves, I Pereira, MJ Polidoro & S Ramos (eds.), *Estatística: Desafios Transversais às Ciências com Dados—Atas do XXIV Congresso da Sociedade Portuguesa de Estatística*. ISBN: 978-972-8890-47-6, Edições SPE, pp. 107-120.
- [18] Caeiro F & Gomes MI (2003). Redução do viés em Estatística de Extremos com recurso à estimação externa de um parâmetro de segunda ordem. Em Brito P *et al.* (eds.), *Literacia e Estatística*, Edição S.P.E., 201-214.
- [19] Caeiro F & Gomes MI (2004). Influência da não invariância do estimador de Hill na estimação do índice de cauda. Em Rodrigues P *et al.* (eds.), *Estatística com Acaso e Necessidade*, Edições S.P.E., 123-134.
- [20] Caeiro F & Gomes MI (2005). Uma classe de estimadores do parâmetro de escala de segunda ordem. Em Braumann C, Infante P, Oliveira MM, Alpizar-Jara R & Rosado F (eds.), *Estatística Jubilar*, Edições S.P.E., 113-124.
- [21] Caeiro F & Gomes MI (2006a). A new class of estimators of a 'scale' second order parameter. *Extremes* 9, 193-211.
- [22] Caeiro F & Gomes MI (2006b). Estimação de quantis elevados em estatística de extremos. Em Canto e Castro, L. *et al.* (eds.), *Ciência Estatística*, Edições S.P.E., 217-228.
- [23] Caeiro F & Gomes MI (2007). Correção do viés do estimador de Hill em contexto de terceira ordem. Em Ferrão ME, Nunes C & Braumann CA (eds.), *Estatística—Ciência Interdisciplinar*, 269-280.
- [24] Caeiro F & Gomes MI (2008a). Minimum-variance reduced-bias tail index and high quantile estimation. *Revstat—Statist. J.* 6:1, 1-20.
- [25] Caeiro F & Gomes MI (2008b). Caudas pesadas:  $t$  de Student e variantes assimétricas versus metodologia semi-paramétrica. Em Hill MM *et al.* (eds.), *Estatística: da Teoria à Prática*, Edições S.P.E., 127-136.
- [26] Caeiro F & Gomes MI (2013a). A class of semi-parametric probability weighted moment estimators. In Oliveira P, Temido MG, Henriques C & Vichi M (eds.), *Recent Developments in Modeling and Applications in Statistics*, Studies in Theoretical and Applied Statistics: Subseries B. Springer, 139-147.
- [27] Caeiro F & Gomes MI (2013b). Asymptotic comparison at optimal levels of minimum-variance reduced-bias tail index estimators. In Lita da Silva J, Caeiro F, Natário I & Braumann CA (Eds.), *Advances in Regression, Survival Analysis, Extreme Values, Markov Processes and Other Statistical Applications*, Studies in Theoretical and Applied Statistics, Selected Papers of the Statistical Societies, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 83-91.
- [28] Caeiro F & Gomes MI (2014). A semi-parametric estimator of a shape second order parameter, In Pacheco A, Oliveira MR, Santos R & Paulino CD (eds.), *New Advances in Statistical Modeling and Application*. Studies in Theoretical and Applied Statistics, Selected Papers of the Statistical Societies, Springer-Verlag, Berlin, and Heidelberg, 137-144.
- [29] Caeiro F & Prata Gomes D (2015). A Log Probability Weighted Moment Estimator of Extreme Quantiles. In Kitsos C *et al.* (eds.), *Theory and Practice of Risk Assessment*, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 136, Springer International Publishing, Switzerland, pp. 293-304.

- [30] Caeiro, F. & Gomes, M.I. (2022). Computational study of the adaptive estimation of the Extreme Value Index with Probability Weighted Moments. In R Bispo, L Henriques-Rodrigues, R. Alpizar-Jara and M. De Carvalho (eds.), *Recent Developments in Statistics and Data Science*. SPE 2021, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol 398, Springer, Cham, Chapter 3, pp. 29-39.
- [31] Caeiro F, Gomes MI & Pestana D (2005). Direct reduction of bias of the classical Hill estimator. *Revstat—Statist. J.* 3:2, 113-136.
- [32] Caeiro F, Gomes MI & Pestana DD (2009). Alguns resultados adicionais sobre a variância de um estimador de viés reduzido do índice de cauda. Em Oliveira I, Correia E, Ferreira F, Dias S & Braumann CA (eds.), *Estatística: Arte de Explicar o Acaso*, Edições S.P.E., 167-177,
- [33] Caeiro F, Gomes MI, Beirlant J & de Wet T (2016). Mean-of-order- $p$  reduced-bias extreme value index estimation under a third-order framework. *Extremes* 19:4, 561-589.
- [34] Caeiro, F., Gomes, M.I. & Henriques-Rodrigues, L. (2022). Estimation of the Weibull Tail Coefficient through the Power Mean-of-Order- $p$ . In R Bispo, L Henriques-Rodrigues, R. Alpizar-Jara and M. De Carvalho (eds.), *Recent Developments in Statistics and Data Science*. SPE 2021, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol 398, Springer, Cham, Chapter 4, pp. 41-53.
- [35] Caetano CP & Zea Bermudez P de (2019). Modeling large values of systolic blood pressure in the portuguese population. *Revstat—Statist. J.* 17:2, 163-186.
- [36] Cai J-J, Haan L de & Zhou C (2013). Bias correction in extreme value statistics with index around zero. *Extremes* 16:2, 173-201.
- [37] Cai J-J, Wan P & Ozel G (2020). Parametric and non-parametric estimation of extreme earthquake event: the joint tail inference for mainshocks and aftershocks. *Extremes* 24, 199-214.
- [38] Canto e Castro L (1992). *Velocidades de Convergência em Teoria de Valores Extremos*. Tese de Doutoramento, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa.
- [39] Canto e Castro, L. & Dias, S (2011). Generalized Pickands' estimators for the tail index parameter and max-semistability. *Extremes* 14:4, 429-449.
- [40] Cordeiro C & Neves MM (2009). Forecasting time series with Boot.EXPOS procedure. *Revstat—Statist. J.* 7:2, 135-149.
- [41] De Carvalho M & Davison AC, Eds. (2012). Special Issue on 'Collection of Surveys on Tail Event Modeling'. *Revstat—Statistical Journal* 10:1, Instituto Nacional de Estatística.
- [42] De Carvalho M & Ramos A (2012). Bivariate Extreme Statistics, II. *Revstat—Statist. J.* 10:1, 83-104.
- [43] Dietrich D, Haan L de & Huesler J (2002). Testing extreme value conditions. *Extremes* 5, 71-85.
- [44] Draisma G, Haan L de, Peng L & Themido Pereira T (1999). A bootstrap-based method to achieve optimality in estimating the extreme value index. *Extremes* 2:4, 367-404.
- [45] Drees H, Haan L de & Turkman KF (2018). Extreme value estimation for discretely sampled continuous processes. *Extremes* 21, 533-550.
- [46] Einmahl JHJ, Haan L de & Krajina A (2013). Estimating extreme multivariate quantile regions. *Extremes* 16, 121-146.
- [47] Ferreira A & Huang F (2018). Is human life limited or unlimited? (A discussion of the paper by Holger Rootzén and Dmitrii Zholud). *Extremes* 21:3, 373-382.
- [48] Ferreira H (1994). *Condições de Dependência Local em Teoria de Valores Extremos*. Tese de Doutoramento, Universidade de Coimbra.
- [49] Ferreira H (2000). A note on extremes of concomitants of order statistics. *Extremes* 3:4, 385-392.
- [50] Ferreira H (2006a). A new dependence condition for time series and the extremal index of higher-order Markov chains. *Revstat—Statist. J.* 4:2, 143-151.
- [51] Ferreira H & Ferreira M (2020). Dissecting the multivariate extremal index and tail dependence. *Revstat—Statist. J.* 18:4, 501-520.
- [52] Ferreira H & Martins AP (2003). The extremal index of sub-sampled periodic sequences with strong local dependence. *Revstat—Statist. J.* 1, 15-24.
- [53] Ferreira H, Hall A & Gomes MI (2006). Tudo sobre o meu príncipe, o Índice Extremal. Em Canto e Castro L *et al.* (eds.), *Ciência Estatística*, Edições S.P.E., 43.
- [54] Ferreira M (2010). Estimation of the parameter of a pARMAX model. *Revstat—Statist. J.* 8:2, 139-149.
- [55] Ferreira M (2013). Nonparametric estimation of the tail-dependence coefficient. *Revstat—Statist. J.* 11:1, 1-16.

- [56] Ferreira M (2018). Heuristic tools for the estimation of the extremal index: a comparison of methods. *Revstat—Statist. J.* **16**:1, 115-136.
- [57] Ferreira M & Canto e Castro L (2008). Tail and dependence behaviour of levels that persist for a fixed period of time. *Extremes* **11**:2, 113-133.
- [58] Ferreira M, Gomes MI & Leiva V (2012). On an extreme value version of the Birnbaum-Saunders distribution. *Revstat—Statist. J.* **10**:2, 181-210.
- [59] Figueiredo F & Gomes MI (2005). Estatística de Extremos: discrepância entre comportamento assintótico e exacto. Em Braumann C, Infante P, Oliveira MM, Alpizar-Jara R, Rosado F (eds.), *Estatística Jubilar*, Edições S.P.E., 299-310.
- [60] Figueiredo F & Gomes MI (2013). The skew-normal distribution in SPC. *Revstat—Statist. J.* **11**:1, 83-104.
- [61] Figueiredo F & Gomes MI (2015). The role of asymmetric families of distributions in eliminating risk to real data modelling. In Kitsos C *et al.* (eds.), *Theory and Practice of Risk Assessment*, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 136, Springer International Publishing, Switzerland, pp. 267-277.
- [62] Figueiredo F, Vandewalle B & Gomes MI (2007). Estimadores de viés reduzido para a probabilidade de excedência de um nível elevado. Em Ferrão ME, Nunes C & Braumann CA (eds.), *Estatística—Ciência Interdisciplinar*, Edições S.P.E., 389-400
- [63] Figueiredo F, Gomes MI & Henriques-Rodrigues L (2017). Value-at-risk estimation and the PORT mean-of-order- $p$  methodology. *Revstat—Statist. J.* **15**:2, 187-204.
- [64] Fisher RA & Tippett LHC (1928). Limiting forms of the frequency distributions of the largest or smallest member of a sample. *Proceedings Cambridge Philosophical Society* **24**, 180-190.
- [65] Fraga Alves MI (1992). *Inferência Estatística em Modelos Extremais*. Tese de Doutoramento, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa.
- [66] Fraga Alves MI (2001). A location invariant Hill-Type estimator. *Extremes* **4**:3, 199-217.
- [67] Fraga Alves MI & De Carvalho M (2015). An interview with Ivette Gomes. *Extremes* **18**:4, 563-583.
- [68] Fraga Alves MI & Gomes MI (1995). Escolha estatística de caudas no domínio de atracção da distribuição Gumbel. Em Mendes-Lopes N, Gonçalves E, Nogueira E, Rosa AC & Ferreira H (eds.), *II Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística: Actas*, 133-146.
- [69] Fraga Alves MI & Neves MM, Eds. (2013). *Extremes in Vimeiro Today: Extended Abstracts*. Edições CEAUL/INE, ISBN:978-989-733-023-0 (x+180 páginas).
- [70] Fraga Alves MI & Rosário P (2015). Parametric and Semi-parametric Approaches to Extreme Rainfall Modelling. In Kitsos C *et al.* (eds.), *Theory and Practice of Risk Assessment*, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 136, Springer International Publishing, Switzerland, pp. 279-292.
- [71] Fraga Alves MI, Gomes MI & de Haan L (2003). A new class of semi-parametric estimators of the second order parameter. *Portugaliae Mathematica* **60**:2, 193-213.
- [72] Fraga Alves MI, Gomes MI, de Haan L & Neves C (2007a). A note on second order conditions in extreme value theory: linking general and heavy tails conditions. *Revstat—Statist. J.* **5**:3, 285-305.
- [73] Fraga Alves MI, Gomes MI, de Haan L & Turkman KF, Eds. (2007b). *Statistical Extremes and Environmental Risk*. Edições CEAUL, ISBN:978-972-8859-69-5 (94 páginas).
- [74] Fraga Alves MI, Gomes MI, de Haan L & Neves C (2009). Mixed moment estimators and location invariant alternatives. *Extremes* **12**, 149-185.
- [75] Fraga Alves MI, Gomes MI, de Haan L & Neves C, Eds. (2011). *Risk and Extreme Values in Insurance and Finance: Book of Abstracts*. Edições CEAUL, ISBN: 978-989-8203-73-1, Depósito Legal: 325764 / 11 (x + 120 páginas).
- [76] Fraga Alves MI, Neves C & Rosário, P (2017). A general estimator for the right endpoint with an application to supercentenarian women's records. *Extremes* **20**:1, 199-237.
- [77] Fransén A & Tiago de Oliveira J (1984). Statistical choice of univariate extreme models II. In J Tiago de Oliveira (Ed.), *Statistical Extremes and Applications*, 373-394, D. Reidel, Dordrecht.
- [78] Fréchet M (1927). Sur la loi de probabilité de l'écart maximum. *Ann. Soc. Polon. Math.* **6**, 93-116.
- [79] Freitas ACM & Freitas JM (2018). An interview with Ivette Gomes. In Freitas JM. (ed.), *CIM Bulletin*, 36-41.
- [80] Gnedenko BV (1943). Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. *Ann. Math.* **44**, 423-453.
- [81] Gnedenko BV (1969). *The Theory of Probability*. MIR Publishers.
- [82] Gomes MI (1978). *Some Probabilistic and Statistical Problems in Extreme Value Theory*. PhD Thesis, University of Sheffield.

- [83] Gomes MI (1981). An i-dimensional limiting distribution function of largest values and its relevance to the statistical theory of extremes. In Taillie C, Patil GP & Baldessari BA (eds.), *Statistical Distributions in Scientific Work*, Vol. 6, D Reidel, Dordrecht, 389-410.
- [84] Gomes MI (1984a). Concomitants in a multidimensional extreme model. In J. Tiago de Oliveira (Ed.), *Statistical Extremes and Applications*, D. Reidel, Dordrecht, 353-364.
- [85] Gomes MI (1984b). Penultimate limiting forms in extreme value theory. *Ann. Inst. Statist. Math.* **36A**, 71-85.
- [86] Gomes MI (1993a). A Obra Científica de J. Tiago de Oliveira. Em D. Pestana (ed.), *Estatística Robusta, Extremos e Mais Alguns Temas*, Edições Salamandra, 241-248.
- [87] Gomes MI (1993b). Modelos Extremos em Esquemas de Dependência. Em D Pestana (ed.), *Estatística Robusta, Extremos e Mais Alguns Temas*, Edições Salamandra, 209-220.
- [88] Gomes MI (1995). Metodologias jackknife e bootstrap em Estatística de Extremos. Em Mendes-Lopes N, Gonçalves E, Nogueira E, Rosa AC & Ferreira H (eds.), *II Congresso Anual da Sociedade Portuguesa de Estatística: Actas*, 31-46.
- [89] Gomes MI (1996). Propriedades distribucionais de estimadores de períodos de retorno em modelo max-autoregressivo. Em Branco J, Gomes P & Prata J (eds.). *Bom Senso e Sensibilidade—Traves Mestras da Estatística*, Edições Salamandra, 353-362.
- [90] Gomes MI (1999). The jackknife and the bootstrap methodologies in the estimation of parameters of rare events. *Revista de Estatística*, 5-23.
- [91] Gomes MI (2002). Controlo do viés de estimadores semi-paramétricos de parâmetros de acontecimentos raros. Em Carvalho L, Brilhante MF & Rosado F (eds.), *Novos Rumos em Estatística*, Edições S.P.E., 87-108.
- [92] Gomes MI (2005). “Extremistas” num extremo da Europa. In Rosado F (ed.). *Memorial da Sociedade Portuguesa de Estatística*, SPE editions, 37-46.
- [93] Gomes MI (2007). Memorial da Escola. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Estatística*, Primavera de 2007, SPE Editions, 37-51.
- [94] Gomes MI (2013a). Extremistas da Minha Terra. *Info-Ciências Digital*. Acessível em: <http://www.fc.ul.pt/pt/noticia/26-02-2013/extremistas-da-minha-terra>
- [95] Gomes MI (2013b). *Penultimate Approximations: Past, Present ... and Future?* RG preprint available at: [https://www.researchgate.net/publication/333949368\\_PENULTIMATE\\_APPROXIMATIONS\\_PAST\\_PRESENT\\_and\\_FUTURE](https://www.researchgate.net/publication/333949368_PENULTIMATE_APPROXIMATIONS_PAST_PRESENT_and_FUTURE)
- [96] Gomes MI (2014a). Personalidade e Aulas Memoráveis. Em “*Homenagem a Sebastião e Silva/Testemunhos (1914-1972)*”, December 12, 2014.
- [97] Gomes MI (2014b). Resampling Methodologies in the Field of Statistics of Univariate Extremes. In Pacheco A, Oliveira MR, Santos R & Paulino CD (eds.), *New Advances in Statistical Modeling and Application*. Studies in Theoretical and Applied Statistics, Selected Papers of the Statistical Societies (SPE 2011), Springer-Verlag, Berlin, and Heidelberg, 29-40.
- [98] Gomes MI (2017). *A ‘Escola de Extremos’ em Portugal—‘Extremistas’ num Extremo da Europa*. RG preprint: [https://www.researchgate.net/publication/324538105\\_A\\_Escola\\_de\\_Extremos\\_em\\_Portugal\\_-Extremistas\\_num\\_Extremo\\_da\\_Europa](https://www.researchgate.net/publication/324538105_A_Escola_de_Extremos_em_Portugal_-Extremistas_num_Extremo_da_Europa)
- [99] Gomes MI (2020). Revisiting rates of convergence and penultimate approximations for extremes. *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.* **50**, 135-149.
- [100] Gomes MI (2021). *The ‘Portuguese School of Extremes and Applications’ (PORTSEA)*. Notas e Comunicações CEAUL 01/2021.
- [101] Gomes MI (2022a). Em memória de Ross Leadbetter (1931-2022). *Info-Ciências Digital*/14-03-2022. <https://ciencias.ulisboa.pt/pt/noticia/14-03-2022/em-mem%C3%B3ria-de-ross-leadbetter-1931-2022>
- [102] Gomes MI (2022b). In memoriam: Ross Leadbetter (1931-2022). *Boletim da SPE*, Primavera de 2022, p.5. <https://www.spestatistica.pt/storage/app/uploads/public/623/77e/5d3/62377e5d3f1e3022734088.pdf#page=7>
- [103] Gomes MI & Figueiredo F (2004). Redução de viés na estimação de quantis extremos. In Rodrigues P *et al.* (eds.), *Estatística com Acaso e Necessidade*, Edições S.P.E., 283-296.
- [104] Gomes MI & de Haan L (1999). Approximation by penultimate extreme value distributions. *Extremes* **2**:1, 71-85.
- [105] Gomes MI & Henriques Rodrigues L (2005). Estimação do parâmetro de escala de primeira ordem em modelos de caudas pesadas. Em Braumann C, Infante P, Oliveira MM, Alpizar-Jara R, Rosado F (eds.), *Estatística Jubilar*, Edições S.P.E., 355-366.
- [106] Gomes MI & Henriques Rodrigues L (2007). Escolha adaptativa do ‘threshold’ em estimação de viés reduzido: um estudo de simulação. Em Ferrão ME, Nunes C & Braumann CA (eds.), *Estatística—Ciência Interdisciplinar*, Edições S.P.E., 419-430.

- [107] Gomes MI & Henriques-Rodrigues L (2008). Tail index estimation for heavy tails: accommodation of bias in the excesses over a high threshold. *Extremes* **11**:3, 303-328.
- [108] Gomes MI & Henriques Rodrigues L (2013). Adaptive PORT-MVRB Estimation of the Extreme Value Index. In Oliveira P, Temido MG, Henriques C & Vichi M (eds.), *Recent Developments in Modeling and Applications in Statistics* (SPE2010), Studies in Theoretical and Applied Statistics: Subseries B. Springer, 117-125.
- [109] Gomes MI & Martins MJ (2002). 'Asymptotically unbiased' estimators of the tail index based on external estimation of the second order parameter. *Extremes* **5**:1, 5-31.
- [110] Gomes MI & Miranda C (2003). A metodologia jackknife na estimação do índice extremal. Em Brito P *et al.* (eds.), *Literacia e Estatística*, Edições S.P.E., 299-310.
- [111] Gomes MI & Montfort MAJ van (1986). Exponentiality versus Generalized Pareto, quick tests. In K. Cihak (ed.), III *International Conf. on Statistical Climatology: Proceedings*, Osterreichische Gesellschaft fur Meteorologie, Vienna, Austria, pp. 185-195.
- [112] Gomes MI & Neves C (2007). Comparação assintótica em níveis ótimos de estimadores do índice de valores extremos. Em Ferrão ME, Nunes C & Braumann CA (eds.), *Estatística—Ciência Interdisciplinar*, Edições S.P.E., 431-444.
- [113] Gomes MI & Oliveira O (2001). The bootstrap methodology in Statistics of Extremes—choice of the optimal sample fraction. *Extremes* **4**:4, 331-358.
- [114] Gomes MI & Pestana DD (2009). Caudas leves em desporto: estimação de parâmetros úteis. Em Oliveira I, Correia E, Ferreira F, Dias S & Braumann CA (eds.), *Estatística: Arte de Explicar o Acaso*, Edições S.P.E., 307-318.
- [115] Gomes MI & Turkman KF (2022). Editorial: In memoriam — Ross Leadbetter [1931-2022]. *Revstat—Statistical Journal* **20**:2, Editorial. <https://doi.org/10.57805/revstat.v20i2.463>
- [116] Gomes MI, Barroso HM & Amaral MA (1975). Étude expérimentale de tests d'ajustement. *Rev. Statistique Appl.* **23**:2, 5-18.
- [117] Gomes MI, Martins MJ & Neves MM (2000). Alternatives to a semi-parametric estimator of parameters of rare events: the Jackknife methodology. *Extremes* **3**:3, 207-229.
- [118] Gomes MI, de Haan L & Peng L (2002). Semi-parametric estimation of the second order parameter in statistics of extremes. *Extremes* **5**:4, 387-414.
- [119] Gomes MI, de Haan L, Pestana D, Canto e Castro L & Fraga Alves MI, Eds. (2003). *Extremes, Risk and Resampling Techniques: Extended Abstracts*. Edições CEAUL, ISBN: 972-8628-91-9 (98 pages).
- [120] Gomes MI, de Haan L & Pestana D (2004). Joint exceedances of the ARCH process. *J. Applied Probab.* **41**:3, 919-926.
- [121] Gomes MI, Hall A & Miranda C (2006a). Computação intensiva: moderna extensão do reino da fantasia? Em Canto e Castro L *et al.* (eds.), *Ciência Estatística*, Edições S.P.E., 69-80.
- [122] Gomes MI, de Haan L & Pestana D (2006b). Correction: 'Joint exceedances of the ARCH process'. *J. Applied Probab.* **43**:4, 1206.
- [123] Gomes MI, Martins MJ & Neves MM (2007). Improving second order reduced bias extreme value index estimation. *Revstat—Statist. J.* **5**:2, 177-207.
- [124] Gomes MI, Canto e Castro L, Fraga Alves MI & Pestana DD (2008a). Statistics of extremes for iid data and breakthroughs in the estimation of the extreme value index: Laurens de Haan leading contributions. *Extremes* **11**:1, 3-34.
- [125] Gomes MI, de Haan L & Henriques-Rodrigues L (2008b). Tail Index estimation for heavy-tailed models: accommodation of bias in weighted log-excesses. *J. Royal Statistical Society B* **70**:1, 31-52.
- [126] Gomes MI, Figueiredo F & Neves MM (2012). Adaptive estimation of heavy right tails: resampling-based methods in action. *Extremes* **15**, 463-489.
- [127] Gomes MI, Brilhante MF & Pestana D (2013a). Estimadores de um índice de valores extremos positivo: um estudo comparativo. Em Maia M, Campos P & Duarte Silva P (eds.), *Estatística: Novos Desenvolvimentos e Inspirações*, 153-165.
- [128] Gomes MI, Figueiredo F & Neves MM (2013b). Adaptive choice of thresholds and the bootstrap methodology: an empirical study. In Lita da Silva J, Caeiro F, Natário I & Braumann CA (Eds.), *Advances in Regression, Survival Analysis, Extreme Values, Markov Processes and Other Statistical Applications*, Studies in Theoretical and Applied Statistics, Selected Papers of the Statistical Societies, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 203-211.
- [129] Gomes MI, Fraga Alves MI & Neves C (2013c). *Análise de Valores Extremos: Uma Introdução*. Edições SPE e INE, Lisboa, Portugal, ISBN: 978-972-8890-30-8 (viii+267 páginas).
- [130] Gomes MI, Brilhante MF & Pestana D (2015). A Mean-of-Order- $p$  Class of Value-at-Risk Estimators. In Kitsos C *et al.* (eds.), *Theory and Practice of Risk Assessment*, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 136, Springer International Publishing, Switzerland, pp. 305-320.

- [131] Gomes MI, Henriques-Rodrigues L & Manjunath BG (2016). Mean-of-order-p location-invariant extreme value index estimation. *Revstat—Statist. J.* **14**:3, 273-296.
- [132] Gomes MI, Henriques-Rodrigues L & Pestana D (2021). Estimação de um índice de valores extremos positivo através de médias generalizadas e em ambiente de não-regularidade. Em P Milheiro, A Pacheco, B de Sousa, I Fraga Alves, I Pereira, MJ Polidoro & S Ramos (eds.), *Estatística: Desafios Transversais às Ciências com Dados—Atas do XXIV Congresso da Sociedade Portuguesa de Estatística*. ISBN: 978-972-8890-47-6, Edições SPE, pp. 213-226.
- [133] Gumbel E.J. (1958; 2004). *Statistics of Extremes*. Columbia University Press; Dover Publications Inc., New York.
- [134] Haan L de (1970). *On Regular Variation and its Application to the Weak Convergence of Sample Extremes*. PhD Thesis, Mathematical Centre Tract 32, Amsterdam.
- [135] Haan L de (2006). Discussion of “Copulas: Tales and facts”, by Thomas Mikosch. *Extremes* **9**, 21-22.
- [136] Haan L de & Ferreira A (2006). *Extreme Value Theory: An Introduction*. Springer Science + Business Media, LLC, New York.
- [137] Haan L de & Zhou C (2008). On extreme value analysis of a spatial process. *Revstat—Statist. J.* **6**:1, 71-81.
- [138] Haan L de, Vries CG de & Zhou C (2009). The expected payoff to Internet auctions. *Extremes* **12**, 219-238.
- [139] Haan L de, Klein Tank A & Neves C (2015). On tail trend detection: modeling relative risk. *Extremes* **18**, 141-178.
- [140] Hall A (2001). Extremes of moving average models with regularly varying tails. *Extremes* **4**:3, 219-239.
- [141] Hall A (2003). Extremes of integer-valued moving average models with exponential type tails. *Extremes* **6**:4, 361-379.
- [142] Hall A & Scotto MG (2006). Extremes of periodic integer-valued sequences with exponential type tails. *Revstat—Statist. J.* **4**:3, 249-273.
- [143] Hall A & Scotto MG (2008). On the extremes of randomly sub-sampled time series. *Revstat—Statist. J.* **6**:2, 151-164.
- [144] Hall A, Gomes MI, Rootzén H & Scotto M, Eds. (2004a). *Book of Abstracts: 3rd International Symposium on Extreme Value Analysis—Theory and Practice*. Edições Universidade de Aveiro, ISBN: 972-789-131-4 (130 páginas).
- [145] Hall A, Scotto M & Ferreira H (2004b). On the extremal behaviour of generalised periodic sub-sampled moving average models with regularly varying tails. *Extremes* **7**:2, 149-160.
- [146] Henriques-Rodrigues L & Gomes MI (2009a). A metodologia PORT na estimação semi-paramétrica de um parâmetro de escala. Em Oliveira I, Correia E, Ferreira F, Dias S & Braumann CA (eds.), *Estatística: Arte de Explicar o Acaso*, Edições S.P.E., 559-570.
- [147] Henriques-Rodrigues L & Gomes MI (2009b). High quantile estimation and the PORT methodology. *Revstat—Statist. J.* **7**:3, 245-264.
- [148] Henriques-Rodrigues L, & Gomes MI (2013). A note on the PORT methodology in the estimation of a shape second-order parameter. In Oliveira P, Temido MG, Henriques C & Vichi M (eds.), *Recent Developments in Modeling and Applications in Statistics*. Studies in Theoretical and Applied Statistics: Subseries B, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg, 127-137.
- [149] Henriques-Rodrigues L, & Gomes MI (2014). Peaks over random threshold best linear unbiased estimation of the extreme value index. In Pacheco A, Oliveira MR, Santos R & Paulino CD (eds.), *New Advances in Statistical Modeling and Application*. Studies in Theoretical and Applied Statistics, Selected Papers of the Statistical Societies, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg, 145-153.
- [150] Henriques-Rodrigues L, Gomes MI & Pestana DD (2011). Statistics of extremes in athletics. *Revstat—Statist. J.* **9**:2, 127-153.
- [151] Henriques-Rodrigues L, Gomes MI, Fraga Alves MI & Neves C (2014). PORT estimation of a shape second-order parameter. *Revstat—Statist. J.* **12**:3, 299-328.
- [152] Jacob D, Neves C & Greetham DV (2020). *Forecasting and Assessing Risk of Individual Electricity Peaks*. Springer Briefs in Mathematics of Planet Earth.
- [153] Kitsos C, Oliveira T, Rigas A & Gulati S, Eds. (2015). *Theory and Practice of Risk Assessment*. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 136, Springer International Publishing, Switzerland.
- [154] Kitsos C, Oliveira T & Stelikh M, Eds. (2016). Special Issue on ‘Risk Analysis: Challenges and Applications’, *Revstat—Statist. J.* **14**:2, Instituto Nacional de Estatística.
- [155] Leng X, Peng L, Wang X & Zhou C (2019). Endpoint estimation for observations with normal measurement errors. *Extremes* **22**:1, 71-96.
- [156] Lourenço V (2022). Interview with Prof. Ivette Gomes, *Caucus for Women in Statistics*. <https://cwstat.org/publications/talk-the-walk/interview-with-ivette-gomes/>

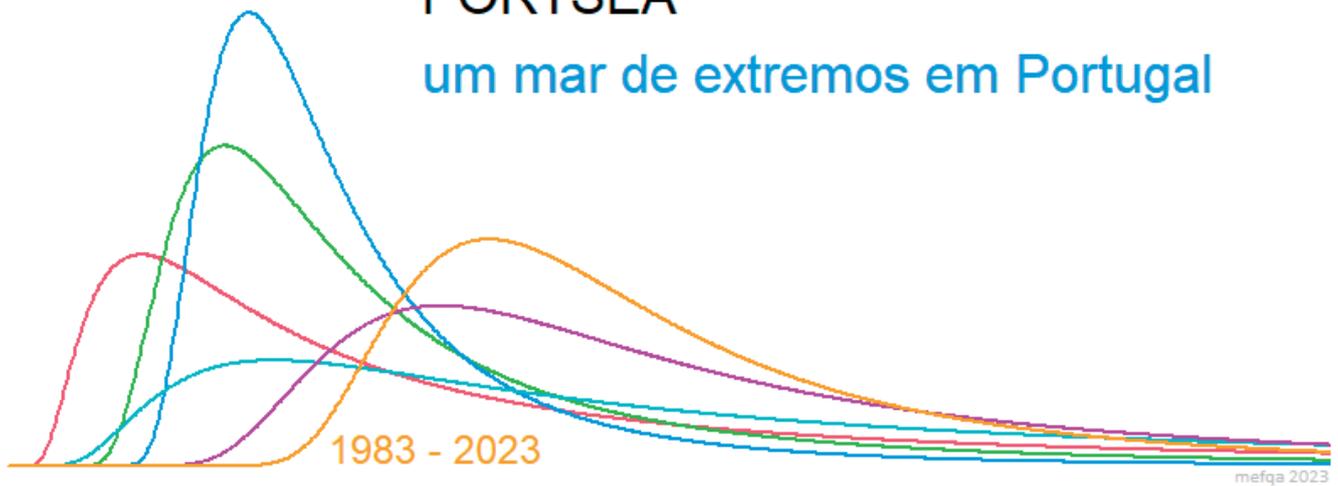
- [157] Lucarini V, Faranda D, Freitas AC, Freitas JM, Kuna T, Holland D, Nicol D, Todd D & Vaienti S (2016). *Extremes and Recurrence in Dynamical Systems*. Hoboken, N.J., Wiley.
- [158] Martins MJ, Gomes MI & Neves MM (1998). Comportamento do estimador de Hill na estimação semi-paramétrica do índice de cauda. Em Souto Miranda M & Pereira I (eds.), *Estatística: a Diversidade na Unidade*, Edições Salamandra, 345-352.
- [159] Martins MJ, Gomes MI & Neves MM (2004). Estimadores de núcleo para o índice de cauda. En Rodrigues P *et al.* (eds.), *Estatística com Acaso e Necessidade*, Edições S.P.E., 439-450.
- [160] Mendonça S, Pestana D & Gomes MI (2015). Randomly Stopped  $k$ -th Order Statistics. In Kitsos C *et al.* (eds.), *Theory and Practice of Risk Assessment*, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 136, Springer International Publishing, Switzerland, pp. 249-266.
- [161] Miranda C & Gomes MI (2007). Estimação do índice extremal em processos ARCH. En Ferrão ME, Nunes C & Braumann CA (eds.), *Estatística—Ciência Interdisciplinar*, Edições S.P.E., 527-538.
- [162] Miranda C & Gomes MI (2009). Comparação de estimadores do índice de cauda em estruturas dependentes. Em Oliveira I, Correia E, Ferreira F, Dias S & Braumann CA (eds.), *Estatística: Arte de Explicar o Acaso*, Edições S.P.E., 437-443.
- [163] Miranda C, Gomes MI & Hall A (2004). Comparação de estimadores do índice de cauda em estruturas dependentes. Em Rodrigues P *et al.* (eds.), *Estatística com Acaso e Necessidade*, Edições S.P.E., 459-469.
- [164] Mises R von (1936). La distribution de la plus grande de  $n$  valeurs. *Revue Math. Union Interbalcanique* **1**, 141-160. Reprinted in *Selected Papers of Richard von Mises*, *Amer. Math. Soc.* **2** (1964), 271-294.
- [165] Montfort MAJ van & Gomes MI (1985). Statistical choice of extremal models for complete and censored data. *J. Hydrology* **77**, 77-87.
- [166] Neves C & Fraga Alves MI (2008). Testing extreme value conditions—an overview and recent approaches, *Revstat—Statist. J.* **6**:1, 83-100.
- [167] Neves MM (1990). *Estimação por Blocos dos Parâmetros de Distribuição Fréchet. Comparação de Métodos Expeditos*. Tese de Doutoramento, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa.
- [168] Neves MM, Martins MJ & Gomes MI (2000). Comparação de abordagens da metodologia Bootstrap na estimação semiparamétrica do índice de cauda. Em Oliveira P & Athayde E (eds.), *Um Olhar sobre a Estatística*, Edição S.P.E., 146-159.
- [169] Oliveira A, Oliveira TA & Seijas-Macias A (2016). Skewness into the product of two normally distributed variables and the risk consequences. *Revstat—Statist. J.* **14**:2, 119-138.
- [170] Oliveira F (1992). *Leis Limites em Sucessões Dependentes de uma Cadeia*. Tese de Doutoramento, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa.
- [171] Oliveira O & Gomes MI (2004). Combinações lineares de log-observações de topo. Em Rodrigues P *et al.* (eds.), *Estatística com Acaso e Necessidade*, Edições S.P.E., 549-563.
- [172] Oliveira O, Gomes MI & Fraga Alves MI (2006). Improvements in the estimation of a heavy tail. *Revstat—Statist. J.* **4**:2, 81-109.
- [173] Oliveira T, Gomes MI, Kitsos C, Oliveira A & Grilo L, Eds. (2013). *Book of Abstracts—7th Workshop on Statistics, Mathematics and Computation and 5th International Conference on Risk Analysis*. Edições INE, ISBN:978-972-9473-71-5. Depósito Legal: 359956/13 (191 páginas).
- [174] Penalva H, Nunes S & Neves MM (2016). Extreme value analysis — A brief overview with an application to flow discharge rate data in a hydrometric station in the north of Portugal. *Revstat—Statist. J.* **14**:2, 193-215.
- [175] Penalva H, Prata Gomes D, Neves MM & Nunes S (2019). Testing conditions and estimating parameters in extreme value theory: application to environmental data. *Revstat—Statist. J.* **17**:2, 187-207.
- [176] Penalva H, Gomes MI, Caeiro F & Neves MM (2020). A couple of non-reduced bias generalized means in extreme value theory: an asymptotic comparison. *Revstat—Statist. J.* **18**:3, 281-298.
- [177] Pereira ML (2004). Extremal behaviour in models of superposition of random variables. *Revstat—Statist. J.* **2**:2, 163-178.
- [178] Pereira ML, Martins AP & Ferreira H (2017). Clustering of high values in random fields. *Extremes* **20**:4, 807-838.
- [179] Pereira S, Turkman KF & Correia L (2018). Spatio-temporal analysis of regional unemployment rates: A comparison of model-based approaches. *Revstat—Statist. J.* **16**:4, 515-536.
- [180] Prata Gomes D & Neves MM (2015). Adaptive Choice and Resampling Techniques in Extremal Index Estimation. In Kitsos C *et al.* (eds.), *Theory and Practice of Risk Assessment*, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 136, Springer International Publishing, Switzerland, pp. 321-332.

- [181] Ramos A & Ledford AW (2005). Regular score tests of independence in multivariate extreme values. *Extremes* **8**:1, 5-26.
- [182] Reis P & Canto e Castro, L (2009). Limit model for the reliability of a regular and homogeneous series-parallel system. *Revstat—Statist. J.* **7**, 227-243.
- [183] Reis P, Canto e Castro L, Dias S & Gomes MI (2015). Penultimate approximations and reliability of large coherent systems. *Methodology and Computing in Applied Probability* **17**:1, 189-206.
- [184] Scotto MG (2007). Extremes for solutions to stochastic difference equations with regularly varying tails. *Revstat—Statist. J.* **5**:3, 229-247.
- [185] Silva I & Silva ME (2009). Parameter Estimation for INAR Processes Based on High-Order Statistics. *Revstat—Statist. J.* **7**:1, 105-117.
- [186] Souto de Miranda C, Miranda C & Gomes MI (2022). A Robust Hurdle Poisson Model in the Estimation of the Extremal Index. In R Bispo, L Henriques-Rodrigues, R Alpizar-Jara and M De Carvalho (eds.), *Recent Developments in Statistics and Data Science*. SPE 2021, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol 398, Springer, Cham, Chapter 2, pp. 15-28.
- [187] Temido G, Gomes MI & Canto e Castro L. (2000). Inferência estatística em modelos max-semiestáveis. Em Oliveira P & Athayde E (eds.), *Um Olhar sobre a Estatística*, Edição S.P.E., 291-305.
- [188] Themido Pereira T (1994). *Contribuições à Teoria de Valores Extremos*. Tese de Doutorado, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa.
- [189] Tiago de Oliveira J (ed.) (1984a). *Statistical Extremes and Application*. NATO Advanced Science Institutes Series C: Mathematical and Physical Sciences 131. D. Reidel, Dordrecht.
- [190] Tiago de Oliveira J (1984b). Bivariate models for extremes; statistical decision. In J Tiago de Oliveira (ed.), *Statistical Extremes and Applications*, D. Reidel, Dordrecht, 131-153.
- [191] Tiago de Oliveira J (1984c). Univariate extremes: statistical choice. In J Tiago de Oliveira (ed.), *Statistical Extremes and Application*, D. Reidel, Dordrecht, 91-107.
- [192] Tiago de Oliveira J & Gomes MI (1984). Two test statistics for choice of univariate extreme models. In J Tiago de Oliveira (ed.), *Statistical Extremes and Application*, D. Reidel, Dordrecht, 651-668.
- [193] Turkman KF (1980). *Limiting Distribution of Maxima of Certain Types of Non-Stationary Stochastic Processes*. Ph.D. Thesis, University of Sheffield.
- [194] Turkman KF (1984). On the asymptotic upcrossings of a class of nonstationary sequences. In J Tiago de Oliveira (ed.), *Statistical Extremes and Applications*, D. Reidel, Dordrecht, 669-678.
- [195] Turkman KF (2014). On the upcrossings of trigonometric polynomials with random coefficients. *Revstat—Statist. J.* **12**:2, 135-155.
- [196] Turkman KF, Amaral Turkman MA & Pereira P (2010). Asymptotic models and inference for extremes of spatio-temporal data. *Extremes* **13**:4, 375-397.
- [197] Turkman KF, Scotto D & de Zea Bermudez P (2014). *Non-linear Time Series: Extreme Events and Integer Value Problems*. Springer, Heidelberg.
- [198] Valente de Freitas, A & Huesler, J (2003). Condition for the convergence of maxima of random triangular arrays. *Extremes* **6**, 391-394.
- [199] Velthoen J, Cai J-J, Jongbloed G & Schmeits M (2019). Improving precipitation forecasts using extreme quantile regression. *Extremes* **22**:4, 599-622.
- [200] Viseu C & Gomes MI (2006). A metodologia ‘Jackknife’ na estimação do índice de cauda. Em Canto e Castro L *et al.* (eds.), *Ciência Estatística*, Edições S.P.E., 703-714.
- [201] Viseu C & Gomes MI (2007). Estimação do índice de cauda e de quantis elevados: um estudo empírico. Em Ferrão ME, Nunes C & Braumann CA (eds.), *Estatística—Ciência Interdisciplinar*, Edições S.P.E., 857-866.
- [202] Vries CG de & Zhou C (2006). Discussion of ‘‘Copulas: Tales and facts’’, by Thomas Mikosch. *Extremes* **9**, 23-25.
- [203] Zea Bermudez P, Amaral Turkman MA & Turkman KF (2001). A predictive approach to tail probability estimation. *Extremes* **4**:4, 295-314.
- [204] Zhou C (2008). A 2-step estimator of the extreme value index. *Extremes* **11**:3, 281-302.
- [205] Zhou C (2017). Book review: quantitative risk management: concepts, techniques and tools, revised edition, by A.F. McNeil, R. Frey and P. Embrechts. *Extremes* **20**:2, 489-491.
- [206] Zhou C (2018). Discussion on ‘‘Human life is unlimited but short’’ by Holger Rootzén and Dmitrii Zholud. *Extremes* **21**:3, 405-410.



# PORTSEA

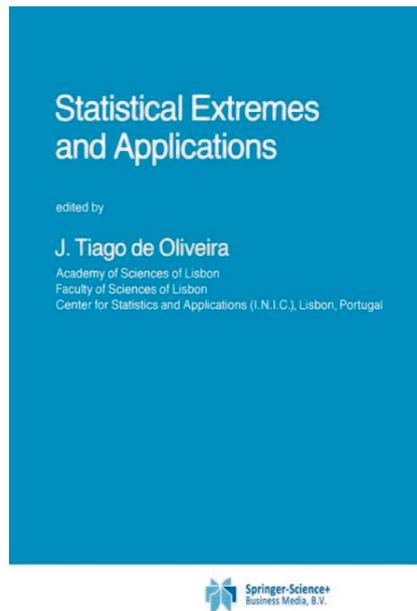
## um mar de extremos em Portugal



## Adenda

As páginas finais deste Tema Central são, elas próprias, também uma homenagem ao Prof. Tiago de Oliveira, o obreiro principal do acontecimento histórico a que associamos esta edição do *Boletim SPE primavera de 2023*.

Optámos por apresentar, nesta adenda, *fac-símile* das páginas iniciais de



a obra que regista as Atas do *NATO Advanced Study Institute on Statistical Extremes and Applications* realizado em Vimeiro, Portugal de 31 de agosto a 14 de setembro de 1983.

A consulta do Índice permite “rever títulos científicos de há 40 anos”. O Prefácio para além de relatar “o estado da arte” apresenta o propósito desses Cursos Avançados: obter uma perspetiva completa da área, ao mesmo tempo que se pesquisavam as direções mais promissoras para o avanço da Teoria dos Valores Extremos.



# Statistical Extremes and Applications

edited by

**J. Tiago de Oliveira**

Academy of Sciences of Lisbon

Faculty of Sciences of Lisbon

Center for Statistics and Applications (I.N.I.C.), Lisbon, Portugal



**Springer-Science+**  
Business Media, B.V.

# Statistical Extremes and Applications

# NATO ASI Series

## Advanced Science Institutes Series

*A series presenting the results of activities sponsored by the NATO Science Committee, which aims at the dissemination of advanced scientific and technological knowledge, with a view to strengthening links between scientific communities.*

The series is published by an international board of publishers in conjunction with the NATO Scientific Affairs Division

|   |                                       |   |
|---|---------------------------------------|---|
| A | Life Sciences                         | Plenum Publishing Corporation                                   |
| B | Physics                               | London and New York   |
| C | Mathematical<br>and Physical Sciences | D. Reidel Publishing Company<br>Dordrecht, Boston and Lancaster |
| D | Behavioural and Social Sciences       | Martinus Nijhoff Publishers                                     |
| E | Engineering and<br>Materials Sciences | The Hague, Boston and Lancaster                                 |
| F | Computer and Systems Sciences         | Springer-Verlag   |
| G | Ecological Sciences                   | Berlin, Heidelberg, New York and Tokyo                          |



**Series C: Mathematical and Physical Sciences Vol. 131**

# Statistical Extremes and Applications

edited by

**J. Tiago de Oliveira**

Academy of Sciences of Lisbon

Faculty of Sciences of Lisbon

Center for Statistics and Applications (I.N.I.C.), Lisbon, Portugal



Springer-Science+Business Media, B.V.

Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on  
Statistical Extremes and Applications  
Vimeiro, Portugal  
31 August-14 September 1983

#### Library of Congress Cataloging in Publication Data

NATO Advanced Study Institute on Statistical Extremes and Applications (1983: Vimeiro, Lisbon,  
Portugal)  
Statistical extremes and applications.

(NATO ASI series. Series C, Mathematical and physical sciences; vol. 131)  
"Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on Statistical Extremes and  
Applications, Vimeiro, Portugal, 31 August-14 September, 1983"—T.p. verso.  
"Published in cooperation with NATO Scientific Affairs Division."  
Includes index.

1. Mathematical statistics—Congresses. 2. Extreme value theory—Congresses.  
I. Tiago de Oliveira, J. II. Title. III. Series: NATO ASI series. Series C, Mathematical and  
physical sciences; vol. 131.

QA276.A1N38 1983 519.5 84-15144

ISBN 978-90-481-8401-9 ISBN 978-94-017-3069-3 (eBook)

DOI 10.1007/978-94-017-3069-3

---

---

All Rights Reserved

© 1984 by Springer Science+Business Media Dordrecht

Originally published by D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland in 1984

and copyright holders as specified on appropriate pages within.

No part of the material protected by this copyright notice may be reproduced or utilized  
in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording  
or by any information storage and retrieval system, without written permission from the  
copyright owner.

To the memory of  
**E. J. Gumbel**

## TABLE OF CONTENTS

|  |     |
|--|-----|
| Preface  | xi  |
| <u>A - CORE COURSE</u>   |     |
| B. EPSTEIN / Inaugural Address: Statistical Extremes:<br>Theory and Applications, Motivation and<br>Perspectives | 1   |
| SECTION I: PROBABILISTIC ASPECTS   |     |
| J. GALAMBOS / Introduction, Order Statistics, Exceedances.<br>Laws of Large Numbers                              | 3   |
| J. GALAMBOS / Asymptotics; Stable Laws for Extremes.<br>Tail Properties  | 19  |
| L. DE HAAN / Slow Variation and Characterization of<br>Domains of Attraction                                     | 31  |
| SECTION II: UNIVARIATE STATISTICS  |     |
| L. HERBACH / Introduction, Gumbel Model  | 49  |
| N. R. MANN / Statistical Estimation of Parameters of the<br>Weibull and Frechet Distributions                    | 81  |
| J. TIAGO DE OLIVEIRA / Univariate Extremes; Statistical<br>Choice  | 91  |
| I. WEISSMAN / Statistical Estimation in Extreme Value<br>Theory  | 109 |
| SECTION III: MULTIVARIATE THEORY   |     |
| P. DEHEUVELS / Probabilistic Aspects of Multivariate<br>Extremes   | 117 |
| J. TIAGO DE OLIVEIRA / Bivariate Models for Extremes;<br>Statistical Decision                                    | 131 |

## SECTION IV: EXTREMES AND STOCHASTIC PROCESSES

|  |     |
|--|-----|
| M. R. LEADBETTER / Extremes in Dependent Random Sequences                              | 155 |
| H. ROOTZÉN / Extremes in Continuous Stochastic Processes                               | 167 |
| Y. MITTAL / Comparison Technique for Highly Dependent<br>Stationary Gaussian Processes | 181 |

## SECTION V: APPLICATIONS

|  |     |
|--|-----|
| V. YEVJEVICH / Extremes in Hydrology   | 197 |
| G. I. SCHUËLLER / Application of Extreme Values in<br>Structural Engineering | 221 |
| R. SNEYERS / Extremes in Meteorology   | 235 |
| J. L. TEUGELS / Extreme Values in Insurance Mathematics                      | 253 |

B - SPECIFIC LECTURES

|  |     |
|--|-----|
| G. LINDGREN / Use and Structure of Slepian Model Processes<br>for Prediction and Detection in Crossing and<br>Extreme Value Theory | 261 |
| J. PICKANDS III / Spline and Isotonic Estimation of the<br>Pareto Function   | 285 |
| L. DE HAAN / Extremal Processes  | 297 |
| M. B. MARCUS / Extreme Values for Sequences of Stable<br>Random Variables  | 311 |

C - WORKSHOPS

## SECTION I: RATES OF CONVERGENCE

|   |     |
|---|-----|
| C. W. ANDERSON / Large Deviations of Extremes   | 325 |
| A. A. BALKEMA, L. DE HAAN and S. RESNICK / Uniform Rates<br>of Convergence to Extreme Value Distributions | 341 |
| J. GALAMBOS / Rates of Convergence in Extreme Value Theory  | 347 |

## SECTION II: CONCOMITANTS

|   |     |
|---|-----|
| M. I. GOMES / Concomitants in a Multidimensional<br>Extreme Model | 353 |
|---|-----|

## SECTION III: COMPUTING

|  |     |
|--|-----|
| A. FRANSEN / A Short Cut Algorithm for Obtaining Coefficients<br>of the BLUE's | 365 |
|--|-----|

|   |     |
|---|-----|
| A. FRANSEN and J. TIAGO DE OLIVEIRA / Statistical Choice of Univariate Extreme Models. Part II.   | 373 |
| M. SIBUYA / Doubly Exponential Random Number Generators   | 395 |
| SECTION IV: SEISMIC RISK  |     |
| L. L. GEORGE / Probability Problems in Seismic Risk and Load Combinations for Power Plants  | 403 |
| <u>D - CONTRIBUTED PAPERS</u>   |     |
| B. C. ARNOLD and J. A. VILLASEÑOR / The Distribution of the Maximal Time till Departure from a State in a Markov Chain  | 413 |
| E. CASTILLO, A. FERNÁNDEZ, A. ASCORBE and E. MORA / The Box-Jenkins Model and the Progressive Fatigue Failure of Large Parallel Element Stay Tendons            | 427 |
| J. COHEN / The Asymptotic Behaviour of the Maximum Likelihood Estimates for Univariate Extremes   | 435 |
| R. A. DAVIS / On Upper and Lower Extremes in Stationary Sequences   | 443 |
| A. C. DAVISON / Modelling Excesses over High Thresholds, with an Application  | 461 |
| L. F. M. DE HAAN and J. PICKANDS III / Stationary Min-stable Stochastic Processes   | 483 |
| P. DEHEUVELS / Strong Approximations of Records and Record Times  | 491 |
| C. GOOSSENS, A. BERGER and J. L. MÉLICE / High Percentiles Atmospheric SO <sub>2</sub> -Concentrations in Belgium   | 497 |
| A. M. HASOFER and P. PETOCZ / Extreme Response of the Linear Oscillator with Modulated Random Excitation  | 503 |
| J. HÜSLER / Frost Data: A Case Study on Extreme Values of Non-Stationary Sequences  | 513 |
| P. KUBAT / Estimation of the Scale and Location Parameters of the Extreme Value (Gumbel) Distribution for Large Censored Samples                                | 521 |
| D. MEJZLER / Asymptotic Behaviour of the Extreme Order Statistics in the Non-Identically Distributed Case   | 535 |
| T. ONOYAMA, M. SIBUYA and H. TANAKA / Limit Distribution of the Minimum Distance between Independent and Identically Distributed d-Dimensional Random Variables | 549 |

|   |     |
|---|-----|
| G. RAMACHANDRAN / Approximate Values for the Moments of<br>Extreme Order Statistics in Large Samples                    | 563 |
| G. RAMACHANDRAN / Estimation of Parameters of Extreme<br>Order Distributions of Exponential Type Parents                | 579 |
| S. RAO JAMMALAMADAKA / On Ordered Uniform Spacings for<br>Testing Goodness of Fit                                       | 591 |
| R.-D. REISS, M. FALK and M. WELLER / Inequalities for the<br>Relative Sufficiency between Sets of Order<br>Statistics   | 599 |
| D. ROSBJERG and J. KNUDSEN / POT-Estimation of Extreme Sea<br>States and the Benefit of Using Wind Data                 | 613 |
| R. L. SMITH / Threshold Methods for Sample Extremes   | 623 |
| J. L. TEUGELS / On Successive Record Values in a Sequence<br>of Independent Identically Distributed Random<br>Variables | 641 |
| J. TIAGO DE OLIVEIRA and M. I. GOMES / Two Test Statistics<br>for Choice of Univariate Extreme Models                   | 653 |
| K. F. TURKMAN / On the Asymptotic Upcrossings of a<br>Class of Non-Stationary Sequences                                 | 671 |
| AUTHOR INDEX  | 679 |
| SUBJECT INDEX   | 686 |

## PREFACE

The first references to statistical extremes may perhaps be found in the Genesis (The Bible, vol.I): the largest age of Methu'selah and the concrete applications faced by Noah — the long rain, the large flood, the structural safety of the ark —. But as the pre-history of the area can be considered to last to the first quarter of our century, we can say that Statistical Extremes emerged in the last half-century. It began with the paper by Dodd in 1923, followed quickly by the papers of Frechet in 1927 and Fisher and Tippett in 1928, after by the papers by de Finetti in 1932, by Gumbel in 1935 and by von Mises in 1936, to cite the more relevant; the first complete frame in what regards probabilistic problems is due to Gnedenko in 1943. And by that time Extremes begin to explode not only in what regards applications (floods, breaking strength of materials, gusts of wind, etc.) but also in areas going from Probability to Stochastic Processes, from Multivariate Structures to Statistical Decision. The history, after the first essential steps, can't be written in few pages: the narrow and shallow stream gained momentum and is now a huge river, enlarging at every moment and flooding the margins. Statistical Extremes is, thus, a clear-cut field of Probability and Statistics and a new exploding area for research.

The purpose of the NATO-ASI "Statistical Extremes and Applications" was to obtain a complete perspective of the field, also with a series of promising directions of research and some recent results.

Thus the program of the book:

- the state of art of Statistical Extremes and Applications through the sequence of Probabilistic Aspects (univariate problems), Statistical Decision (univariate data), Multivariate Structures (Probability and Statistics), Stochastic Processes and, finally, some applications (to Hydrology, to Structural Safety, to Meteorology and to Insurance) followed by some lectures on specific topics;
- a set of workshops dealing with Rates of Convergence, Concomitants, Computing Methods and Seismic Problems;

— a set of contributed papers widely dispersed, with new results and suggestions for research.

The best thanks must be given to NATO (Scientific Affairs Division) for the financial support given to the meeting and also to the portuguese sponsors — Secretary of State for Universities, National Institute for Scientific Research, National Board for Scientific and Technological Research, General Post Office and Calouste Gulbenkian Foundation; without their help it would be impossible to realize this gathering.

The cooperation of all participants was very helpful for the exchange of ideas and to the good and friendly atmosphere throughout the meeting; my best thanks to all of them.

At last, but surely not the least, I want to thank the help and cooperation of the members of the Department of Statistics of the University of Lisbon, with special relevance to the co-directors M. Ivette Gomes and K.F. Turkman; it is a very good group that crossed the desert during the organization time and continues to work on...

J. Tiago de Oliveira

## • Doutoramento

**Título:** Modelos para variáveis dependentes limitadas

**Autor:** Rodney Carvalho Afonso de Sousa, [rodney@ua.pt](mailto:rodney@ua.pt)

**Orientadoras:** Isabel Maria Simões Pereira e Maria Eduarda Silva

A minha tese de Doutoramento teve como principal objetivo desenvolver métodos adequados e práticos para a estimação de modelos de regressão linear (RL), quando a variável resposta é censurada, isto é, quando só é possível obter medições desta variável dentro de um determinado intervalo, enquanto as observações cujos valores caem fora desse intervalo são registadas com valores correspondentes aos limites do intervalo. Variáveis censuradas podem ocorrer, por exemplo, em estudos ambientais, onde limitações do aparelho de medição não permitem capturar níveis muito baixo de concentração de determinado mineral no ar ou na água.

A censura resulta em perda de informação contida nos dados. Por isso, a utilização dos usuais métodos de estimação no contexto de dados censurados resulta em estimativas (e conclusões) inconsistentes. De facto, na revisão de literatura, verificou-se que, ao longo das últimas 5 décadas, foram propostos vários métodos para estimar modelos de RL na presença de dados censurados. De uma forma geral, os métodos propostos baseiam-se em técnicas para completar os dados censurados, com o objetivo de aplicar os usuais métodos de estimação. Algumas dessas técnicas incluem, por exemplo, a imputação de observações censuradas pelos respetivos valores esperados ou pelos valores preditos. No entanto, as técnicas com maior fundamento estatístico são o algoritmo EM (*Expectation-Maximization*) e o algoritmo de ampliação de dados (AD), que são as estratégias mais recomendadas quando se está perante dados censurados. Assim, na minha tese, aplicou-se esses dois métodos para estimar algumas generalizações do modelo de RL clássica, no contexto de dados censurados, nomeadamente: o modelo de RL com autocorrelação nos erros e modelos de RL multivariada, sem e com autocorrelação nos erros. No contexto de dados univariados, utilizou-se uma abordagem Bayesiana para estimar modelos de RL censurada com erros autoregressivos AR(p). Esta abordagem considera o amostrador Gibbs com ampliação de dados (GAD), no qual, em cada iteração, são simulados tanto os parâmetros do modelo como as variáveis latentes. Para o cálculo da distribuição *a posteriori*, aplicou-se uma transformação adequada à variável latente, o que permitiu a obtenção da função de verosimilhança completa para o modelo. O estudo de simulação realizado mostrou que a abordagem proposta produz estimativas com uma elevada precisão, mesmo em cenários em que a proporção de observações censuradas é grande. Métodos de diagnóstico e seleção de modelos para dados censurados e com autocorrelação foram propostos e ilustrados num conjunto dados reais.

No contexto de dados multivariados, propôs-se três métodos de estimação baseados na ampliação de dados, nomeadamente, o algoritmo EM, o algoritmo AD usando a abordagem clássica e o algoritmo GAD. Por meio de estudo de simulação, estudou-se as propriedades assintóticas das estimativas, concluindo-se que as estimativas produzidas por AD e GAD são consistentes para correlação baixa e moderada. Além disso, desenvolveu-se um procedimento para calcular diferenças parciais de dados multivariados, o que permitiu deduzir a função de verosimilhança e distribuição *a posteriori* para o modelo de regressão multivariada com autocorrelação nos erros.

A realização deste trabalho só foi possível graças ao acompanhamento das minhas orientadoras e do apoio financeiro da Fundação Calouste Gulbenkian.

Rodney Sousa



# SPE

Sociedade Portuguesa  
de Estatística

## Prémio SPE 2022 (*ex-aequo*)

### **Temperature-Mortality Association: Portuguese Extreme Weather Event Early Warning System**

André Martins Brito, *ambrito.418@gmail.com*  
Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa e  
Instituto Nacional de Saúde Pública Dr. Ricardo Jorge

Portugal é um dos países europeus com um maior excesso de mortalidade durante o inverno, embora os invernos sejam considerados relativamente amenos. Há também um excesso de mortalidade durante o verão. Este excesso de mortalidade está associado a uma maior vulnerabilidade da população portuguesa a uma exposição não ótima à temperatura, condição agravada por más condições habitacionais, com isolamentos deficientes e fraca eficiência energética, e por uma população envelhecida (Fowler et al., 2015). Devido às alterações climáticas, ondas de calor e ondas de frio tornar-se-ão mais prováveis e podem resultar em excesso de mortes. O trabalho aqui apresentado foi desenvolvido no âmbito do Projeto de Investigação e Desenvolvimento RELIABLE - Painel de aviso do risco dos ocupantes de edifícios durante eventos climáticos extremos (DSAIPA/DS/0111/2019).

Neste trabalho propõe-se uma atualização aos sistemas de aviso prévio de frio e calor para utilização em Portugal Continental. O objetivo era desenvolver um indicador de risco, ativo durante todo o ano, e facilmente compreendido por toda a população, com a mais alta resolução espacial possível. Dados diários de mortalidade por todas as causas e temperaturas máximas, mínimas e médias foram recolhidos de fontes de dados públicos para o período de 1995-2019. As associações temperatura-mortalidade específicas para os distritos foram estimadas utilizando diferentes regressões quasi-Poisson. Distributed Lag Models (DLM) com patamares lineares de temperaturas foram propostos e estimados para semestres frios e quentes, onde temperaturas mínimas foram consideradas no outono/inverno e temperaturas máximas na primavera/verão, de forma a identificar os piores cenários de exposição (Armstrong, 2006). As regressões foram ajustadas por sazonalidade, tendências de longo prazo e estimativas anuais da população. A incidência da gripe foi também incluída nos modelos para melhorar o seu desempenho preditivo. A especificação dos modelos foi escolhida, independentemente por distrito, com base em critérios de ajustamento (Bhaskaran et al., 2013).

Os modelos propostos neste trabalho poderão servir como atualizações para os sistemas de aviso prévio de frio e calor, uma vez que fornecem os resultados para manter um indicador de risco, ativo durante todo o ano, e facilmente compreendido por toda a população, com a maior resolução espacial possível para os dados disponíveis para Portugal Continental. As diferenças entre os modelos ótimos para os diferentes distritos justificam completamente a necessidade de alertas específicos por região. Verificou-se que os patamares ideais de frio são temperaturas relativamente amenas quando comparados com os patamares ideais de calor, sugerindo que os efeitos das temperaturas frias sobre a mortalidade começam a temperaturas mais amenas. As temperaturas mínimas de mortalidade (MMT) (Tobías et al., 2021) variam entre distritos, sendo as mais elevadas registadas na região do Alentejo e as mais baixas no distrito de Vila Real. Foram encontradas evidências que apoiam a hipótese da aclimação da população aos seus climas específicos.

## Referências

- Armstrong, B. (2006). Models for the relationship between ambient temperature and daily mortality. *Epidemiology*, 17(6), 624–631. <https://doi.org/10.1097/01.ede.0000239732.50999.8f>
- Bhaskaran, K., Gasparrini, A., Hajat, S., Smeeth, L., & Armstrong, B. (2013). Time series regression studies in environmental epidemiology. *International Journal of Epidemiology*, 42(4), 1187–1195. <https://doi.org/10.1093/ije/dyt092>
- Fowler, T., Southgate, R. J., Waite, T., Harrell, R., Kovats, S., Bone, A., Doyle, Y., & Murray, V. (2015). Excess winter deaths in Europe: A multi-country descriptive analysis. *European Journal of Public Health*, 25(2), 339–345. <https://doi.org/10.1093/eurpub/cku073>
- Tobías, A., Hashizume, M., Honda, Y., Sera, F., Ng, C. F. S., Kim, Y., Roye, D., Chung, Y., Dang, T. N., Kim, H., Lee, W., Iñiguez, C., Vicedo-Cabrera, A., Abrutzky, R., Guo, Y., Tong, S., de Sousa Zanotti Stagliorio Coelho, M., Saldiva, P. H. N., Lavigne, E., ... Gasparrini, A. (2021). Geographical Variations of the Minimum Mortality Temperature at a Global Scale. *Environmental Epidemiology*, 5(5), E169. <https://doi.org/10.1097/EE9.0000000000000169>

### Breve CV:

André Martins Brito, galardoado *ex-aequo* com o Prémio SPE 2022, é licenciado em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão pelo Instituto Superior de Economia e Gestão e mestre em Matemática e Aplicações com especialização em Actuariado, Estatística e Investigação Operacional pela Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade Nova de Lisboa (FCT-UNL). Durante o mestrado foi reconhecido como o Melhor Aluno do mestrado em Investigação Operacional pela Associação Portuguesa de Investigação Operacional. Entre 2021 e 2022, foi bolseiro do Instituto Nacional de Saúde Dr. Ricardo Jorge no projeto de investigação “RELIABLE: Painel de aviso do risco dos ocupantes de edifícios durante eventos climáticos extremos”, financiado pela Fundação de Ciências e Tecnologias - DSAIPA/DS/0111/2019. O trabalho realizado no âmbito deste projecto serviu de base para a submissão do projecto ao Prémio SPE 2022. Durante o 1º semestre do ano lectivo de 2022/2023 executou funções como monitor na FCT-UNL na área da Estatística Multivariada. Neste momento trabalha como Analista de Subscrição Regional no sector segurador.





# SPE

Sociedade Portuguesa  
de Estatística

## Prémio SPE 2022 (*ex-aequo*)

### Least Squares Monte Carlo Methods in Stochastic Volterra Rough Volatility Models

Henrique Guerreiro, [henriqueguerreiro0@hotmail.com](mailto:henriqueguerreiro0@hotmail.com)  
ISEG

Os modelos de volatilidade estocástica irregulares, introduzidos em [Gatheral et al., 2018], são modelos em que os incrementos da log-volatilidade se comportam como os de um movimento Browniano fracionário com parâmetro de Hurst inferior a 1/2. Estes modelos são bastante consistentes com diversos factos empíricos. Nomeadamente, são capazes de produzir um ajuste notável ao *smile* de volatilidade implícita de índices como o SP500, com um pequeno número de parâmetros.

Ainda assim, modelos de volatilidade irregular como o modelo rBergomi (ver [Bayer et al., 2016]), não conseguem reproduzir o *smile* de volatilidade implícita associado a opções sobre o índice de volatilidade VIX. De facto, observamos que o *smile* do VIX apresenta um declive significativo, enquanto que o *smile* gerado pelo modelo rBergomi é aproximadamente constante. Na verdade, no modelo rBergomi, o processo de volatilidade pode ser visto como um processo Browniano semi-estacionário truncado (ver [Barndorff-Nielsen and Schmiegel, 2009]) com volatilidade (da volatilidade) constante. Devido volatilidade-da-volatilidade (VVol) ser constante, a volatilidade é log-normal, levando a um VIX aproximadamente log-normal, e consequentemente a *smiles* aproximadamente constantes.

Os modelos de Volterra estocásticos de volatilidade irregular, introduzidos em [Horvath et al., 2020], generalizam o modelo rBergomi, considerando a VVol como um processo estocástico. Desta forma, é possível reproduzir o declive positivo associado ao *smile* do VIX que observamos no mercado. No entanto, a introdução deste novo fator estocástico torna mais desafiante avaliação de opções sobre o VIX. Em [Horvath et al., 2020], foram propostos métodos eficientes para avaliação de opções sobre o VIX, sob a hipótese de uma VVol Markoviana e independente da volatilidade.

Neste trabalho, motivados por dados empíricos (ver [Da Fonseca and Zhang, 2019]) discutimos o problema de avaliação destas opções quando a VVol pode depender da volatilidade e/ou não ser Markoviana. Nesse caso, os métodos de Monte Carlo acima mencionados não são válidos. Para além disso, o método clássico de Monte Carlo dos mínimos quadrados enfrenta um crescimento exponencial da complexidade com o aumento do número pontos na grelha de tempo; já o método de Monte Carlo encastrado requer um número proibitivo de simulações.

Através da exploração da estrutura da variável de estado relevante, encontramos uma representação Markoviana de dimensão infinita da volatilidade no caso da VVol ser Markoviana. Através desta decomposição, desenvolvemos um método de Monte Carlo dos mínimos quadrados para a avaliação de opções sobre o VIX, cuja complexidade cresce apenas linearmente com o número de passos na grelha de tempo. Apresentamos o algoritmo de forma detalhada e apresentamos evidência numérica para estabelecer a sua performance, utilizando o método de Monte Carlo encastrado como *benchmark*. Concluimos que o nosso método de Monte Carlo é capaz de avaliar corretamente opções sobre o VIX, atingindo o mesmo grau de precisão que o método de Monte Carlo encastrado, mas com um custo computacional muito inferior.

Finalmente, apresentamos uma comparação com dados de mercado, especificamente um ajuste conjunto aos *smiles* do SP500 e VIX. Embora o ajuste não seja perfeito, é uma boa aproximação que pode ser melhorada em trabalhos futuros. É de notar que a correlação entre volatilidade e volatilidade-da-volatilidade desempenha um papel importante no ajuste.

Uma versão estendida deste trabalho, [Guerreiro and Guerra, 2023], encontra-se publicada na revista internacional *Journal of Computational Finance*.

#### Referências

- [Barndor -Nielsen and Schmiegel, 2009] Barndor -Nielsen, O. E. and Schmiegel, J. (2009). Brownian semistationary processes and volatility/intermittency. In Albrecher, H., Runggaldier, W. J., and Schachermayer, W., editors, *Advanced Financial Modelling*, pages 1 26. De Gruyter.
- [Bayer et al., 2016] Bayer, C., Friz, P., and Gatheral, J. (2016). Pricing under rough volatility. *Quantitative Finance*, 16(6):887 904.
- [Da Fonseca and Zhang, 2019] Da Fonseca, J. and Zhang, W. (2019). Volatility of volatility is (also) rough. *Journal of Futures Markets*, 39(5):600 611.
- [Gatheral et al., 2018] Gatheral, J., Jaisson, T., and Rosenbaum, M. (2018). Volatility is rough. *Quantitative Finance*, 18(6):933 949.
- [Horvath et al., 2020] Horvath, B., Jacquier, A., and Tankov, P. (2020). Volatility options in rough volatility models. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 11:437 469.
- [Guerreiro and Guerra, 2023] Guerreiro, H. and Guerra, J. (2023). Least squares Monte Carlo methods in stochastic Volterra rough volatility models. *Journal of Computational Finance*.

#### Breve CV:

Henrique Lourenço Guerreiro, galardoado com o Prémio SPE 2022, é Licenciado em Matemática pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. É também Mestre em Matemática pela Universidade de Cambridge, Reino Unido. Atualmente é candidato ao Doutoramento em Matemática Aplicada à Economia e Gestão no Instituto Superior de Economia e Gestão (ISEG), sob a supervisão do Professor Doutor João Guerra. Nesse âmbito, recebeu apoio da bolsa de Doutoramento SFRH/BD/147161/2019 concedida pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P.



# Prémio SPE 2023



# SPE

Sociedade Portuguesa  
de Estatística

Pretendendo estimular a atividade de estudo e investigação científica em Probabilidades e Estatística, a Sociedade Portuguesa de Estatística institui em 2023 o Prémio SPE, regido pelo seguinte regulamento.

Está aberto até 15 de Setembro de 2023 o concurso para atribuição do Prémio SPE 2023, doravante referido como prémio. O prémio é constituído por uma quantia de 1000 euros.

Ao prémio podem concorrer trabalhos originais sobre temas de Probabilidades e Estatística, desde que não tenham sido objeto de qualquer prémio atribuído por outra instituição. O trabalho deverá ser apresentado em português ou em inglês e não poderá exceder 25 páginas A4.

Podem candidatar-se ao prémio jovens investigadores sócios da SPE que não completem 35 anos de idade até 31 de Dezembro de 2023 ou que tenham obtido doutoramento há menos de 5 anos e que não tenham recebido o prémio nas quatro edições anteriores.

A decisão de admissibilidade e a apreciação dos trabalhos submetidos a concurso é da competência de um Júri, cuja nomeação é da responsabilidade da Direção da SPE.

Os critérios de seleção pautar-se-ão pela exigência e precisão nos vários aspetos que o Júri considerar pertinentes, nomeadamente: i) qualidade e clareza do texto; ii) inovação e rigor científico; iii) contribuição para o desenvolvimento da área de Probabilidades e Estatística nos planos teórico, metodológico e/ou aplicado.

O Júri é soberano nas suas decisões, não havendo lugar a recurso.

O Júri reserva-se o direito de não atribuir o Prémio SPE 2023 e poderá solicitar prova das condições de admissão.

As candidaturas ao prémio, dirigidas ao Presidente da Sociedade Portuguesa de Estatística, são constituídas pelos trabalhos concorrentes e pelo *curriculum vitae* dos autores e podem ser enviadas por correio eletrónico para [spe@spestatistica.pt](mailto:spe@spestatistica.pt).

A entrega formal do Prémio SPE 2023, com apresentação do trabalho galardoado, terá lugar durante o XXVI Congresso da Sociedade Portuguesa de Estatística—SPE 2023.



## Retrospectiva do Boletim SPE - Tema Central

Disponíveis em <https://www.spestatistica.pt/publicacoes/categoria/boletim-da-spe>

**Outono de 2022** – Prémios na *Sociedade Portuguesa de Estatística*

**Primavera de 2022** – Liderança Estatística

**Outono de 2021** – *Machine Learning* e Inteligência Artificial

**Primavera de 2021** – Especial Covid: a Estatística ao serviço da sociedade

**Outono de 2020** – 40 anos SPE: De onde viemos? Onde estamos? Para onde vamos?

**Primavera de 2020** – INE–85 anos de estatísticas a servir o país

**Outono de 2019** – Estatística nas Ciências da Saúde

**Primavera de 2019** – Séries Temporais de Valor Inteiro

**Outono de 2018** – Equações diferenciais estocásticas e algumas aplicações

**Primavera de 2018** – Estatística Multivariada – perspectiva no século XXI

**Outono de 2017** – O Tema Central da Estatística - um novo olhar

**Primavera de 2017** – Incerteza em Engenharia

**Outono de 2016** – O Tema Central da Estatística

**Primavera de 2016** – Séries Temporais e suas aplicações

**Outono de 2015** – Estatística em Genética

**Primavera de 2015** – Estatística no Desporto

**Outono de 2014** – Estatística no Ensino Básico e Secundário

**Primavera de 2014** – (Um) Ano Internacional da Estatística

**Outono de 2013** – A “Escola Bayesiana” em Portugal

**Primavera de 2013** – Estatística não - paramétrica

**Outono de 2012** – Métodos Estatísticos em Medicina

**Primavera de 2012** – Estatística no Ensino Superior Politécnico

**Outono de 2011** – Análise de Sobrevivência

**Primavera de 2011** – Sondagens e Censos

**Outono de 2010** – Estatística Espacial

**Primavera de 2010** – *Data Mining* - Prospecção (Estatística) de Dados?

**Outono de 2009** – Modelos Econométricos

**Primavera de 2009** – Investigação (em) Estatística

**Outono de 2008** – Processos Estocásticos

**Primavera de 2008** – ALEA - Um sítio do nosso mundo

**Outono de 2007** – Bioestatística

**Primavera de 2007** - A “Escola de Extremos” em Portugal

**Outono de 2006** – Ensino e Aprendizagem da Estatística



# O MUNDO DA ESTATÍSTICA

ORGANIZAÇÃO PARTICIPANTE



Federation of European National  
Statistical Societies



# Índice

|  |    |
|--|----|
| Editorial .....  | 2  |
| Mensagem do Presidente .....   | 4  |
| Notícias .....   | 7  |
| <i>Enigmística</i> .....   | 11 |
| <br><b><i>SPE e a Comunidade</i></b>   |    |
| More data sources, more information, more quality<br><i>S. Rodrigues, A. Moreira, P. Saraiva e J Poças</i> ..... | 12 |
| <br><b><i>PORTSEA – um mar de Extremos em Portugal</i></b>   |    |
| Nota Editorial .....   | 19 |
| PORTSEA – um mar de Extremos em Portugal<br><i>Emília Athayde</i> .....  | 20 |
| Como comecei e tenho “navegado” neste “mar de extremos”<br><i>Manuela Neves</i> .....                            | 21 |
| Teoria de Valores Extremos em Sistemas Dinâmicos<br><i>Ana Freitas e Jorge Freitas</i> .....                     | 23 |
| Mare Nostrum — Um Mar de Extremos em Portugal<br><i>Miguel de Carvalho</i> .....                                 | 35 |
| Alguns Detalhes sobre a PORTSEA – Escola de Extremos e Aplicações em Portugal<br><i>M. Ivette Gomes</i> .....    | 38 |
| PORTSEA 1983-2023<br><i>Emília Athayde</i> .....   | 60 |
| Adenda .....   | 61 |
| <br><i>Ciência Estatística</i> .....   | 74 |
| <i>Prémio SPE 2022</i> .....   | 75 |
| <i>Prémio SPE 2023</i> .....   | 79 |
| <i>Boletim através do Tema Central</i> .....   | 80 |